

# Pojam funkcije u nastavi matematike

## prijedlozi za razmatranje

BORIS ČULINA<sup>1</sup> I SANJA VITALJIĆ<sup>2</sup>

**Ključne riječi:** *pojam funkcije, nastava matematike*

U članku je ukratko opisana važnost pojma funkcije u modernoj matematici, kao i važnost njegova usvajanja u procesu matematičkog obrazovanja. Analizirana je obrada pojma funkcije u našem sustavu obrazovanja u osnovnoj i srednjoj školi, i dan kratak osvrt na visoko obrazovanje. Zaključak je da je pojam funkcije nedovoljno i neadekvatno obrađen, pa su dani prijedlozi za poboljšanje.

Pojam funkcije jedan je od temeljnih matematičkih pojmova, vrlo značajan unutar same matematike kao i u primjeni matematike. Funkcije su bitan element matematičkog strukturiranja i modeliranja problema (npr. operacije u algebarskim strukturama), kao i sredstvo uspoređivanja tako dobivenih struktura (npr. homomorfizmi struktura). Cijele dijelove matematike možemo razumjeti kao aparat za opis funkcija. Tako je teorija grupa u osnovi teorija grupa transformacija nekog skupa, linearna algebra teorija je linearnih funkcija, matematička analiza teorija je neprekidnih, pogotovo derivabilnih funkcija, teorija diferencijalnih jednačbi glavni je praktični način za opis funkcija u prirodi i tehnicima, teorija rekurzija je teorija opisa funkcija na diskretnim strukturama...

Pojam funkcije izražava *ideju preslikavanja* jednih objekata u druge (npr. operacija zbrajanja preslikava dva broja u njihov zbroj), *ideju transformacije* (npr. transformacije geometrijskih likova ili pak transformacije problema), kao i *ideju ovisnosti* jednih veličina o drugima (npr. ovisnost veličina nekog fizikalnog procesa o vremenu). Također, pojam funkcije nosi u sebi *algoritamski sadržaj*, vrlo važan za konstruktivan i programerski pristup rješavanju problema.

Iz svega navedenog slijedi da *funkcijsko razmišljanje daje bitnu dimenziju matematičkom obrazovanju*. Međutim, smatramo da ono nije adekvatno zastupljeno u našem školskom sustavu, niti u osnovnoj školi, niti u srednjoj, niti u visokom obrazovanju.

<sup>1</sup>Boris Čulina, Veleučilište Velika Gorica

<sup>2</sup>Sanja Vitaljić, Druga gimnazija, Split

U Nacionalnom okvirnom kurikulumu stoji

- ▶ za osnovnu školu:
  - prikazati jednostavnu ovisnost dviju veličina (linearna, čista kvadratna, drugi korijen) riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, formulom i grafički;
- ▶ za strukovne škole:
  - opisati i izvesti jednostavne ovisnosti (veze) dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima,
  - prepoznati i protumačiti karakteristična svojstva jednostavnih grafova (monotonost, periodičnost) i njihove karakteristične točke (nultočke, ekstremi, točke važne za određenu situaciju), te uspoređivati jednostavne grafove;
- ▶ za gimnazije dodatno:
  - prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabiti njihova svojstva,
  - primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu.

