Trigonometrijske formule – „sve" iz jednog trokuta i još ponešto

„Oštroumni zaključci iz tupokutnog trokuta i iz-skok trokutomjernih funkcija iz trokuta"

Vladimir Ćepulić[1], Kristina Penzar[2]

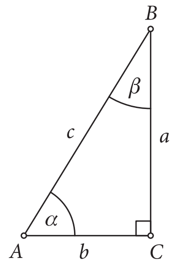
Uvod

U ovom su članku, polazeći od samih definicija, izvedene temeljne činjenice o trigonometrijskim funkcijama u trokutu i razmotrena poopćenja tih funkcija na sve realne vrijednosti kuteva. Pri tome je polazište jednostavna i pregledna slika dopunjenoga tupokutnog trokuta (sl. 3), sa svega 5 točaka i sa 5 dužina koje ih spajaju. Ta se slika pokazala vrlo plodnim sredstvom neposrednoga dokazivanja svih četiriju temeljnih trigonometrijskih formula – sinusa i kosinusa zbroja, kao i sinusovog i kosinusovog poučka.

Formule za sinus i kosinus zbroja omogućuju proširbu područja definicije ovih funkcija s prvotnog otvorenog intervala $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ na cijeli skup $\mathbb{R}$. Takav pristup mogao bi učenicima srednjih škola olakšati razumijevanje pripadnih dokaza, a onda i pamćenje ili samostalnu izvedbu tih formula. Također posvijestiti si povezanost algebarskoga i geometrijskoga značenja tako proširenih funkcija.

1. ***Trigonometrijske funkcije u pravokutnom trokutu.*** Kao što znamo, polazno se trigonometrijske („trokutomjerne") funkcije definiraju u pravokutnom trokutu kao omjeri njegovih stranica, a u ovisnosti od njegovih kuteva. Pri tom ima važnu ulogu Pitagorin poučak koji izriče da je ploština kvadrata nad hipotenuzom („suprotnicom", jer je nasuprot pravom kutu) jednaka zbroju ploština kvadrata nad katetama („okomicama" – one zatvaraju pravi kut, međusobno su okomite). Uz uobičajene oznake imamo ovu sliku pravokutnoga trokuta:

[1]Vladimir Ćepulić, Fakultet Elektrotehnike i računarstva, Zagreb
[2]Kristina Penzar, Nadbiskupska klasična gimnazija, Zagreb



Slika 1.

Temeljne trigonometrijske funkcije sinus i kosinus definiraju se formulama:

(1) $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ (2) $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$. Iz (1) i (2) slijedi:

(1′) $a = c \cdot \sin\alpha$ (2′) $b = c \cdot \cos\alpha$.

Po Pitagorinom poučku je $a^2 + b^2 = c^2$, pa je

(3) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$.

Ove su tri formule temelj za sva daljnja „zbivanja" u trigonometriji.

Prve dodatne definicije su

(4) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{b}$ i (5) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a}$, a njihova je važna sveza

(6) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$.

„Oslobađajući" se konkretnih oznaka, sinus kuta definiran je kao omjer duljinâ kutu suprotne katete i hipotenuze, a kosinus kao omjer duljinâ katete uz kut i hipotenuze. Stoga je za kut β:

$\sin\beta = \dfrac{b}{c} = \cos\alpha$,

$\cos\beta = \dfrac{a}{c} = \sin\alpha$, pri čemu je $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, dakle je

(7) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

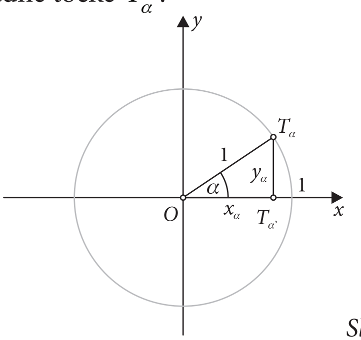
U dnevnoj uporabi formule (1′) i (2′) rabe se češće od samih definicija (1) i (2), a govore da je duljina katete umnožak duljine hipotenuze i sinusa kuta nasuprot toj kateti, dotično umnožak duljine hipotenuze i kosinusa šiljastog kuta uz tu katetu.

