Do rješenja na mnogo načina

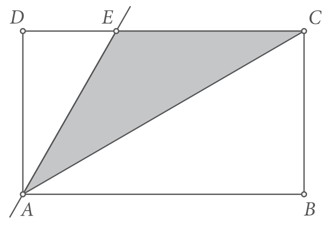
Željko Brčić[1]

Sažetak: Zadatak o kojemu je u nastavku teksta riječ bio je postavljen na ovogodišnjem Državnom natjecanju iz matematike u Šibeniku, u konkurenciji učenika osmih razreda osnovne škole. Većina učenika uspješno je riješila zadatak, no zanimljivo, nijedan učenik nije zadatak rješavao na identičan način. Mnoštvo raznolikih putova pri rješavanju jednog zadatka potaknulo me da te različite metode pokušam objediniti i prikazati na jednome mjestu, u članku koji upravo čitate.

Nastavnici učenicima često naglašavaju da u matematici nije bitan samo rezultat nekog zadatka, nego i način njegovog rješavanja. Potpuno razumijevanje svih pojedinačnih koraka pri rješavanju nužno je jer ponekad tek mala promjena u početnim uvjetima zadatka zahtijeva sasvim drugačiju strategiju u samom postupku rješavanja zadatka. Posebno su zanimljivi i vrijedni zadaci koji se mogu, koristeći različite matematičke postupke, rješavati na više načina. Matematičari su, naravno, svjesni da riješiti već riješeni zadatak na neki drugi način svakako nije gubitak vremena. Možda neki sličan zadatak neće biti moguće riješiti na već korišteni način, a možda je neki alternativni postupak učinkovitiji, brži ili jednostavno ljepši.

U ovome članku opisan je zadatak s ovogodišnjeg Državnog natjecanja iz matematike, održanog u Šibeniku. Zadatak je bio postavljen u kategoriji osmih razreda osnovne škole i nije naročito težak. No, njegova je vrijednost u činjenici da se može rješavati na mnogo različitih načina. Neke od njih iznosim u daljnjem tekstu.

Zadatak. Duljine stranica pravokutnika $ABCD$ su $|AB| = 3\sqrt{3}$ cm i $|BC| = 3$ cm. Neka je točka E sjecište simetrale kuta $\angle CAD$ i stranice $\overline{CD}$. Izračunaj površinu trokuta ACE.



[1]Željko Brčić, OŠ Zrinskih, Nuštar

Rješenje ovoga zadatka može se podijeliti u tri etape.

- računanje duljine dijagonale $\overline{AC}$ pravokutnika *ABCD*
- računanje duljina drugih dviju stranica trokuta *ACE* ($\overline{CE}$ i $\overline{AE}$)
- računanje površine trokuta *ACE*

1. duljina dijagonale $\overline{AC}$ (Pitagorin poučak)

Bez obzira kojim putem kasnije krenuli u rješavanje postavljenog zadatka, početak svakako mora biti računanje duljine dijagonale $\overline{AC}$ pravokutnika *ABCD*. Ta dijagonala ujedno je i stranica trokuta *ACE* pa njezinim izračunom prelazimo s početnih podataka (duljina stranica pravokutnika *ABCD*) na ono što treba riješiti (površinu trokuta *ACE*).

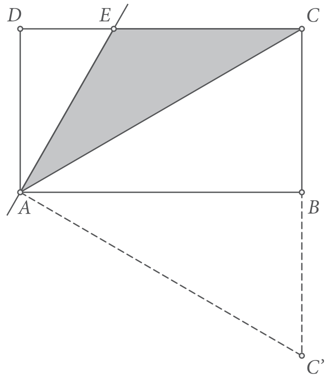
Trokut *ABC* je pravokutni trokut i na njega primijenimo Pitagorin poučak.

Vrijedi $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 = 27 + 9 = 36$, $|AC| = 6$ cm.

