Modeli aritmetike za razrednu nastavu

Dubravka Glasnović Gracin[1]

Sažetak:

Aritmetički sadržaji pokrivaju najveći dio matematike u razrednoj nastavi, stoga je modelima aritmetike potrebno posvetiti posebnu pažnju. U okviru ovog rada, model se shvaća kao osnovni primjer koji se koristi u nastavi s ciljem prikaza matematičkog koncepta. Tako se, primjerice, pojam prirodnog broja učenicima približava pomoću modela skupa i modela brojevnog pravca. Osim pojma prirodnog broja, u radu će se prikazati različiti modeli zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja prirodnih brojeva. Brojni primjeri pokazuju kako kontekst zadatka utječe na odabir modela te kako dominacija samo jednog modela može dovesti do teškoća u shvaćanju matematičkih ideja. Prilaženje konceptu prirodnog broja i njegovih operacija kroz što više različitih zadataka, aktivnosti, pristupa i modela daje mogućnost boljeg usvajanja matematičkih sadržaja.

Uvod

Matematički koncepti se učenicima mogu i trebaju približiti kroz razne modele. U udžbenicima je često prisutan samo jedan model ili samo neki modeli koji prikazuju određeni pojam. Upravo prilaženje pojmu kroz što više različitih modela daje mogućnost boljeg usvajanja određene matematičke ideje. Iz tog razloga nastavnik treba poznavati što više modela vezanih uz brojeve i njihove operacije (Padberg, 2005.). Naravno, ponekad i dani kontekst u tekstualnim zadacima sugerira ili određuje model koji je prikladan za rješavanje tog matematičkog zadatka. U ovom radu bit će riječi o modelima prirodnih brojeva te o modelima zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja prirodnih brojeva.

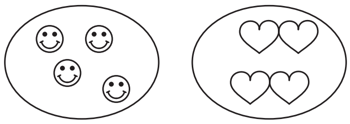
Modeli prirodnih brojeva

Prirodni brojevi se učenicima najčešće približavaju pomoću dva modela: modela skupa i modela brojevnog pravca.

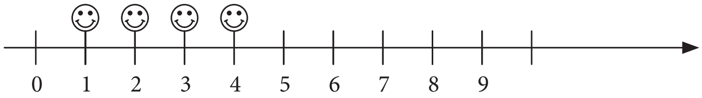
Model skupa ili skupovni model odnosi se na kardinalni broj promatranog konačnog skupa elemenata kao model za razumijevanje prirodnih brojeva u svakom početnom učenju matematike. Ovaj model učenici koriste u radu s konkretnim

[1]Dubravka Glasnović Gracin, Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

materijalima poput, primjerice, raznih didaktičkih žetona, Stern blokova i predmeta iz svakodnevice koji predstavljaju elemente skupa (npr. voća, kocaka, kamenčića, graha, zrna kukuruza itd.) te slika tih predmeta. Glavna aktivnost je prebrojavanje elemenata danog skupa. Pritom je s djecom važno kroz aktivnosti prodiskutirati da drugačiji položaj ili redoslijed elemenata u konkretnom skupu ne mijenja ukupan broj elemenata tog skupa.



Model brojevnog pravca za prirodne brojeve odnosi se na pravac kojemu je određena jedinična dužina i pomoću koje su prirodnim brojevima pridružene određene točke pravca. Tako dobivamo diskretan model jednako udaljenih točaka, a promatra se njihova udaljenost od početne točke kojoj je pridružen broj 0. Važna aktivnost uz ovaj pristup je prebrojavanje.