Međutim, smatramo da

- ▶ *navedeni sadržaji nisu dovoljni:*
  - proučavani skup funkcija koje povezuju realne brojeve previše je ograničen i nije dovoljno povezan s nastavom u drugim predmetima, pogotovo fizici i informatici,
  - ne koristi se jednostavan program za crtanje i ispitivanje svojstava funkcija kojima se na jednostavan način može proširiti skup funkcija koje se mogu ispitivati i pomoću kojih se može modelirati širok raspon problema,
  - nedovoljno su obrađena geometrijska preslikavanja na kojima se mogu vizualno predstaviti mnoga svojstva funkcija i koja mogu pomoći u boljem razumijevanju geometrije i efikasnijem modeliranju i rješavanju geometrijskih problema,
  - uopće se ne proučavaju funkcije izvan brojeva i geometrije, čime se uvelike ograničava razumijevanje pojma funkcije, a i prirode matematike.
- ▶ *navedeni sadržaji prekasno se i nepostupno uvode:*
  - do sedmoga razreda pojam funkcije gotovo uopće nije prisutan,
  - u srednjoj se školi pojam funkcije temeljitije obrađuje tek u 4. razredu, dakle na kraju umjesto na početku jednog ciklusa obrazovanja u kojemu je taj pojam itekako važan,
  - u visokoškolskom obrazovanju pojam funkcije u punoj se širini uglavnom uvodi (ako se uopće uvodi) na višim godinama, u okviru predmeta *Diskretna matematika* (?), dakle opet na kraju umjesto na početku jednog ciklusa obrazovanja koji se gotovo cijeli zasniva na ispitivanju funkcija kojima se modeliraju pojave iz domene struke za koju se studenti obrazuju.

Pogotovo ključnom smatramo primjedbu da se sadržaji vezani uz pojam funkcije prekasno i nepostupno uvode. Parafraziramo osnovnu misao iz knjige W. Servaisa, T. Varge *Teaching School Mathematics*, A Unesco Source Book, 1971.: *Pravo pitanje nije na kojoj razini uvesti pojam funkcije, nego što od pojma funkcije uvesti na danoj razini obrazovanja*. Isto vrijedi i za svaki drugi temeljni matematički pojam. Prekasno uvođenje može jednako štetiti kao i prerano uvođenje. A svakako je štetno ako se pojam ne uvodi postupno, kroz sve cikluse obrazovanja, nego „u komadu”, u jednom dijelu obrazovanja. U daljnjem su tekstu skicirani neki prijedlozi za šire i uravnoteženije uvođenje pojma funkcije nego što je danas slučaj.

**Od prvog do četvrtog razreda.** Mada su brojevi i geometrija važni, smatramo pogrešnim ograničavanje matematike samo na ova područja. Smatramo da na toj razini obrazovanja nedostaje razvijanje osjećaja za matematičko modeliranje jednostavnih životnih situacija pomoću pojma skupa, relacije i funkcije – nešto primjerenom od moderne matematike koja se u jednom periodu htjela uvesti u nastavu matematike (što se nekada pretjerano glorificiralo, a danas se pretjerano demonizira). U svakodnevnom dječjem svijetu sve je puno skupova, relacija i funkcija koje se mogu jednostavno grafički prikazati. Tako djeca uče, koristeći te pojmove, strukturirati konkretne situacije, apstrahirati iz njih ono bitno za temu kojom se bave i to grafički prikazati, a što je sve skupa jedna vrlo bitna i univerzalna matematička vještina. Evo jednog konkretnog primjera: analiziranje rodbinskih odnosa u jednoj obitelji. Radi jednostavnosti, ovdje je grafički navedena mala skupina u kojoj svatko pokazuje svoga tatu, dakle grafički je prikazana funkcija  $x \mapsto \text{tata}(x)$ :



Ne znajući ništa drugo o ovoj obitelji, djeca mogu odgovoriti na pitanje tipa *tko je Brunov tata, tko je ovdje djed, tko je brat* itd. Naravno, još je zanimljivije ako strelicama druge boje predstavimo drugu funkciju ili relaciju. Na isti bismo način mogli predstaviti i funkcije s brojevima (npr. funkciju *dodaj 2*) i likovima (npr. *okreni lik naopačke*).

**Od petog do šestog razreda.** U ovom bi se ciklusu funkcije već mogle simbolički i računski gledati. Evo nekih prijedloga:

- ▶ U prethodnom bi se primjeru mogle uvesti oznake za funkcije, npr.  $T(x)$  za *tata od x* i  $M(x)$  za *mama od x*, i računati npr.  $T(T(\text{Ana}))$  ili rješavati jednačbu npr.  $T(x) = \text{Dinko}$ .
- ▶ Valjalo bi koristiti oznake koje ističu prisustvo funkcije u računanju s brojevima, npr. za zbrajanje:  $3, 5 \mapsto 3 + 5$ , ili za duljinu dužine:  $AB \mapsto |AB|$ .

