Rješavanje jednadžbi pomoću poznatih nejednakosti

Šefket Arslanagić[1]

Rješavanje raznih vrsta jednadžbi za većinu je učenika oduvijek bio zanimljiv i drag posao. No, ako se radi o npr. iracionalnim jednadžbama, to može za učenike (pa i studente) predstavljati problem jer se nakon oslobađanja od korijena dobije jednadžba višeg stupnja koju nije lako riješiti. U ovome članku ćemo pokazati kako se korištenjem poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva ili više pozitivnih brojeva, rješavanje takvih „nezgodnih" jednadžbi prilično pojednostavni. To ćemo demonstrirati kroz više raznih primjera.

Primjer 1. Riješimo jednadžbu

$$\frac{x^2+13x+4}{x+2}=6\sqrt{x}.$$

Rješenje: Očigledno mora biti $x\geq 0$. Najprije ćemo dati uobičajeno rješenje. Uvest ćemo zamjenu $\sqrt{x}=t;\ t\geq 0$. Dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$\begin{aligned}
&t^4+13t^2+4=6t\left(t^2+2\right)\\
&\Leftrightarrow t^4-6t^3+13t^2-12t+4=0\\
&\Leftrightarrow \left(t^2-2t+1\right)\left(t^2-4t+4\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(t-1\right)^2\left(t-2\right)^2=0, \text{ a odavde}
\end{aligned}$$

$$t-1=0\ \vee\ t-2=0\text{ , tj.}$$

$$t=1\ \vee\ t=2\text{ ,}$$

odnosno

$$x_1=1\ \vee\ x_2=4\text{ .}$$

Sada ćemo dati rješenje za koje ćemo koristiti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine $\left(A\geq G\right)$ za dva pozitivna broja:

[1]Dr. Šefket Arslanagić, Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, B i H

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab};\ (a,b>0) \tag{1}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b$.

Koristeći (1) dobivamo:

$$\frac{x^2+13x+4}{x+2} = \frac{\left(x^2+4x+4\right)+9x}{x+2} = \frac{(x+2)^2}{x+2} + \frac{9x}{x+2} =$$

$$= (x+2) + \frac{9x}{x+2} \geq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{9x}{x+2}} = 6\sqrt{x},$$

gdje se jednakost dostiže ako je $x+2=\dfrac{9x}{x+2}$, tj. ako je

$(x+2)^2 = 9x \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0$, a odavde $x_1=1,\ x_2=4$.

Primjer 2. Riješimo jednadžbu

$$\sqrt[4]{2x-1} = \frac{x^2+3}{4}.$$

Rješenje: Mora biti $2x-1 \geq 0$, tj. $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Imamo

$$\sqrt[4]{2x-1} = \frac{x^2+3}{4} /^4$$

$$\Leftrightarrow 256(2x-1) = \left(x^2+3\right)^4$$

$$\Leftrightarrow 512x-256 = \left(x^4+6x^2+9\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 512x-256 = x^8+36x^4+81+12x^6+18x^4+108x^2$$

$$\Leftrightarrow x^8+12x^6+54x^4+108x^2-512x+337=0.$$

Koristeći Hornerovu shemu dobivamo:

1	1	0	12	0	54	0	108	-512	337
1	1	1	13	13	67	67	175	-337	0
	1	2	15	28	95	162	337	0	

Dakle, $x = 1$ dvostruko je rješenje gornje jednadžbe pa imamo:

$$(x-1)^2\left(x^6+2x^5+15x^4+28x^3+95x^2+162x+337\right)=0.$$

Zbog $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ imamo samo jedno rješenje dane jednadžbe $x = 1$.

Primjer 3. Riješimo jednadžbu

$$\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}=x^2+x+1.$$

Rješenje: Mora biti $x^3+1\geq 0$ i $x^3-1\geq 0$, odnosno $\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\geq 0$ i $\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\geq 0$, a odavde je $x\in\left[1,+\infty\right)$. Nakon kvadriranja dane jednadžbe dobivamo:

$$\begin{aligned}&x^3+1+2\sqrt{x^3+1}\cdot\sqrt{x^3-1}+x^3-1=\left(x^2+x+1\right)^2\\&\Leftrightarrow 2x^3+2\sqrt{x^6-1}=x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x\\&\Leftrightarrow 2\sqrt{x^6-1}=x^4+3x^2+2x+1\,,\end{aligned}$$

a odavde nakon kvadriranja:

$$\begin{aligned}&4\left(x^6-1\right)=x^8+9x^4+4x^2+1+6x^6+4x^5+2x^4+12x^3+6x^2+4x\\&\Leftrightarrow x^8+2x^6+4x^5+11x^4+12x^3+10x^2+4x+4=0,\end{aligned}$$

a ova jednadžba zbog $x\in\left[1,+\infty\right)$ očigledno nema rješenja u skupu realnih brojeva.

Sada ćemo dati mnogo elegantnije rješenje za koje se koristi nejednakost (1).