S obzirom da brojevni pravac zahtijeva viši stupanj apstrakcije od konkretnih materijala u skupovnome modelu, zgodno je učenicima ovaj model pravca prikazati prvo nizanjem predmeta (npr. računska gusjenica), a tek kasnije pridruživanjem prirodnih brojeva točkama pravca:

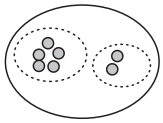
Primjeri prikaza prirodnih brojeva na pravcu u nastavi se očituju, primjerice, kroz (krojački) metar, ravnalo i ostale predmete sa skalama u skupu N, zatim preko živinog termometra i sl. Iako se u različitim povijesno-obrazovnim razdobljima različito gledalo na ova dva modela, važno je reći da su oba važna kao modeli prirodnih brojeva. Skupovni model naglašava količinu i svijest o količini, dok se model brojevnog pravca odnosi na nizanje elemenata i na uređaj te pomaže učeniku bolje shvatiti pojmove poput „između, veći, manji, iza, ispred" i sl.

Modeli zbrajanja

Zbrajanje je jedan od prvih matematičkih pojmova s kojima se učenik/dijete susreće nakon upoznavanja s pojmom broja, kako u svakodnevnoj tako i u školskoj matematici. Slijedeći model za prirodne brojeve, dva osnovna konceptualna modela za prikaz zbrajanja prirodnih brojeva su *skupovni model* i *model brojevnog pravca*. Oba modela koriste vizualne prikaze za proces zbrajanja prirodnih brojeva.

Primjer 1: Skupovni model za zbrajanje

Skupovni model za zbrajanje obuhvaća ideju unije dvaju disjunktnih skupova. Ovaj model dominira u zadacima riječima vezanima uz zbrajanje od prvog do petog razreda OŠ. To su zadaci koji se odnose na združivanje skupova. Primjerice: *Ivana u lijevoj ruci ima pet kuglica, a u desnoj dvije. Koliko se kuglica ukupno nalazi u obje Ivanine ruke?*

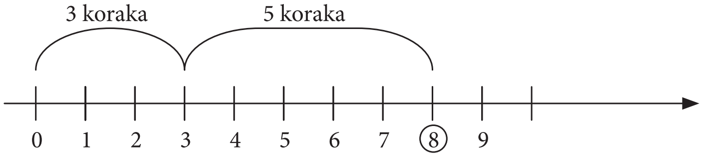


Posebno je važno učenicima ukazati da promjena redoslijeda/položaja unutar svakog skupa ne mijenja ukupan broj elemenata skupa. Bilo bi dobro kada bi se za zbrajanje prirodnih brojeva češće u praksi upotrebljavali i „crveni (topli) žetoni” (crveni krugovi od papira ili plastike) kako bi se kasnije, uvođenjem negativnih brojeva, uveli i „plavi (hladni) žetoni”. Na taj način bi se jamčio kontinuitet po vertikali u upoznavanju skupova brojeva.

Primjer 2: Model brojevnog pravca za zbrajanje

„Naravno, strategije koje dijete koristi u rješavanju problemskih zadataka evoluiraju s vremenom pa će postupno strategija direktnog modeliranja biti zamijenjena brojenjem gdje djeca koriste brojevni niz umjesto fizičkih objekata.” (Rudić i Cindrić, 2012., 135)

Na brojevnoj crti prirodni se brojevi geometrijski prikazuju pomoću udaljenosti, tj. broja jediničnih dužina. Zbrajanje 3 + 5 može se interpretirati kao „vrijednost 3 koja se uvećala za 5”. Novo „stanje” iznosi 8. S obzirom da se radi o povećanju jedne vrijednosti, ovaj model prikazuje dinamičan aspekt zbrajanja, dok je skupovni model unije više statičan.



Model brojevnog pravca može se za mlađi uzrast uvesti prikazom niza sličica jer je to prijelaz s konkretnijeg skupovnog na apstraktniji model brojevnog pravca:

Na oba ova modela zbrajanja mogu se zatim uvesti i pokazati osnovna svojstva zbrajanja prirodnih brojeva: zatvorenost, komutativnost, asocijativnost i neutralni element. Detaljniji tipovi zadataka riječima sa zbrajanjem nalaze se u Glasnović Gracin (2014.).