- Jednostavan primjer funkcija su transformacije riječi. Npr. sljedeće funkcije *rade* s riječima:

Funkcija O obrće riječ, npr.  $O(\text{„TOMO”}) = \text{„OMOT”}$

Funkcija MN slovo *M* mijenja u *N*, npr.  $MN(\text{„SEDAM”}) = \text{„SEDAN”}$

Funkcija A sve samoglasnike pretvara u A, npr.  $A(\text{„LULA”}) = \text{„LALA”}$

Izračunaj:

$MN(\text{„NE ZNAM”})$

$A(O(\text{„AMOS”}))$

$O(MN(A(\text{„SEMINA”})))$

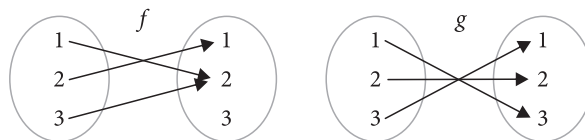
Za svaku od navedenih funkcija nađi riječ koju ona ne mijenja, tj riješi jednadžbu  $f(x) = x$ .

Nađi suprotnu funkciju od funkcije MN. A od funkcije A?. Nađi funkciju koja je sama sebi suprotna, itd.

Na transformacije s riječima može se nadovezati šifriranje, npr. Cezarova šifra kod koje se svako slovo zamijeni slovom koje se u alfabetu za određen broj slova (ključ šifre) nalazi desno od njega (pri čemu zamišljamo da su slova alfabeta poređana u krug, tako da iza slova Ž dolazi slovo A). Tako riječ ZLATO kod šifriranja s ključem 3 prelazi u šifriranu riječ BODS. Dešifriramo, naravno, suprotnom transformacijom s riječima (slovo se zamijeni slovom koje je za tri slova ulijevo). Da bi šifriranje i dešifriranje funkcioniralo, funkcija šifriranja ne smije razne tekstove prebaciti u isti tekst, tj. mora biti injektivna funkcija.

Na ovim jednostavnim transformacijama teksta učenik se može upoznati s pojmovima kompozicije funkcija, injektivnošću i surjektivnošću funkcija, domene i skupa vrijednosti funkcija, a da mu se ti pojmovi ne trebaju eksplicitno spominjati.

- Rad s *malim* funkcijama. Takve funkcije možemo zadati dijagramima, npr.



Sad se možemo pitati jesu li funkcije totalne, injekcije, surjekcije, bijekcije, nalaziti inverze, komponirati ih (možda ne koristiti ove riječi nego svakodnevne riječi tipa „možemo li na izlaz funkcije *f* dobiti broj 3” i sl.).

- Učeniku valja razviti spoznaju da se iza svake formule po kojoj računa (ili programa koji piše na satu informatike) nalazi odgovarajuća funkcija *f*. Kad računa prema formuli  $2x + 3$ , svakom broju *x* pridružuje broj  $f(x) = 2x + 3$ . Kad računa površinu pravokutnika prema formuli  $p = a \cdot b$ , on računa funkciju koja izražava ovisnost površine o duljinama stranica:  $a, b \mapsto p(a, b) = a \cdot b$ . Isto tako, svaka strana jed-

nadžbe zadaje funkciju. Rješenje jednadžbe je broj za koji obje funkcije na izlazu daju isti broj. Npr. lijeva i desna strana jednadžbe  $2x + 3 = 6 - x$  određuju funkcije  $L(x) = 2x + 3$  i  $D(x) = 6 - x$ . Rješenje je broj (u ovom slučaju 1) za koji, kad primijenimo ove funkcije, dobijemo isti rezultat.