Na osnovi nejednakosti (1) imamo:

$$\sqrt{x^3+1}=\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}\leq\frac{\left(x+1\right)+\left(x^2-x+1\right)}{2}=\frac{x^2+2}{2},$$

te

$$\sqrt{x^3-1}=\sqrt{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}\leq\frac{\left(x-1\right)+\left(x^2+x+1\right)}{2}=\frac{x^2+2x}{2}.$$

Sada za lijevu stranu dane jednadžbe imamo ocjenu:

$$\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\leq x^2+x+1.$$

Dana jednadžba zadovoljena je kada u gornjoj ocjeni vrijedi jednakost. To je moguće ako istodobno vrijedi:

$$x+1=x^2-x+1 \text{ i } x-1=x^2+x+1\text{, tj.}$$

$$x^2-2x=0 \text{ i } x^2+2=0\,,$$

a ove posljednje dvije jednadžbe nemaju zajedničko rješenje ni za jedno $x\in\mathbb{R}$. Dakle, dana jednadžba nema rješenja u skupu $\mathbb{R}$.

Primjer 4. Riješimo jednadžbu

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=x^2-x+2\,.$$

Rješenje: Mora biti $x^2+x-1\geq 0$ i $x-x\quad +1\geq 0$, tj.

$x\in\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ te $x\in\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, a odavde

$x\in\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Na osnovi nejednakosti (1) dobivamo:

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x-x^2+1}=\sqrt{\left(x^2+x-1\right)\cdot 1}+\sqrt{\left(x-x^2+1\right)\cdot 1}\leq\frac{x^2+x-1+1}{2}+\frac{x-x^2+1+1}{2}=x+1.$$

Jednakost vrijedi ako je $x^2+x-1=x-x^2+1$, a odavde $x^2=1$, tj. $x=1$. Ali, za $x=1$ vrijedi $x+1=x^2-x+2$. Dakle, dana jednadžba ima rješenje $x=1$.

Sada ćemo dati ono uobičajeno „dugo" rješenje za koje nećemo koristiti nejednakost (1).

Nakon kvadriranja dane jednadžbe (uz uvjet $x\in\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, a $x^2-x+2>0\ \left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$) dobivamo:

$$x^2+x-1+2\sqrt{\left(x^2+x-1\right)\left(x-x^2+1\right)}+x-x^2+1=x^4+x^2+4-2x^3+4x^2-4x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-\left(x^2-1\right)^2}=x^4+x^2+4-2x^3+4x^2-6x\,\Big/^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(-x^4+3x^2-1\right)=\left(x^4-2x^3+5x^2-6x+4\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(-x^4+3x^2-1\right)=x^8+4x^6+25x^4+36x^2+16-4x^7+10x^6-12x^5$$
$$+8x^4-20x^5+24x^4-16x^3-60x^3+40x^2-48x$$

$$\Leftrightarrow x^8-4x^7+14x^6-32x^5+61x^4-76x^3+64x^2-48x+20=0.$$

Na osnovi Hornerove sheme imamo:

1	1	-4	14	-32	61	-76	64	-48	20
1	1	-3	11	-21	40	-36	28	-20	0
	1	-2	9	-12	28	-8	20	0	

a odavde

$$x^8-4x^7+14x^6-32x^5+61x^4-76x^3+64x^2-48x+20=$$
$$=\left(x-1\right)^2\left(x^6-2x^5+9x^4-12x^3+28x^2-8x+20\right)=0$$
$$\Rightarrow x=1$$

(jer je $x^6-2x^5+9x^4-12x^3+28x^2-8x+20=\left(x^6+9x^4+28x^2+20\right)-\left(2x^5+12x^3+8x\right)>0$,
za sve $x\in\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$).

Dakle, rješenje dane jednadžbe je $x = 1$.

Sigurno ćemo se složiti da je ovo drugo rješenje kudikamo „napornije" od onog prvog.

Primjer 5. Riješimo jednadžbu

$$\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}=1.$$

Rješenje: Mora biti $9-x^2\geq 0$ i $3-\sqrt{9-x^2}\neq 0$, tj. $x\in\left[-3,3\right]$ i $x\neq 0$, te $x\in\left[-3,0\right)\cup\left(0,3\right]$. Dat ćemo prvo uobičajeno rješenje. Nakon racionaliziranja obaju nazivnika u danoj jednadžbi, dobivamo ekvivalentnu jednadžbu:

$$\frac{x^2\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}{x^2}+\frac{3+\sqrt{9-x^2}}{4x^2}=1$$
$$\Leftrightarrow 4x^2\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)+3+\sqrt{9-x^2}=4x^2$$
$$\Leftrightarrow 8x^2+3=\left(4x^2-1\right)\sqrt{9-x^2}\ ,$$

a odavde, nakon kvadriranja, uz uvjet da je $4x^2-1>0$, tj. $|x|>\frac{1}{2}$ ili
$x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$:

$$64x^4+48x^2+9=\left(4x^2-1\right)^2\left(9-x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 64x^4+48x^2+9=\left(16x^4-8x^2+1\right)\left(9-x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 16x^6-88x^4+121x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(16x^4-88x^2+121\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(4x^2-11\right)^2=0,$$

a odavde, zbog $x\neq 0$,

$$4x^2 - 11 = 0, \text{ tj.}$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Sada ćemo dati kraće rješenje za koje ćemo koristiti nejednakost (1). Na osnovi (1) imamo:

$$\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}\geq\sqrt{\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}\cdot\frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}}=1.$$