Modeli oduzimanja

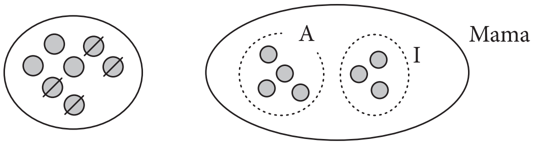
Kod oduzimanja, ideje za rješavanje zadataka opet u osnovi slijede skupovni model i model brojevnog pravca. Kao što se za zbrajanje skupovni model odnosi na „spajanje" skupova, kod oduzimanja se radi o „rastavljanju" skupova. Kao što na brojevnom pravcu zbrajanje prikazujemo kretanjem strelice udesno (ili prema gore na skali termometra), tako oduzimanje pokazujemo kretanjem ulijevo (ili prema dolje).

U zadacima riječima razlikujemo četiri konceptualna modela oduzimanja prirodnih brojeva: model uzimanja, model brojevnog pravca, model nepoznatog pribrojnika (ili nadopunjavanja) te model usporedbe.

Neki od njih se zgodnije prikazuju skupovno, a neki na brojevnome pravcu. Primjena ovih modela ovisi o tekstu zadatka, ali i strategiji rješavanja zadatka. Naglasimo da aktivnosti s konkretnim materijalom koje prikazuju skupovni model pripadaju samo skupu **N**, dok se model brojevnog pravca može proširiti do skupa cijelih brojeva i tako dati odgovor na pitanje, primjerice, koliko je 4 – 5. Naime, oduzimanje općenito nije zatvoreno na skupu prirodnih brojeva pa razlika dvaju prirodnih brojeva može biti i negativan broj ili 0. Važno je s učenicima u pogodnom trenutku istražiti i takve slučajeve oduzimanja s prirodnim brojevima.

Primjer 3: Model uzimanja

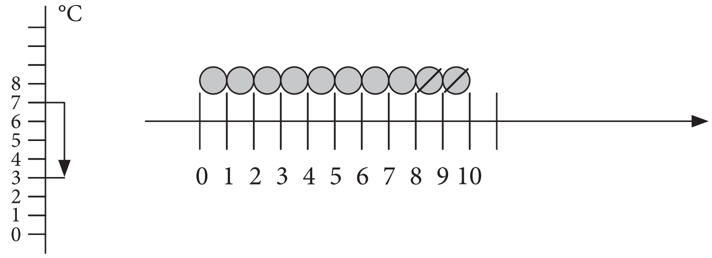
Kao što se kod zbrajanja skupovni model odnosi na „spajanje" skupova, kod oduzimanja se skupovni model odnosi na „rastavljanje" početnog skupa na dva disjunktna podskupa. Primjerice: *Ivan ima 7 jabuka. Četiri jabuke dao je Ani. Koliko mu je ostalo?* Prilikom rada s konkretnim materijalima, od početnog skupa prikazanog npr. sa 7 jabuka, oduzimaju se 4 jabuke i gleda (prebrojava) koliko ih je ostalo. Još jedan primjer: *Mama ima 7 jabuka. Četiri je dala Ani, a ostatak Ivanu. Koliko je jabuka dobio Ivan?* Iako se simbolički ovaj zadatak zapisuje kao $7 = 4 + x$, ovdje se prilikom rada s konkretnim materijalima skup od 7 jabuka rastavlja na podskupove od po 4 i 3 jabuke. Mnogi zadaci i slike iz udžbenika razredne nastave slijede skupovni model uzimanja.



Primjer 4: Model brojevnog pravca

Oduzimanje također možemo prikazati na brojevnome pravcu. U ovom slučaju krećemo se prema manjim brojevima (obično ulijevo na horizontalnom pravcu ili prema dolje na termometru). Primjer: *Temperatura na termometru izmjerena u podne iznosila je 7 °C. Navečer se temperatura spustila za 4 °C. Kolika je temperatura bila navečer?* Uz ovaj model možemo nacrtati jednostavnu skalu termometra i pokazati što se dogodilo s temperaturom pomoću pomicanja strelice prema dolje. Takav zadatak bi se zgodno mogao napraviti i pomoću dinamičnih programa na računalu.