2. ***Trigonometrijske funkcije i trigonometrijska kružnica.*** Sljedeći korak koji je temelj za poopćenje definicija trigonometrijskih funkcija je promatranje tih funkcija na *trigonometrijskoj* kružnici – kružnici polumjera 1 sa središtem u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava XOY (v. sl. 2). Za svaki kut φ koji je nanešen u

ishodište tako da mu je os *OX* prvi krak, drugi krak kuta siječe tu kružnicu u nekoj točki koju označimo s $T_\varphi(x_\varphi, y_\varphi)$, a njezinu projekciju na os *OX* kao T'_φ. Neka je kut α u prvom kvadrantu, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (vidi sl. 2). U trokutu $OT'_\alpha T_\alpha$ je $\sin\alpha = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha$, $\cos\alpha = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha$, pa je

(8) $T_\alpha\left(x_\alpha, y_\alpha\right) \equiv T_\alpha\left(\cos\alpha, \sin\alpha\right)$

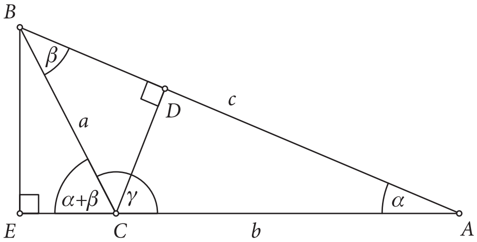
dakle je za takve kuteve u prvome kvadrantu $\cos\alpha$ jednak *x*-koordinati, a $\sin\alpha$ jednak *y*-koordinati pripadne točke T_α.



Slika 2.

Ova okolnost navodi na pomisao proširbe definicija trigonometrijskih funkcija na kuteve izvan prvotnog raspona, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, preko koordinata pripadnih točaka na trigonometrijskoj kružnici. Nu je li to smisleno s obzirom na izvorne definicije – bitno povezane s pravokutnim trokutom, i matematički plodno? Pokazalo se da jest i to je dalo novi zamah matematičkim istraživanjima. U traženju odgovora na ova pitanja važnu ulogu imaju formule za sinus i kosinus zbroja kuteva.

3. ***Formule za sinus i kosinus zbroja kuteva*** u ovisnosti o sinusima i kosinusima kuteva pribrojnika najvažnije su otkriće za daljnje sagledavanje naravi tih funkcija i njihovo poznavanje. Potražimo sliku trokuta na kojoj će se uz kuteve α i β neposredno pojaviti i kut $\alpha+\beta$, s vrijednošću $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Znamo da je „vanjski" kut trokuta jednak zbroju nutarnjih dvaju kuteva koji nisu s njime sukuti. Kako je zbroj kuteva u trokutu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, iz navedenoga zahtjeva slijedi da treba biti $\gamma > \frac{\pi}{2}$, to jest γ je tupi kut kojemu je sukut $\alpha+\beta$ u navedenim granicama. To nas vodi na sljedeću sliku:



Slika 3.

U tupokutnom trokutu ABC s tupim kutem γ produljimo stranicu b preko vrha C i spustimo okomicu iz vrha C na stranicu c, te iz vrha B na stranicu b. Pripadna nožišta označimo s D i E. Kut $\measuredangle ECA = \alpha + \beta$, pa je u pravokutnom trokutu CEB.

(9) $\overline{EB} = a \cdot \sin(\alpha + \beta)$, $\overline{CE} = a \cdot \cos(\alpha + \beta)$

Iz pravokutnih trokuta ADC i BDC očitavamo:

(10) $\overline{CD} = a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$, $\overline{AD} = b \cdot \cos\alpha$, $\overline{DB} = a \cdot \cos\beta$, pa je

$c = \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta$.

U trokutu AEB je pak $\overline{AE} = c \cdot \cos\alpha$, $\overline{EB} = c \cdot \sin\alpha$.

Stoga je $\overline{EB} = a \cdot \sin(\alpha + \beta) = c \cdot \sin\alpha = (b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta) \cdot \sin\alpha =$

$= b \cdot \sin\alpha \cos\alpha + a \cdot \cos\beta \sin\alpha = (\text{po } (10)) = a \cdot \sin\beta \cos\alpha + a \cdot \cos\beta \sin\alpha$.

Podijelivši drugi i zadnji izraz u ovoj jednakosti s a, dobiva se:

$$(*) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

formula za sinus zbroja dvaju kuteva.