**Od sedmog do osmog razreda.** Sada se javljaju *velike* funkcije koje preslikavaju realne brojeve u realne brojeve. U tom je ciklusu pojam funkcije, smatramo, dobro zastupljen, pogotovo zato što dolazi do korelacije s predmetom fizika. Međutim, smatramo da bi trebalo napraviti isto tako dobru korelaciju s predmetom informatika (recimo uvođenjem raznih tekstualnih kodiranja i šifriranja), kao i koristiti program za grafičko predstavljanje funkcija u sklopu općeg korištenja programa u rješavanju matematičkih problema. Evo nekih konkretnijih prijedloga:

- ▶ Funkcije kvadriranja i korjenovanja, zajedno s njihovim grafovima, u 8. se razredu uvode tek na kraju cjeline o kvadriranju i korjenovanju brojeva. Bilo bi puno bolje da se uvedu ranije, te da se koriste njihovi grafovi u boljem razumijevanju tih operacija, npr. da učenici nauče čitati iz grafova da kvadriranje raste puno brže od direktne proporcionalnosti, da se kvadriranjem mogu dobiti samo nenegativni brojevi, da za svaki pozitivan broj postoje dva međusobno suprotna broja kojima je on kvadrat, da je korjenovanje suprotna operacija od kvadriranja nenegativnih brojeva, itd.
- ▶ Korištenjem odgovarajućeg programa mogu se gotovo sve funkcije prikazati grafički i na grafovima ispitivati njihova svojstva. Time nestaje današnje ograničenje na ispitivanja samo linearnih funkcija (i nešto malo obrnute proporcionalnosti, kvadratne i korijenske funkcije). Npr. može se grafički nacrtati i na osnovi grafa ispitivati razna nejednolika gibanja, ili pak uspoređivati funkcije  $\frac{1}{x}$  i  $\frac{1}{x^2}$ . Npr. za velike  $x$  vrijednosti druge funkcije postaju puno manje od vrijednosti prve funkcije. Po drugoj funkciji opada s udaljenošću stacionarno električno i magnetsko polje električnih vodova, pa je njihov utjecaj već na manjim udaljenostima zane-mariv. Nasuprot tome, po prvoj funkciji opada jakost elektromagnetskih polja, pa je njihov utjecaj izrazit i na većim udaljenostima, što je fizikalna osnova cjelokupne telekomunikacije. Crtanje grafova funkcija pomoću odgovarajućeg programa i razvijanje umijeća čitanja svojstava funkcija iz tako dobivenih grafova daje učenicima moćan aparat za kvalitativno razumijevanje cijelog spektra pojava.
- ▶ U osmom se razredu tema o geometrijskim preslikavanjima može nadopuniti dodatnim razumijevanjem funkcijskih pojmova, pogotovo zato što taj dio gradiva može lijepo korelirati s grafičkim programom koji se koristi u predmetu informatika (npr. grafika kornjače). U slikovitom okruženju mogu se još jednom utvrditi važna svojstva funkcija (injektivnost, inverzna operacija, kompozicija funkcija). Isto tako pojam funkcije može se iskoristiti za bolje razumijevanje vrlo važnog pojma simetrije koji se ovdje javlja u obliku simetrija likova, funkcija koje lik preslikavaju u njega samog.