Još jedan primjer: *Ivan ima 10 jabuka, a Ana ima 2 jabuke manje od Ivana. Koliko jabuka ima Ana?*



Primjer: *Djeca su napravila velikog snjegovića i izmjerila da je visok 192 cm. U sljedećih nekoliko dana zbog sunca se njegova visina smanjila za 4 cm. Koliko je bio visok snjegović nakon tih sunčanih dana? Nacrtaj skicu i odgovori.*

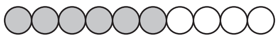
Primjer 5: Model nepoznatog pribrojnika (model nadopunjavanja)

Ovaj model povezuje operacije zbrajanja i oduzimanja. Ideja je da se oduzimanje svede na zbrajanje. Ako su zadani brojevi a i b, treba naći nepoznati broj c takav da je $a + c = b$. Broj c nazivamo nepoznatim pribrojnikom, a njegova vrijednost je $c = b - a$.

Primjer: *Ivan je izmjerio svoju visinu koja je iznosila 150 cm. Za nekoliko mjeseci ponovo se mjerio i zaključio da je visok 154 cm. Za koliko je centimetara Ivan narastao u tih nekoliko mjeseci?*

Tekst ovoga zadatka prirodno nameće sliku u kojoj zamišljamo metar sa zabilježenih 150 cm te sljedeću točku na 154 cm na istoj skali. Dakle, ovdje se konceptualno ne radi o modelu uzimanja kao u primjeru 3, nego o modelu $150 + c = 154$.

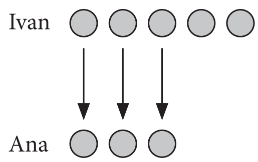
Primjer: *Ana ima 6 bombona. Koliko još bombona treba kupiti kako bi ukupno imala 10 bombona?*



Još jedan primjer je onaj s blagajnicama: *Zamislimo da smo kupili bilježnicu koja košta 27 kn i na blagajni dajemo novčanicu od 100 kn.* Iako se u današnjim trgovinama nalaze blagajne u kojima blagajnica automatski očita vrijednost koju treba uzvratiti, prisjetimo se kako su to radile ili još uvijek rade blagajnice čije blagajne nemaju tu mogućnost. One su ovako uzvraćale: dale bi 3 kn i rekle: 30, zatim bi dale još 20 i rekle 50, i zatim bi dale 50 kn i rekle 100. Na taj način one bi zapravo *nadopunile razliku* između 27 i 100, te uzvratile 73 kn a da uopće nisu koristile klasičan postupak oduzimanja računanjem.

Kod ovog modela učenicima je posebno zgodno istaknuti da se rezultat oduzimanja naziva *razlika*, što se lijepo može prikazati na pripadnim slikama. Naime, u ovim zadacima zapravo se pita za koliko se razlikuju Ivanova početna i kasnija visina – dakle traži se razlika tih dviju vrijednosti. Isto vrijedi i za primjer s blagajnicom.

Primjer 6: Model usporedbe



Model usporedbe odnosi se na tekstualne zadatke u kojima kontekst sugerira da umanjenik i umanjitelj uparujemo i uspoređujemo kako bismo dobili njihovu razliku. Npr. *Ivan ima 5 bombona, a Ana 3. Želimo znati koliko više bombona ima Ivan u odnosu na Anu.*

U rješavanju ovog zadatka učenik može „uparivati" Ivanove bombone s Aninima dokle god je to moguće. Oni bomboni koji su ostali bez svog para prikazuju razliku između Aninog i Ivanovog broja bombona. Primijetimo da smo na taj način jedan prilično konfuzan zadatak pomoću modela pretvorili u lakši zadatak. Naime, ovaj zadatak učenicima je teži u odnosu na neke druge oblike (Pavlin – Bernardić, Rovan i Vlahović – Štetić, 2011.) jer se u njemu traži oduzimanje iako se u tekstu koristi ključna riječ „više". No, skiciranjem i korištenjem modela usporedbe zadatak će biti lako riješiti i razumjeti.