Nakon izračuna duljine dijagonale, slijedi druga etapa u rješavanju zadatka koja je u ovom tekstu napravljena na tri različita načina. Budući da je zadatak postavljen u kategoriji osmih razreda, učenicima je najbliže korištenje Pitagorinog poučka. Drugi je način korištenje sličnosti trokuta, čime se zadatak spušta na razinu sedmih razreda. Treći je način korištenje jednog svojstva simetrale kuta i to je možda najbrži, ali i najteži način rada. Simetralu kuta učenici obrađuju još u šestom razredu (dakle relativno davno), a bitno je naglasiti da se svojstvo simetrale kuta koje im u postupku rada treba ne spominje u redovitoj nastavi matematike, nego se eventualno obrađuje na dodatnoj ili izbornoj nastavi.

2.1. duljine stranica $\overline{AE}$ i $\overline{CE}$ (Pitagorin poučak)

Primijetimo da je $|BC| = 3$ cm, a da smo izračunali $|AC| = 6$ cm. Dakle, u trokutu *ABC* duljina stranice $\overline{AC}$ dvostruko je veća od duljine stranice $\overline{BC}$, iz čega se može zaključiti da je trokut *ABC* polovina jednakostraničnog trokuta *AC'C* (vidi sliku).



Dakle, $|\angle BAC| = 30°$ (polovina kuta od 60°). Onda je $|\angle CAD| = 90° - 30° = 60°$, odnosno $|\angle EAD| = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

Sad promotrimo trokut AED. Njegovi su kutovi 30°, 90° i 60°, što znači da je i trokut AED polovina jednakostraničnog trokuta, odnosno da vrijedi $|AE| = 2|ED|$.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut AED slijedi $|AE|^2 = |ED|^2 + |DA|^2$ odnosno $4 \cdot |ED|^2 = |ED|^2 + |DA|^2$. Iz toga slijedi da je $3 \cdot |ED|^2 = 9$, pa je $|ED|^2 = 3$, odnosno da je $|ED| = \sqrt{3}$ cm.

Dalje je $|CE| = |CD| - |ED| = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}$, pa je $|CE| = 2\sqrt{3}$ cm i $|AE| = 2|ED| = 2\sqrt{3}$ cm.

2.2. duljine stranica $\overline{AE}$ i $\overline{CE}$ (sličnost trokuta)

Prvi dio ovoga rješenja identičan je početku prethodnog. Dakle, iz poznatih duljina stranica $|AB| = 3\sqrt{3}$ cm i $|BC| = 3$ cm, Pitagorinim poučkom dobije se duljina dijagonale $|AC| = 6$ cm. Također se, na opisani način, može zaključiti da su trokuti ABC i AED pravokutni trokuti s kutovima 30°, 60° i 90°. To znači da su trokuti ABC i AED slični trokuti.

Budući da je $\Delta ABC \cong \Delta AED$, slijedi da su odgovarajuće stranice trokuta proporcionalnih veličina. Vrijedi:

$$|AB| : |BC| : |AC| = |AD| : |DE| : |AE|$$

Iz $|AB| : |BC| = |AD| : |DE|$ slijedi da je $|DE| = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|AB|} = \frac{3 \cdot 3}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ cm.

Opet se vidi da je $|CE| = |CD| - |DE| = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}$, pa je $|CE| = 2\sqrt{3}$ cm.

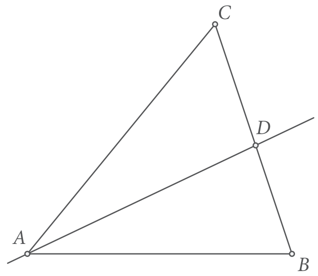
Slično, iz $|AB| : |AC| = |AD| : |AE|$ slijedi da je $|AE| = \frac{|AC| \cdot |AD|}{|AB|} = \frac{6 \cdot 3}{3\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ cm.

Naravno, primjećujemo da su dobivene duljine traženih stranica trokuta ACE u oba postupka jednake.

2.3. duljine stranica $\overline{AE}$ i $\overline{CE}$ (svojstvo simetrale kuta u trokutu)

U oba do sada ponuđena rješenja koristile su se veličine kutova trokuta ABC i AED (30°, 60°, 90°). Do istih rezultata može se doći i bez tog zaključivanja, primjenom jednog svojstva simetrale kuta koje, kako je već rečeno, nije dio redovitog osnovnoškolskog programa, ali se često obrađuje na dodatnoj ili izbornoj nastavi matematike.

Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu na dva odsječka, čije se duljine odnose kao duljine drugih dviju (odgovarajućih) stranica trokuta.