Ovdje jednakost vrijedi ako je:

$$\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}$$
$$\Leftrightarrow 3-\sqrt{9-x^2}=\frac{1}{4\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \left(3-\sqrt{9-x^2}\right)^2=\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 3-\sqrt{9-x^2}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}=\sqrt{9-x^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{25}{4}=9-x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{11}{4},\text{ tj.}$$
$$x=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Primjer 6. Riješimo sustav jednadžbi

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2,\\ x+y=12.\end{cases}$$

Rješenje: Mora biti $\frac{2x-1}{y+2}>0$. Prvo rješenje je uobičajeno; uvodimo zamjenu $\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}=t;\ (t>0)$. Iz prve jednadžbe danog sustava dobivamo:

$$t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow t^2-2t+1=0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)^2=0,\text{ tj.}$$
$$t=1,$$

a odavde

$$\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}=1\text{, tj.}$$

$$2x-1=y+2,$$

a odavde

$$2x-y=3.$$

Sada iz sustava jednadžbi

$$\begin{cases}2x-y=3\\x+y=12,\end{cases}$$

dobivamo rješenje $x = 5$, $y = 7$.

Drugo rješenje zasniva se na nejednakosti (1), pa dobivamo:

$$\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}\geq 2\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}\cdot\frac{y+2}{2x-1}}\text{, tj.}$$

$$\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}\geq 2,$$

gdje vrijedi jednakost ako je:

$$\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}=\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}\text{, tj.}$$

$$\frac{2x-1}{y+2}=\frac{y+2}{2x-1},$$

te

$$(2x-1)^2=(y+2)^2\text{, tj.}$$

$$|2x-1|=|y+2|,$$

odnosno zbog $x + y = 12$:

$$|2x-1|=|14-x|.$$

Ova jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = -13$ i $x_2 = 5$, te $y_1 = 25$ i $y_2 = 7$. Rješenje $(x, y) = (-13, 25)$ ne zadovoljava dani sustav, dok je rješenje $(x, y) = (5, 7)$ ispravno.

Primjer 7. Riješimo jednadžbu s dvije nepoznanice:

$$x^4+y^4=2xy-\frac{1}{2},$$

gdje $x, y \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Na osnovi nejednakosti (1) imamo:

$$\frac{x^4+y^4}{2} \geq \sqrt{x^4 \cdot y^4}\ \text{, tj.}$$

$$x^4+y^4 \geq 2x^2y^2\ . \tag{2}$$

Kako je

$$2x^2y^2 \geq 2xy-\frac{1}{2} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2y^2-4xy+1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2xy-1)^2 \geq 0,$$

to iz (2) i (3) slijedi:

$$x^4+y^4 \geq 2xy-\frac{1}{2},$$

gdje vrijedi jednakost ako je $x^4=y^4$ i $2xy=1$, a odavde

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ \text{tj.}\ \ (x,y)\in\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Preporučujemo da sami riješite sljedeće jednadžbe koristeći nejednakost (1):

1. $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=3$; (Rj. $x=0$).
2. $\dfrac{x+1}{2x-3}+\dfrac{x-3}{3x-2}=2\sqrt{\dfrac{x^2-2x-3}{6x^2-13x+6}}$; (Rj. $x=-11$).
3. $\sqrt{1-x^8}+\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^4}=3$; (Rj. $x=0$).
4. $\dfrac{3+3x^4}{x^2}+\dfrac{6\sqrt[3]{y+2}\cdot(y+2)+6}{\sqrt[3]{(y+2)^2}}=18$; (Rj. $(x,y)\in\{(1,-1),(-1,-1),(1,-3),(-1,-3)\}$).
5. $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{x}}=xy \\ x^a+y^a=8(xy)^{\frac{a-3}{2}};(a\in\mathbb{R}), \end{cases}$ (Rj. $x=y=\sqrt[3]{4}$.)
6. Za koje $a\in\mathbb{R}$ jednadžba

$$\left(\sqrt{x^2-2ax+7}+\sqrt{x^2-2ax+5}\right)^x+\left(\sqrt{x^2-2ax+7}-\sqrt{x^2-2ax+5}\right)^x=2\left(\sqrt{2}\right)^x$$

ima jedinstveno rješenje? (Rj. $a\in\left(\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$).

Literatura

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne* matematike, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.