Iz sl. 3. također vidimo da je

$\overline{CE} = a \cdot \cos(\alpha + \beta) = c \cdot \cos\alpha - b = (b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta) \cdot \cos\alpha - b =$

$= b(\cos^2\alpha - 1) + a \cdot \cos\alpha \cos\beta = a \cdot \cos\alpha \cos\beta - b \cdot \sin^2\alpha = (\text{po } (10))$,

$= a \cdot \cos\alpha \cos\beta - a \cdot \sin\alpha \sin\beta$,

te opet, dijeleći drugi i zadnji izraz u jednakosti s a, dobivamo:

$$(**) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,$$

formulu za kosinus zbroja kuteva.

4. ***Sinusov i kosinusov poučak***

Primjenjujući Pitagorin poučak na „dopunski" trokut CEB sa sl. 3. jednostavno dobivamo *kosinusov poučak* za stranicu a:

$\overline{CB}^2 = a^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EB}^2 = (c \cdot \cos\alpha - b)^2 + (c \cdot \sin\alpha)^2 =$

$= c^2 \cos^2\alpha - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 + c^2 \sin^2\alpha$, tj.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.

Posve slično se iz trokuta ADC, uzimljući u obzir da je $\overline{AD} = c - a \cdot \cos\beta$ dobiva $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$, *kosinusov poučak* za stranicu b.

Promatrajući pak „nutarnje" trokute ADC i CDB trokuta ABC sa sl. 3. vidjeli smo u (10) da je $\overline{CD} = a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$, odakle slijedi *sinusov poučak*

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Oba smo poučka zasad razmotrili za slučaj stranica nasuprot šiljastim kutevima jer su polazno trigonometrijske funkcije definirane samo za takve kuteve. Ostaje pitanje mogućnosti prikladnog proširenja valjanosti tih poučaka i na slučaj stranica nasuprot kutu koji nije šiljast. To omogućuje proširba trigonometrijskih funkcija i na takve kuteve.

5. ***Poopćenje trigonometrijskih funkcija na bilo koje kuteve*** φ, $-\infty < \varphi < +\infty$.

Po izvornoj definiciji u pravokutnom trokutu, funkcije sin α i cos α definirane su za kuteve α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Za pripadne točke T_a na trigonometrijskoj kružnici, kako smo vidjeli u *2.*, vrijedi

$$T_\alpha\left(x_\alpha, y_\alpha\right) \equiv T_\alpha\left(\cos\alpha, \sin\alpha\right).$$

Formule (*) i (**) možemo formalno protegnuti i na druge vrijednosti α, na primjer svaki se pozitivan broj može dobiti susljednim, uzastopnom zbrojidbom malih brojeva, recimo jedinica 1 i ostatka manjeg od 1. Pitamo se, međutim, o smislenosti tako dobivenih vrijednosti i kakvo je njihovo geometrijsko značenje? Pokazat ćemo da su rezultati za cos φ i sin φ, koje na taj način daju formule (*) i (**) za bilo koji kut φ, neovisni o pribrojnicima u jednakim ukupnim zbrojevima i da su upravo jednaki: $\cos\varphi = x_\varphi$, $\sin\varphi = y_\varphi$ za točku T_φ (x_φ, y_φ).

U dokazivanju tih činjenica bit će nam više puta potrebno rješavati sustave dviju linearnih jednadžba s dvije nepoznanice. Podsjetimo, opći takav sustav

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

ima rješenja (što se lako provjeri):

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}$$

pri čemu je $D_1 = c_1b_2 - c_2b_1$, $D_2 = a_1c_2 - a_2c_1$, $D = a_1b_2 - a_2b_1$.

U daljnjem će nam biti korisne formule za sinus i kosinus razlike kuteva:

Izraze za $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, u slučaju $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, dobivamo na temelju definicijske formule za *razliku*

$$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha.$$

Primijenimo formule (*) i (**):

$$\sin\alpha = \sin\beta\cos(\alpha-\beta) + \cos\beta\sin(\alpha-\beta)$$
$$\cos\alpha = \cos\beta\cos(\alpha-\beta) - \sin\beta\sin(\alpha-\beta)$$

pa je za $\cos(\alpha-\beta)$ i $\sin(\alpha-\beta)$ namjesto nepoznanica x i y u gore navedenom općem sustavu:

$D_1 = \sin\alpha(-\sin\beta) - \cos\alpha\cos\beta$, $D_2 = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$,
$D = \sin\beta(-\sin\beta) - \cos\beta\cos\beta = -1$, dakle vrijedi da je

$$(***)\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Sad ćemo, kako je najavljeno, pokazati da su za sve φ, vrijednosti cos φ, sin φ računane s pomoću formula (*), (**) i (***) upravo koordinate točaka T_φ (x_φ, y_φ), tj. da je $T_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) \equiv T_\varphi$ (cos φ, sin φ).