**Srednja škola.** Tijekom cijelog srednjoškolskog obrazovanja gimnazijskog opsega pojam funkcije obrađuje se približno 117 od 384 sati, što iznosi 30 % sati ukupne nastave matematike. Usprkos tako velikom postotku smatramo da upravo u srednjoškolskom obrazovanju treba napraviti korijenite izmjene u obradi pojma funkcije. Naime, realniju sliku sadašnjeg stanja dobit ćemo ako ukratko pogledamo obrađeni sadržaj i njegovu zastupljenost po razredima. Pojam funkcije koristi se u prvom razredu pri obradi linearne funkcije (približno 6 od 105 sati, tj. cca 6 %), u drugom razredu pri obradi kvadratne, eksponencijalne, logaritamske funkcije i trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta (približno 38 od 105 sati, tj. cca 36 %), u trećem pri obradi trigonometrijskih funkcija (približno 31 od 105 sati, tj. cca 30 %) i konačno u četvrtom: domena, inverz, kompozicija, tijek (42 od 96 sati, tj. cca 44 %). Iz ovog kratkog pregleda vidimo da se obrađeni sadržaj prije svega odnosi na konkretne funkcije, a opći pojmovi dolaze tek na kraju ovog ciklusa, umjesto da su uvedeni na početku i tijekom ovog ciklusa. Na taj način učenicima u cijelom srednjoškolskom obrazovanju ostaje nedostupno opće razumijevanje pojma funkcije i osnovnih svojstava funkcija, jedan moćan aparat pomoću kojeg bi, s jedne strane, bolje i efikasnije usvojili konkretne funkcije, a s druge strane koji bi mogli efikasno ukomponirati u ostale matematičke sadržaje. Međutim, za neke je zahvate možda kasno – tako je s pojmom funkcije u srednjoj školi. Naš je osnovni stav da *osnovne pojmove o funkciji i njenim svojstvima treba uvesti u primjerenom formi strogosti već u prvom razredu, upotrebljavati i nadopunjavati te pojmove kroz cijelo srednjoškolsko obrazovanje, te ih eventualno u četvrtom razredu obraditi kraće i u nešto striktnijoj formi.* Evo nekih prijedloga kako to učiniti:

- ▶ **Prvi razred.** Smatramo da na početku prvog razreda srednje škole nedostaje jedan modul koji bi s jedne strane omogućio učeniku blaži prijelaz iz osnovnoškolske u srednjoškolsku matematiku, a s druge bi bio osnova na kojoj bi učenici usvojili srednjoškolsku matematiku s više razumijevanja i efikasnije. Najbolja potvrda da danas postoji veliki jaz u tom prijelazu jest činjenica da većina đaka upravo u prvom razredu srednje škole ima najviše problema u usvajanju matematike. Umjesto iscrpljujućeg, nemotivirajućeg i nezanimljivog rješavanja glomaznih algebarskih izraza i jednadžbi, trebao bi se uvesti modul u kojemu bi se na jedan nešto zreliji način nego u osnovnoj školi i s većim naglaskom na razumijevanje nego na računске postupke ponovila osnovna svojstva brojeva i svo bogatstvo matematičkog jezika – simbolizacija, varijable, aritmetički izrazi, algebarski izrazi, jednadžbe, nejednadžbe, skupovi i funkcije. I sve to na jednom rudimentarnom nivou i na jednostavnim primjerima koji ne zahtijevaju neko veliko računanje i domišljanje, nego samo potiču na razumijevanje tih pojmova. Što se pojma funkcije tiče, važno je nadovezati se na započeto u osnovnoj školi u razumijevanju općih pojmova: načinima zadavanja funkcije, jednoznačnosti funkcije, neovisnosti o načinu zadavanja, te domeni i skupu vrijednosti funkcije. Kad su funkcije zadane formulom, ta svojstva uglavnom je teško ispitati i to se može ostaviti za četvrti razred. Međutim, za funkcije zadane grafički svi ti pojmovi imaju jednostavnu geometrijsku interpretaciju i lako ih je ispitati. Pri tome valja koristiti, ako je tehnički izvedivo,

i jednostavan matematički program koji će dati grafički prikaz funkcije koja je zadana formulom. Efekt usvajanja ovog pojma učenik može odmah osjetiti u daljnjem školovanju:

- **Primjena na jednadžbe.** Osnovno pravilo rješavanja jednadžbi „s obje strane jednadžbe učini isto” je primjena odgovarajuće funkcije na obje strane jednadžbe. Drugo osnovno pravilo, princip suprotne operacije, koji kaže da kad želimo eliminirati neku operaciju u jednadžbi (npr. dodavanje broja 3) trebamo na obje strane jednadžbe primijeniti suprotnu operaciju (oduzeti broj 3), direktno se realizira pojmom inverzne (suprotne) funkcije. Tako se u kontekstu rješavanja jednadžbi prirodno može motivirati i objasniti pojam inverzne funkcije. Pitanje postojanja inverzne funkcije lako se može ispitati na njenom grafu. Razumijevajući postupak rješavanja jednadžbi kao niz primjena funkcija na obje strane jednadžbe, može se objasniti puno situacija vezanih za logiku rješavanja jednadžbi. Npr. svojstva primijenjenih funkcija objašnjavaju zašto se ponekad izgube rješenja (za neke izbore nepoznanice strane jednadžbe ne pripadaju domeni funkcije), a ponekad se dobije i višak rješenja (funkcija nije injektivna). Nadalje, pojam funkcije omogućava učeniku da uz pomoć programa za crtanje grafa funkcije kvalitativno riješi gotovo bilo koju jednadžbu. Prebacivši sve članove jednadžbe na jednu stranu, dobit će jednadžbu oblika  $f(x) = 0$ . Rješenje jednadžbe je tako nultočka funkcije  $f$ . Pomoću programa nacrtat će graf funkcije  $f$  i iz grafa kvalitativno odrediti nultočke funkcije (zajedničke točke grafa funkcije i  $x$  – osi).
- **Primjena na nejednadžbe.** Na obje strane nejednadžbe možemo primijeniti samo monotone operacije, što direktno vodi pojmu monotonosti (na intervalu) funkcije. Ovo svojstvo također se lako može ispitati na grafu funkcije. Nadalje, pojam funkcije omogućava učeniku da uz pomoć programa za crtanje grafa funkcije kvalitativno riješi gotovo bilo koju nejednadžbu. Prebacivši sve članove nejednadžbe na jednu stranu, dobit će nejednadžbu oblika npr.  $f(x) > 0$ . Pomoću programa nacrtat će graf funkcije  $f$  i iz grafa kvalitativno odrediti sve brojeve na  $x$  osi za koje je graf funkcije poviše  $x$  – osi. Upravo su oni rješenja nejednadžbe.
- **Primjena na uvođenje novih funkcija.** S usvojenim osnovnim pojmovima mogu se bolje i efikasnije uvesti ostale funkcije u prvom razredu – apsolutna vrijednost, potencije i korijeni.
- **Veza s geometrijom.** U dijelu gradiva posvećenog prvo sukladnosti, a poslije sličnosti, može se koristiti pojam kompozicije funkcija kao i inverzne funkcije. Npr. svaka transformacija sličnosti je kompozicija homotetije i izometrije. Izometrije, a isto tako i sličnosti, tvore grupu u odnosu na kompoziciju funkcija. Djelujući na likove, te grupe ih klasificiraju u klase međusobno sukladnih (za grupu izometrija) odnosno sličnih likova (za grupu sličnosti). Na ovaj način učenici stječu ispravno razumijevanje pojmova sukladnosti i sličnosti u punoj

njihovoj općenitosti. Naravno, ovo je matematički okvir, a u kojoj mjeri i kojim riječima to prenijeti učenicima – ostaje za diskusiju.

- **Korelacija s ostalim predmetima.** Razumijevanjem općeg pojma funkcije i ispitivanjem svojstava funkcije na njenom grafu učenik je matematički pripremljen za razumijevanje raznovrsnih s-t, v-t i F-s dijagrama koji su (s pravom) prisutni u nastavi fizike u prvom razredu, a isto tako i p-V, V-T i p-T dijagrama u drugom razredu. S druge strane, upravo ti primjeri iz fizike pojačavaju njegovo razumijevanje općeg pojma funkcije. Isto tako, razumijevanjem općeg pojma funkcije učenik je matematički pripremljen i za programiranje, jer svaki program realizira jednu funkciju koja prebacuje ulaz u program u izlaz iz programa. U suprotnom smjeru, programiranje mu također ojačava razumijevanje pojma funkcije, pogotovo algoritamski aspekt njene realizacije.