Dakle, uz oznake kao na slici, vrijedi: $|AB| : |AC| = |BD| : |CD|$.

U našem zadatku, pravac AE je simetrala $\angle CAD$ i on na stranici $\overline{CD}$ trokuta ACD odsijeca dužine $\overline{CE}$ i $\overline{DE}$, čije se duljine odnose kao duljine pripadnih stranica $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$. Dakle, vrijedi:

$$|AC| : |AD| = |CE| : |DE|.$$

Kako je $|AC| = 6$ cm, $|AD| = 3$ cm, a $|DE| = |CD| - |CE| = 3\sqrt{3} - |CE|$, imamo:

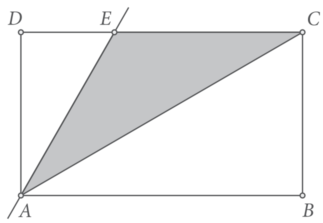
$6 : 3 = |CE| : (3\sqrt{3} - |CE|)$, iz čega se daljnjim računanjem redom dobiva: $18\sqrt{3} - 6|CE| = 3|CE|$, $9|CE| = 18\sqrt{3}$, tj. $|CE| = 2\sqrt{3}$ cm.

Duljina treće stranice $\overline{AE}$ trokuta ACE može se dobiti, bez do sada korištenih Pitagorinog poučka i sličnosti trokuta, na sljedeći način:

u trokutu ACE imamo dva jednaka kuta: $|\angle CAE| = 30°$ i $|\angle ACE| = 30°$, što znači da je trokut ACE jednakokračan. Stoga su mu i duljine stranica nasuprot spomenutih kutova jednake, odnosno: $|AE| = |CE| = 2\sqrt{3}$ cm.

Nakon što su, na bilo koji od prikazanih načina, izračunate duljine svih triju stranica trokuta ACE, moguće je prijeći i na računanje njegove površine. U nastavku teksta to je napravljeno na sedam manje ili više različitih načina (uz napomenu da zasigurno postoje još neki drugi, ovdje neprikazani načini rada). Prva tri prikazana načina računanja površine trokuta odnose se na klasičnu formulu s jednom stranicom i njoj pripadajućom visinom.

3.1. površina trokuta *ACE* (stranica $\overline{CE}$ i visina $\overline{AD}$)

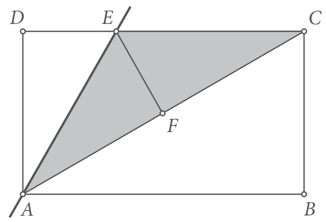


U ranijim razmatranjima (na tri različita načina) izračunata je duljina stranice $|CE| = 2\sqrt{3}$ cm. Sa slike se vidi da je visina trokuta *ACE* iz vrha *A* na stranicu $\overline{CE}$, zapravo dužina $\overline{AD}$. Budući da je poznato da je $|AD|$ = 3 cm, može se izračunati i tražena površina.

$$p_{\triangle ACE} = \frac{|CE| \cdot |AD|}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

3.2. površina trokuta *ACE* (stranica $\overline{AC}$ i visina $\overline{EF}$)

Ako u formuli za računanje površine trokuta *ACE* krenemo od stranice $\overline{AC}$, onda je potrebno izračunati i duljinu visine $\overline{EF}$ nacrtane iz vrha *E* na stranicu $\overline{AC}$, pri čemu je točka *F* oznaka za nožište spomenute visine.



Promatrajmo trokute ΔAFE i ΔADE. Oni imaju zajedničku stranicu $\overline{AE}$, a kako je ta stranica simetrala kuta $\angle FAD$, vrijedi $|\angle FAE| = |\angle EAD|$. Oba trokuta imaju po jedan pravi kut, pa je i $|\angle AEF| = |\angle AED|$.

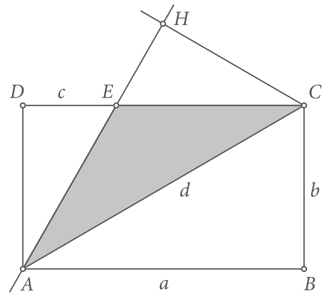
Prema K-S-K poučku, $\Delta AFE \cong \Delta ADE$, iz čega slijedi da je $|EF| = |DE| = \sqrt{3}$ cm (koristimo podatak izračunat u drugom koraku).