5.1 Za $\varphi = 0$ je $T_0\,(1{,}0) \equiv T_0(\cos 0, \sin 0)$:

Ovo slijedi iz činjenice da je $\alpha + 0 = \alpha$ za svaki α, dakle vrijedi da je

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 0) = \cos\alpha\cos 0 - \sin\alpha\sin 0$$
$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 0) = \sin\alpha\cos 0 + \cos\alpha\sin 0$$

što je sustav dviju linearnih jednadžba s nepoznanicama cos 0 i sin 0. Lako se provjeri da su rješenja doista cos 0 = 1 i sin 0 = 0.

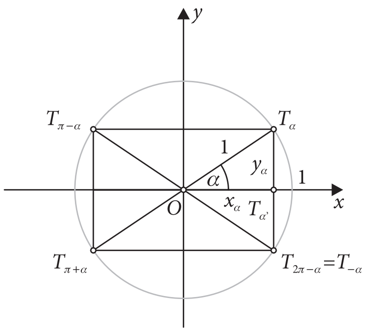
5.2 $T_{\frac{\pi}{2}}\left(0{,}1\right) \equiv T_{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right)$

Po (7), (*) i (**) imamo:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left[\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0,$$
$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left[\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\alpha = 1.$$

Vidimo da je rezultat neovisan o pribrojnicima.

5.3 Svrnimo opet pogled na *trigonometrijsku* kružnicu. Iz sl. 4. vidimo da je uz $T_\alpha\left(x_\alpha, y_\alpha\right) \equiv T_\alpha\left(\cos\alpha, \sin\alpha\right)$ za $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, također $T_{\pi-\alpha}\left(-\cos\alpha, \sin\alpha\right)$, $T_{\pi+\alpha}\left(-\cos\alpha, -\sin\alpha\right)$, $T_{2\pi-\alpha}\left(\cos\alpha, -\sin\alpha\right) \equiv T_{-\alpha}\left(\cos\alpha, -\sin\alpha\right)$. Pokazat ćemo da nas formule (*) i (**) vode upravo na te vrijednosti kao sinuse i kosinuse pripadnih kuteva.



Slika 4.

5.4 $T_{\pi-\alpha}\left(-\cos\alpha,\sin\alpha\right)\equiv T_{\pi-\alpha}\left(\cos\left(\pi-\alpha\right),\sin\left(\pi-\alpha\right)\right)$:

Naime,

$$\cos\left(\pi-\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$
$$=0\cdot\sin\alpha-1\cdot\cos\alpha=-\cos\alpha$$
$$\sin\left(\pi-\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$
$$=1\cdot\sin\alpha+0\cdot\cos\alpha=\sin\alpha.$$

5.5 $T_{\pi}\left(-1,0\right)\equiv T_{\pi}\left(\cos\pi,\sin\pi\right)$:

$$\cos\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=0\cdot0-1\cdot1=-1$$
$$\sin\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1\cdot0+0\cdot1=0.$$

5.6 $T_{\pi+\alpha}\left(-\cos\alpha,-\sin\alpha\right)\equiv T_{\pi+\alpha}\left(\cos\left(\pi+\alpha\right),\sin\left(\pi+\alpha\right)\right)$:

Sad je

$$\cos\left(\pi+\alpha\right)=\cos\pi\cos\alpha-\sin\pi\sin\alpha=-1\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha$$
$$\sin\left(\pi+\alpha\right)=\sin\pi\cos\alpha+\cos\pi\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-1\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha.$$

5.7 $T_{\frac{3\pi}{2}}\left(0,-1\right)\equiv T_{\frac{3\pi}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{2},\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