Modeli množenja

I množenje učenicima približavamo kroz skupovni model i model brojevnog pravca (Markovac, 2001.). Ovisno o tekstu i strategiji rješavanja zadatka, načini koji se pritom koriste za prirodne brojeve su: uzastopno zbrajanje jednakih pribrojnika, model površine, skaliranje te Kartezijev model.

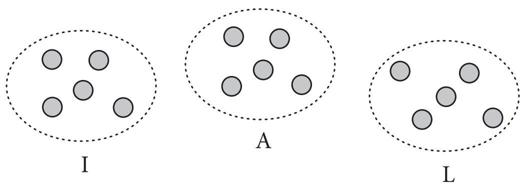
Neki od ovih modela su slični i ponekad nisu strogo odvojivi, ali nijanse u kontekstu sugeriraju koji model koristiti da bi učenik bolje shvatio zadatak. Stoga je važno da nastavnik poznaje svaki model i da promišlja o tome koji je najpogodniji model za pojedini zadatak množenja.

Primjer 7: Zbrajanje jednakih pribrojnika

Uzastopno zbrajanje jednakih pribrojnika je model koji se najčešće koristi u razrednoj nastavi matematike i pomoću kojeg se i uvodi pojam množenja. Može se prikazati skupovnim modelom, kao i modelom brojevnog pravca.

Zadatak pogodan za skupovni model bi, primjerice, glasio: *Ivan ima 5 kn, Ana ima 5 kn i Luka ima 5 kn. Koliko novaca imaju zajedno?*

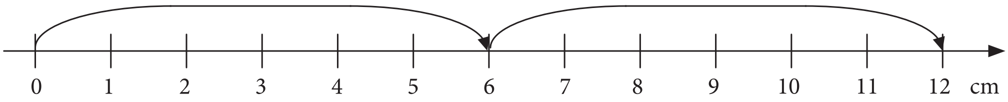
Ovo zbrajanje $5 + 5 + 5 = 15$ možemo zapisati kao $3 \cdot 5 = 15$.



Općenito, n skupova s po a elemenata ukupno ima $n \cdot a$ elemenata.

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ puta}}$$

Model brojevnoga pravca odnosi se na nanošenje određene dužine onoliko puta koliko je zadano u zadatku. I tu imamo uzastopno zbrajanje jednakih pribrojnika, tj. duljina zadane dužine. Takav model na pravcu ponekad se naziva i model udaljenosti, a često označava dinamičan aspekt množenja u kojemu se u vremenskim intervalima ponavlja ista vrijednost. Primjerice: *Žabica u jednom skoku preskoči 6 cm. Koliko će centimetara prevaliti u dva takva skoka?*

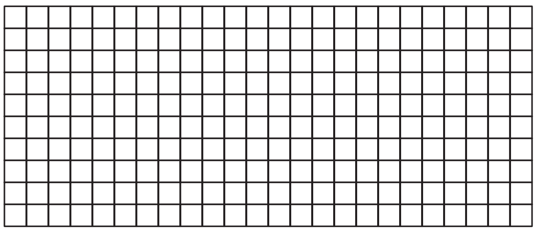


Iako se ovaj model s oba primjera masovno primjenjuje za množenje u razrednoj nastavi (naročito skupovni), važno je da nastavnik bude svjestan da taj model pokriva samo množenja tipa $n \cdot a$ kada je n prirodan broj. To znači da se on neće lako moći primijeniti općenito za množenje u, primjerice, skupu **Q** ili **Z**. Ako učenik kroz razrednu nastavu upozna samo skupovni model množenja, mogao bi imati teškoća sa shvaćanjem pojma množenja racionalnih brojeva i sl. Zato je važno uz ovaj model učenicima ponuditi i ostale modele množenja prirodnih brojeva, pogotovo ih upoznati s onima koji će se moći primijeniti i na racionalne brojeve.

Primjer 8: Model površine pravokutnika

Množenje se zgodno može prikazati na primjeru površine pravokutnika. Općenito, umnožak prirodnih brojeva $a \cdot b$ možemo shvatiti kao površinu pravokutnika s a redaka, pri čemu u svakom retku ima b elemenata.