Poznate su, dakle, duljine stranice i njoj odgovarajuće visine, pa se može računati površina trokuta:

$$p_{\triangle ACE} = \frac{|AC| \cdot |EF|}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

3.3. površina trokuta *ACE* (stranica $\overline{AE}$ i visina $\overline{CH}$)

Treća moguća kombinacija računanja površine trokuta *ACE* je pomoću duljine stranice $\overline{AE}$ i na slici prikazane visine $\overline{CH}$ povučene iz vrha *C* na produžetak stranice $\overline{AE}$.



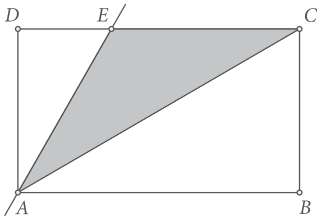
Promatrajmo sada trokute ΔAHC i ΔABC. Oni imaju zajedničku stranicu $\overline{AC}$, te dva jednaka odgovarajuća kuta uz tu stranicu. Vrijedi, naime, $|\angle CAH| = |\angle BAC| = 30°$, te $|\angle ACH| = |\angle ACB| = 60°$ (zbog toga što oba trokuta imaju po jedan pravi kut).

Prema K-S-K poučku, $\Delta AHC \cong \Delta ABC$, iz čega slijedi da je $|CH| = |BC| = 3$ cm.

Ranije je pokazano da je $|AE| = 2\sqrt{3}$ cm, pa je tražena površina:

$$p_{\triangle ACE} = \frac{|AE| \cdot |CH|}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

3.4. površina trokuta *ACE* (pravokutnik umanjen za dva pravokutna trokuta)



Površinu trokuta *ACE* moguće je izračunati i na neizravan način, tako da se izračuna površina cijelog pravokutnika *ABCD*, te da se zatim umanji za veličinu površine pravokutnog trokuta *ABC* i pravokutnog trokuta *AED*. Za to nam, pored zadanih početnih veličina, treba još samo duljina $|DE|$ koja je izračunata u drugom koraku.

$$p_{ABCD} = |AB| \cdot |BC| = 3\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$p_{ABC} = \frac{1}{2} p_{ABCD} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2.$$

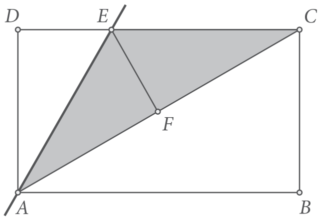
Za površinu trokuta ΔAED koristimo da je $|DE| = \sqrt{3}$ cm:

$$p_{\triangle AED} = \frac{|AD| \cdot |DE|}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$$

Konačno je

$$p_{ACE} = p_{ABCD} - p_{ABC} - p_{AED} = 9\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

3.5. površina trokuta *ACE* (zbroj površina dvaju trokuta)



Za početak, ponovit ćemo dio rasuđivanja korišten pri računanju visine $\overline{EF}$ (u koraku 3.2).

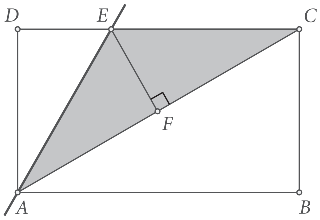
Promatramo trokute ΔAFE i ΔADE. Oni imaju zajedničku stranicu $\overline{AE}$, a kako je ta stranica simetrala kuta $\angle FAD$, vrijedi $|\angle FAE| = |\angle EAD|$. Oba trokuta imaju po jedan pravi kut, pa je i $|\angle AEF| = |\angle AED|$. Prema K-S-K poučku, $\Delta AFE \cong \Delta ADE$, pa je $p_{AFE} = p_{AED}$.

Promotrimo sada trokute AFE i CFE (koji zajedno čine trokut ACE). Oni imaju zajedničku stranicu $\overline{EF}$, a jednaki su im i kutovi uz nju. Vrijedi $|\angle AFE| = |\angle CFE|$ (oba su pravi kutovi), te $|\angle FEA| = |\angle FEC|$ (oni moraju biti po 60° jer vrijedi $|\angle FAE| = |\angle FCE| = 30°$). Ponovno, prema K-S-K poučku, $\Delta AFE \cong \Delta CFE$, i vrijedi $p_{AFE} = p_{CFE}$.