Iz (*) i (**) slijedi:

$$\cos\frac{3\pi}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi\cos\frac{\pi}{2}-\sin\pi\sin\frac{\pi}{2}=\left(-1\right)\cdot0-0\cdot1=0$$
$$\sin\frac{3\pi}{2}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi\cos\frac{\pi}{2}+\cos\pi\sin\frac{\pi}{2}=0\cdot0+\left(-1\right)\cdot1=-1$$

Slično je:

5.8 $T_{2\pi-\alpha}\left(\cos\alpha,-\sin\alpha\right)\equiv T_{2\pi-\alpha}\left(\cos\left(2\pi-\alpha\right),\sin\left(2\pi-\alpha\right)\right)$:

$$\cos\left(2\pi-\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\pi-\alpha\right)\right]=\cos\pi\cos\left(\pi-\alpha\right)-\sin\pi\sin\left(\pi-\alpha\right)=$$
$$=\left(-1\right)\cdot\left(-\cos\alpha\right)-0\cdot\left(-\sin\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\sin\left(2\pi-\alpha\right)=\sin\left[\pi+\left(\pi-\alpha\right)\right]=\sin\pi\cos\left(\pi-\alpha\right)+\cos\pi\sin\left(\pi-\alpha\right)=$$
$$=0\cdot\left(-\cos\alpha\right)+\left(-1\right)\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha$$

5.9 $T_{2\pi}\left(1,0\right) \equiv T_{2\pi}\left(\cos 2\pi, \sin 2\pi\right)$:

$$\cos 2\pi = \cos\left(\pi + \pi\right) = \cos\pi \cos\pi - \sin\pi \sin\pi = \left(-1\right)\cdot\left(-1\right) - 0\cdot 0 = 1$$

$$\sin 2\pi = \sin\left(\pi + \pi\right) = \sin\pi \cos\pi + \cos\pi \sin\pi = 0\cdot\left(-1\right) + \left(-1\right)\cdot 0 = 0$$

5.10 $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$, $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, u skladu s $T_{\alpha+2\pi} \equiv T_\alpha$:

$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha \cos 2\pi - \sin\alpha \sin 2\pi = \cos\alpha \cdot 1 - \sin\alpha \cdot 0 = \cos\alpha$,

$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha \cos 2\pi + \cos\alpha \sin 2\pi = \sin\alpha \cdot 1 + \cos\alpha \cdot 0 = \sin\alpha$.

Potpunom indukcijom lako se pokaže da je općenito

$$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos\alpha,\ \sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin\alpha \text{ za svaki } k \in \mathbb{N},$$

dakle su funkcije *kosinus* i *sinus* periodične, a temeljna perioda im je 2π.

5.11 Ove se funkcije mogu jednostavno proširiti i na područje negativnih vrijednosti kuta φ.

Pri tome je $T_{-\varphi}\left(\cos\varphi, -\sin\varphi\right) \equiv T_{-\varphi}\left(\cos\left(-\varphi\right), \sin\left(-\varphi\right)\right)$, za sve φ:

U algebri je $-\varphi$ definiran relacijom $\left(-\varphi\right) + \varphi = 0$. Po (*), (**) i po 5.1 je:

$$\cos 0 = \cos\left[\varphi + \left(-\varphi\right)\right] = \cos\varphi \cos\left(-\varphi\right) - \sin\varphi \sin\left(-\varphi\right) = 1$$

$$\sin 0 = \sin\left[\varphi + \left(-\varphi\right)\right] = \sin\varphi \cos\left(-\varphi\right) + \cos\varphi \sin\left(-\varphi\right) = 0$$

Iz ovih dviju linearnih jednadžba s nepoznanicama $\cos(-\varphi)$ i $\sin(-\varphi)$ dobiva se rješenje:

$$\cos\left(-\varphi\right) = \cos\varphi,\ \sin\left(-\varphi\right) = -\sin\varphi .$$

Operacija *razlike* $\alpha - \beta$ definira se u algebri kao $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$, što sad daje drugi način izvedbe formula (***):

$$\cos\left(\alpha - \beta\right) = \cos\left[\alpha + \left(-\beta\right)\right] = \cos\alpha \cos\left(-\beta\right) - \sin\alpha \sin\left(-\beta\right) =$$
$$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha\left(-\sin\beta\right) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta ,$$
$$\sin\left(\alpha - \beta\right) = \sin\left[\alpha + \left(-\beta\right)\right] = \sin\alpha \cos\left(-\beta\right) + \cos\alpha \sin\left(-\beta\right) =$$
$$= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha\left(-\sin\beta\right) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta .$$

6. Dobra definiranost općenitih trigonometrijskih funkcija

Pokažimo još i to, da su ovako proširene trigonometrijske funkcije *sinus* i *kosinus* dobro definirane formulama (*) i (**). Što će to ovdje značiti? Kako vrijednost funkcije zbroja računamo s pomoću funkcija pribrojnika, ta vrijednost ne smije ovisiti o izboru pribrojnika, dakle ako je $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, treba biti i $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\gamma + \delta)$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\gamma + \delta)$.