Primjer: *Za terasu pravokutnog oblika pravokutnika potrebne su točno 24 pločice u jednome retku. Koliko će takvih pločica biti potrebno ako je za popločivanje cijele terase potrebno 10 takvih redaka? Nacrtaj sliku. Izračunaj.*



10 redova,
u svakom po 24 pločice

$10 \cdot 24 = 240$

Kod skupa prirodnih brojeva može se raditi o diskretnom modelu kao na slici, dok se taj primjer kasnije može primijeniti i na racionalne brojeve. Upravo iz tog razloga važno je da se na skupu prirodnih brojeva učenicima prikaže množenje i na modelu površine pravokutnika. Osim toga, na ovom modelu očito je svojstvo komutativnosti množenja, što nije slučaj kod zbrajanja jednakih pribrojnika.

Primjer 9: Skaliranje

Skaliranje se odnosi na aktivnosti množenja $\lambda \cdot a$, pri čemu λ može biti bilo koji broj. Takav model prikazuje se na brojevnome pravcu i ne odnosi se samo na skup **N**. Ako su λ i a prirodni brojevi, onda se ovaj model svodi na spomenuti model množenja na brojevnome pravcu, ali zgodno ga je još jednom spomenuti u obliku skaliranja jer se kasnije lijepo može nadograditi i na skupove **Q** i **R**.

Primjer: *Prilikom ispisa dokumenta s računala postoje opcije: 1x, 2x, 3x, 4x. Opcija 1x znači da će slika biti ispisana u prirodnoj veličini. Opcija 2x znači da će slika biti ispisana u dvostruko većoj veličini. Što bi značile opcije 3x i 4x? Navedi primjer. Što misliš, što bi značila opcija 0.5x?*

Primjer 10: Kombinatorni model

Iako se prema trenutno važećem nastavnom planu kombinatorika ne radi na redovnoj nastavi u osnovnoj školi, spomenimo i kombinatorni model prikaza množenja. To je model koji se odnosi na skup prirodnih brojeva i može se obraditi na dodatnoj nastavi kao još jedan primjer za množenje.

Primjer: *U sendvič-baru moguće je birati 3 vrste sendviča (s kulenom, pršutom i vegetarijanski), te 2 vrste priloga (majoneza i ajvar). Koliko je različitih vrsta sendviča moguće dobiti u tom sendvič-baru?*

Kombinatorni model možemo prikazati u obliku Kartezijevog modela i modela stabla. Oba oblika simbolički se mogu prikazati kao uređeni parovi (a, b) svih mogućnosti s elementima iz oba skupa.

Modeli dijeljenja

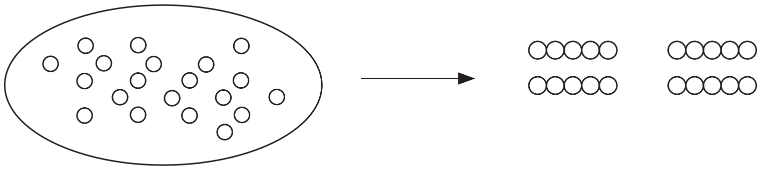
Modeli dijeljenja odnose se na partitivno i mjerno dijeljenje. Detaljnije o dijeljenju u osnovnoj školi i modelima dijeljenja čitatelj može naći u Rudić i Cindrić (2012.).

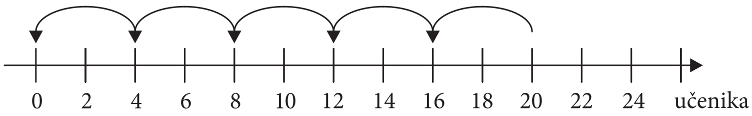
Primjer 11: Partitivno dijeljenje

Kod partitivnog dijeljenja poznata je količina koju treba razdijeliti na jednake dijelove te je poznat i broj dijelova. Primjerice: *Razred od 20 učenika treba podijeliti u četiri ekipe tako da u svakoj ekipi bude jednako mnogo djece. Koliko će članova imati svaka ekipa?*