Tada zaključujemo:

$$p_{ACE} = p_{AFE} + p_{CFE} = 2 \cdot p_{AFE} = 2 \cdot p_{ADE} = 2 \cdot \frac{|AD| \cdot |DE|}{2} = 2 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

3.6. površina trokuta *ACE* (dio pravokutnika)

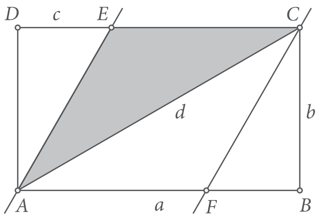


U prošlom odjeljku pokazana je sukladnost triju trokuta koji čine trokut ACD.

Vrijedi $\Delta AFE \cong \Delta ADE \cong \Delta CFE$, pa je očito da je

$$p_{ACE} = \frac{2}{3} p_{ACD} = \frac{1}{3} p_{ABCD} = \frac{1}{3} |AB| \cdot |BC| = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

3.7. površina trokuta *ACE* (polovina paralelograma)



Točkom C nacrtajmo pravac usporedan s pravcem AE, pa sjecište tog pravca i stranice $\overline{AB}$ označimo s F. Četverokut $AFCE$ očito je paralelogram kojemu je dužina $\overline{EC}$ stranica, a dužina $\overline{AD}$ visina.

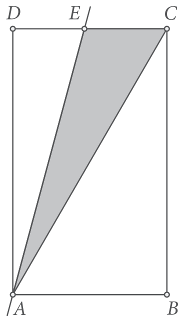
Budući da je $|EC| = 2\sqrt{3}$ cm i $|AD| = 3$ cm, dobivamo $p_{AFCE} = 2\sqrt{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$ cm^2.

Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli paralelogram na dva jednaka dijela pa vrijedi:

$$p_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot p_{AFCE} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

U članku je do sada pokazano da se stranice traženog trokuta *ACE* mogu dobiti na tri načina, a zatim pomoću njih izračunati površina trokuta na sedam načina. Kao što je već ranije rečeno, postoji još mnogo sličnih, a vjerojatno i sasvim drugačijih varijanti zaključivanja, no u tekstu sam se ograničio samo na učeničke ideje iznesene u rješenjima na državnome natjecanju. I bez daljnjeg širenja, jednostavnim kombiniranjem iznesenih varijanti u drugom i trećem koraku dolazimo do impresivne brojke od dvadesetak načina rješavanja jednog jedinog zadatka.

Na kraju dodajmo da zadatak ima sasvim drugačije rješenje ako se zamijene duljine stranica pravokutnika, odnosno ako zadatak glasi ovako:



Zadatak. Duljine stranica pravokutnika *ABCD* su $|AB| = 3$ cm i $|BC| = 3\sqrt{3}$ cm. Neka je točka *E* sjecište simetrale kuta $\angle CAD$ i stranice $\overline{CD}$. Izračunaj površinu trokuta *ACE*.

Sada slika izgleda ovako kao na slici desno:

U ovom slučaju, navest ću samo jedan način rješavanja, i to onaj najučinkovitiji (ostale varijante čitatelji mogu potražiti sami).

Pitagorinim poučkom izračuna se duljina dijagonale

Ona očito ostaje ista, dakle $|AC| = 6$ cm.

Simetrala kuta $\angle CAD$ dijeli stranicu $\overline{CD}$ trokuta *ACD* na dva dijela, tako da vrijedi:

$$|AC| : |AD| = |CE| : |DE|.$$

Primijetimo da je $|DE| = 3 - |CE|$ i uvrstimo početne podatke:

$$6 : 3\sqrt{3} = |CE| : (3 - |CE|)$$

Rješavanjem razmjera dobije se $|CE| = 12 - 6\sqrt{3}$ cm, a zatim i tražena površina:

$$p_{\triangle ACE} = \frac{|CE| \cdot |AD|}{2} = \frac{(12 - 6\sqrt{3}) \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} - 27 \text{ cm}^2.$$