Neka je dakle $\varphi = \alpha + \beta = \gamma + \delta$. Ako je $\alpha \neq \gamma$, možemo (ne smanjujući općenitost) pretpostaviti da je $\alpha > \gamma$, pa je onda $\alpha = \gamma + \varepsilon$ za neki $\varepsilon > 0$, a stoga $\beta = \delta - \varepsilon$.

Imamo:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos[(\gamma+\varepsilon)+(\delta-\varepsilon)] = \cos(\gamma+\varepsilon)\cos(\delta-\varepsilon)-\sin(\gamma+\varepsilon)\sin(\delta-\varepsilon) = \\ &= (\cos\gamma\cos\varepsilon-\sin\gamma\sin\varepsilon)(\cos\delta\cos\varepsilon+\sin\delta\sin\varepsilon)- \\ &-(\sin\gamma\cos\varepsilon+\cos\gamma\sin\varepsilon)(\sin\delta\cos\varepsilon-\cos\delta\sin\varepsilon) = \\ &= \cos^2\varepsilon(\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta)+\sin^2\varepsilon(\cos\gamma\cos\delta-\sin\gamma\sin\delta)+ \\ &+\sin\varepsilon\cos\varepsilon(\cos\gamma\sin\delta-\sin\gamma\cos\delta+\sin\gamma\cos\delta-\cos\gamma\sin\delta) = \\ &= \cos^2\varepsilon\cos(\gamma+\delta)+\sin^2\varepsilon\cos(\gamma+\delta)+\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cdot 0 = \cos(\gamma+\delta),\end{aligned}$$

dakle je

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\gamma+\delta).$$

Slično se pokazuje da je:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin[(\gamma+\varepsilon)+(\delta-\varepsilon)] = \sin(\gamma+\varepsilon)\cos(\delta-\varepsilon)+\cos(\gamma+\varepsilon)\sin(\delta-\varepsilon) = \ldots =$$

$$\cos^2\varepsilon\sin(\gamma+\delta)+\sin^2\varepsilon\sin(\gamma+\delta)+\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cdot 0 = \sin(\gamma+\delta),$$

čime su obje tvrdnje dokazane.

7. Sinusov i kosinusov poučak za slučaj tupokutnoga trokuta s obzirom na trigonometrijske funkcije tupoga kuta

Vratimo se našoj slici br. 3. Znamo kako se u šiljastokutnom trokutu dokazuje sinusov i kosinusov poučak. Pokazat ćemo sada da se iste formule „proširuju" i na slučajeve tupokutnoga trokuta uzimljući u obzir proširbu područja definicije trigonometrijskih funkcija.

Iz slike 3., uzimljući u obzir da je $\measuredangle ECB = \alpha + \beta = \pi - \gamma$, očitavamo

$$\begin{aligned}c^2 &= \overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 = \left(\overline{EC}+b\right)^2 + \overline{EB}^2 = \left(a\cos(\alpha+\beta)+b\right)^2 + \left(a\sin(\alpha+\beta)\right)^2 = \\ &= (a\cdot\cos(\pi-\gamma)+b)^2 + (a\cdot\sin(\pi-\gamma))^2 = (-a\cdot\cos\gamma+b)^2 + (a\cdot\sin\gamma)^2,\end{aligned}$$

tj. i u slučaju tupoga kuta γ vrijedi ista formula kosinusovog poučka kao i za šiljaste kuteve,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$$

Na slici 3. vidimo također da je $\overline{EB} = c\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin(\alpha+\beta) = a\cdot\sin(\pi-\gamma) = a\cdot\sin\gamma$, stoga je i opet $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, pa je i za tupokutni trokut sinusov poučak oblika:

$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.