Smatramo da se prostor za ovaj modul može dobiti izbacivanjem sadržaja koji su nepotrebni, rekli bismo i nepotrebno opterećujući za učenika na ovoj razini obrazovanja. Smatramo da treba izbaciti rješavanje složenijih aritmetičkih i algebarskih izraza, analitičko rješavanje složenijih jednadžbi, ograničiti analitičko rješavanje nejednadžbi na jednostavnije primjere, ograničiti analitičko rješavanje jednadžbi i nejednadžbi s apsolutnim vrijednostima, ograničiti računanje aritmetičkih i algebarskih izraza s višim korijenima, ograničiti analitičko rješavanje složenijih iracionalnih jednadžbi, izbaciti dijeljenje polinoma, ograničiti geometrijske konstrukcije, izbaciti tetivni i tangencijalni četverokut... Većina onoga što treba izbaciti javlja se u matematici jedino u udžbenicima iz matematike.

#### ► Drugi razred.

- U drugom se razredu usvojeni opći funkcijski pojmovnik može uspješno primijeniti na jednostavnije i bolje usvajanje kvadratnih, polinomnih, eksponencijalnih, logaritamskih i trigonometrijskih funkcija, te na rješavanje pripadnih jednadžbi i nejednadžbi. Takav pristup omogućuje jednostavnije i bolje razumijevanje ovih tema.
- Na primjeru eksponencijalnih i logaritamskih funkcija može se ojačati pojam inverznih funkcija i ujedno postići bolje razumijevanje veze ovih funkcija i njihovih svojstava.

#### ► Treći razred.

- U trećem se razredu usvojeni opći funkcijski pojmovnik može uspješno primijeniti na jednostavnije i bolje usvajanje trigonometrijskih i njima inverznih funkcija. U definiciji trigonometrijskih funkcija koristi se komponiranje geometrijskih i brojevnih funkcija. Također, ovdje se prirodno uvodi svojstvo periodičnosti funkcije.



- U analitičkoj bi se geometriji trebao uvesti analitički prikaz geometrijskih transformacija, barem translacija, projekcija i zrcaljenja, ako već ne i rotacija, pomoću kojih bi se sve transformacije mogle računati. Ovo gradivo izravno je povezano s računalnom grafikom i priprema je za geometrijsko razumijevanje matrica, ako ne u srednjoškolskom obrazovanju, onda poslije u visokoškolskom obrazovanju. Prostora za uvođenje ovog dijela ima jer smatramo da je trigonometrija ionako previše zastupljena. Prema riječima poznatog matematičara J. Dieudonnea, većina trigonometrijskog sadržaja nužna je samo za tri zanimanja: astronome, geode te i pisce trigonometrijskih udžbenika.
- ▶ **Četvrti razred.** Ovdje modul o funkcijama može zadržati svoje mjesto. U predloženim promjenama, osim razumijevanja općeg pojma funkcije i raznih svojstava funkcija, svojstva funkcije se prije svega ispituju na grafovima funkcija. Sad, kad su ti pojmovi usvojeni u jednostavnom kontekstu, oni se mogu ispitivati i na formulama kojima su zadane funkcije, što je preciznije ali i puno teže.

**Visokoškolsko obrazovanje.** Ovdje ćemo dati samo kratak osvrt. Na ovoj razini obrazovanja nema čvrstih programa. Međutim, smatramo da se i tu prekasno uvodi pojam funkcije, obično na kasnijim godinama u okviru predmeta *Diskretna matematika*, umjesto odmah na početku, zajedno s ostalim temeljnim matematičkim pojmovima. Prema našem mišljenju, na prvoj godini nedostaje predmet tipa nekadašnjih predmeta s nazivom *Uvod u matematiku* koji bi studentu dao jedan širi i zasnovaniji pogled na cjelokupnu matematiku prije nego se posveti studiranju specijalnijih područja.

### Literatura:

1. *Nacionalni okvirni kurikulum*, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta RH, Zagreb, 2011.
2. W. Servais, T. Varga: *Teaching School Mathematics*, A Unesco Source Book, 1971.