$$20 : 4 = 5$$

Zamislimo da učitelj dijeli razred u četiri skupine tako da jednog po jednog učenika šalje u skupine. Jednog učenika pošalje u prvu skupinu, drugog u drugu, trećeg u treću, a četvrtog u četvrtu. Sada mu je ostalo $20 - 4 = 16$ učenika s kojima opet ponavlja isti postupak, i tako dalje sve dok ne podijeli cijeli razred. Kod partitivnog dijeljenja znamo na koliko dijelova treba podijeliti zadanu količinu pa takvo dijeljenje možemo prikazati pomoću uzastopnog oduzimanja. Uzastopno oduzimanje može se prikazati na dva modela, skupovnom modelu i modelu brojevnog pravca.





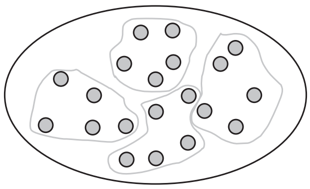
Primjer 12: Mjerno dijeljenje

Kod mjernog dijeljenja poznata je veličina svakog dijela, ali ne i broj jednakih dijelova na koje trebamo razdijeliti zadanu veličinu. Primjer: *Razred od 20 učenika podijeljen je u ekipe tako da je u svakoj ekipi petero djece. Koliko ekipa ima?*

Elemente zadanog skupa dijelimo u podskupove od po 5 elemenata tako da odbrojimo jedan podskup od 5 elemenata, zatim drugi itd. Na kraju gledamo koliko takvih podskupova ima. Mjerno dijeljenje svodi se na model nepoznatog faktora jer se pitamo koliko puta po 5 elemenata treba imati da bismo imali 20 elemenata.

$$20 : ? = 5$$

$$? \cdot 5 = 20$$



Ovo dijeljenje možemo gledati i na brojevnome pravcu, ali sada od 20 učenika oduzimamo po 5 učenika i gledamo koliko takvih skupina ima.

Zaključak

Na prikazanim modelima mogu se ispitivati svojstva računskih operacija u skupu prirodnih brojeva u razrednoj nastavi. Na taj se način, uz slike i konkretan materijal, nastava matematike može pretvoriti u mjesto istraživanja i otkrivanja već od prvog razreda. Da bi se takva nastava pripremila i provela, iznimno je važno da učitelj bude svjestan modela aritmetike i da u skladu s time pažljivo bira primjere i zadatke prilikom pripreme za sat. Autori matematičkih udžbenika trebali bi paziti da bude zastupljeno što više modela kako bi učenik imao iskustvo susresti se s njima i na taj način što bolje usvojiti određeni matematički pojam.

Na kraju valja naglasiti da suvremena nastava matematike ne znači samo korištenje tehnologije ili nekih aktivnosti koje su „u modi", nego više nego ikad zahtijeva i dobre temelje stručnog znanja. U današnjem svijetu u kojem smo bombardirani morem različitih informacija (točnih i netočnih), od nastavnika i učenika prije svega se traži dobro osnovno znanje i kritičko promišljanje o dobivenoj informaciji. Modeli aritmetike u razrednoj nastavi svakako spadaju u osnovna stručna znanja svakog učitelja.

Literatura

1. Glasnović Gracin, D. (2014.) *Prelazak sa zbrajanja prirodnih na zbrajanje cijelih brojeva.* Matematika i škola 75, 202 – 209.
2. Markovac, J. (2001.): *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
3. Padberg, F. (2005.) *Didaktik der Arithmetik: für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. München: Elsevier.
4. Pavlin-Bernardić, N.; Rovan, D.; Vlahović-Štetić, V. (2011.) *Kad u matematici „više" zapravo znači „manje": Analiza uspješnosti u rješavanju problemskih zadataka usporedbe.* Psihologijske teme, 20(2011.), 1, 115 – 130.
5. Rudić, J.; Cindrić, M. (2012.) *Oblici tekstualiziranih zadataka množenja i dijeljenja i dječje strategije rješavanja.* Magistra Iadertina 7(7), 133 – 142.