Obračun kamata: Jednostavan i anticipativan

Gordan Nogić[1]

Što je dobra definicija? Za filozofa ili znanstvenika, to je definicija primjenjiva na sve objekte koji se definiranju i primjenjiva je samo na njima; to je ona definicija koja ispunjava pravila logike. Ali ne i u obrazovanju; u obrazovanju to je ono što može biti razumljivo učenicima. (Poincaré, 1908).

Uvod

Cilj ovog rada je, iz perspektive dugogodišnjeg iskustva u radu u srednjoj ekonomskoj školi, osvrnuti se na jednu važnu i učenicima zahtjevnu nastavnu cjelinu – cjelinu obračuna kamata.

Problem se može sagledati kao:

– problem prijenosa matematičkih pojmova u školsku matematiku

– problem definicije matematičkog pojma.

Ovaj problem u literaturi iz matematičke edukacije poznat je kao „concept image – concept definition" tj. predodžba koncepta – definicija koncepta (vidi [11]).

Zašto neki način obračuna kamata nazivamo jednostavnim odnosno složenim? Kako ih definiramo? Jesmo li dovoljno dobro prenijeli ideju tih pojmova? Problematika postaje još zamršenija ukoliko se uvedu pojmovi dekurzivnog i anticipativnog obračuna kamata.

Elementi koncepta

Pomalo neobično, bolje se razumjelo što je složeni kamatni račun nego jednostavni, iako se na prvi dojam čini da je lakše razumjeti nešto jednostavno. S druge strane, ali očekivano, jasnije se razumjelo što je dekurzivan način obračuna kamata u odnosu na pojam anticipativnog načina.

[1]Gordan Nogić, Zagreb

Jednostavan-složen, jedan je par pojmova, a dekurzivan-anticipativan, drugi par. U prethodnim razmatranjima (vidi [8] i [9]) smatralo se da su ti parovi pojmova međusobno nezavisni, pa da se onda kao takvi međusobno isprepliću, kao što se i radi u literaturi (udžbenici za srednje škole, izdanja za potrebe studija ekonomije i ostala stručna literatura (vidi [1] – [7])), a o čemu je bilo govora u prvom članku o ovoj problematici (vidi [8]). Pokazat će se da su ti pojmovi uže vezani nego se činilo. U drugom članku (vidi [9]) istaknulo se stajalište da je tzv. jednostavno-složeni kamatni račun ne samo izuzetak jednog izoliranog početnog razdoblja obračuna kamata, nego gotovo i pravilo kod mnogih, redovitih u upotrebi, modela obračuna kamata – s više razdoblja. Može se reći da je „nula" odgovorna što je moguć tzv. jednostavno-složeni kamatni račun, pri čemu je „nula" vezana uz kamate, no ne u smislu da su one jednake nula (jer bi onda i kamatna stopa bila nula), nego su u ključnim trenutcima bile „anulirane". Više o tome u [9].

Razumijevanje koncepta

Osnova za spomenute zaključke upravo je pitanje jednostavnog kamatnog računa. Literatura kaže: „Jednostavan kamatni račun koristi se ako se kamate izračunavaju na istu, početnu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja." Iz ove pozicije, u [8], iznosi se nova formulacija i kaže: „Jednostavan kamatni račun je onaj kod kojega se glavnica za svako razdoblje ne mijenja zbog kamata." To je ugrozilo stabilnost prvog shvaćanja, tj. glavnica se mogla mijenjati, a da obračun kamata i dalje bude jednostavan (vidi [1] – [7] Potrošački kredit, [10] Partial payments (Merchant's Rule, United States Rule)). Nadalje, u [9] se pojašnjava formulacija na sljedeći način: „Glavnica kod jednostavnog kamatnog računa ne uključuje kamate."

Što se tiče dekurzivnog i anticipativnog obračuna kamata, očekivano je anticipativni uzrokovao probleme u razumijevanju o kakvom se načinu obračuna radi. U literaturi se kaže: „Kod anticipativnog obračuna kamate se obračunavaju na početku razdoblja od glavnice s kraja tog razdoblja" odnosno „Kod anticipativnog načina obračuna kamata, kamate se obračunavaju i isplaćuju unaprijed za neko vremensko razdoblje od glavnice s kraja razdoblja ukamaćivanja".

S ciljem da bude što manje nesporazuma, ovdje se smatra da je potrebno naglasiti, točnije nedvosmisleno utvrditi iznos na početku i iznos na kraju pojedinog razdoblja obračuna kamata, a čija su međusobna razlika – upravo kamate. Kada se opisuje anticipativni način obračuna kamata, za glavnicu se podrazumijeva iznos s kraja pojedinog razdoblja. Slijedom navedenog, dekurzivan način obračuna kamata bio bi onaj kod kojeg je glavnica za obračun kamata iznos s početka pojedinog razdoblja.

Razmjeri „uključivanja kamata"

Promatrajući tako, može se zapaziti da glavnica kod anticipativnog obračuna kamata onda nužno uključuje kamate jer je iznos na kraju razdoblja jednak iznosu početka razdoblja uvećanom za kamate. Dakle, iz prethodnog razmatranja izlazi sljedeći problem: Može li obračun kamata biti ujedno jednostavan i anticipativan ako je jednostavan obračun onaj kod kojeg se kamate ne uključuju u glavnicu za obračun? Preciznije rečeno, problem je u razumijevanju, pa onda i u definiciji tih pojmova.

Odgovor na ovo pitanje dobije se na sljedeći način: „Jednostavan kamatni račun je onaj kod kojeg se u glavnicu za obračun kamata ne uključuju kamate prethodnih razdoblja." Nadalje je onda: „Složeni kamatni račun onaj račun kod kojeg su u glavnicu za obračun kamata pojedinog razdoblja uključene kamate prethodnih razdoblja."

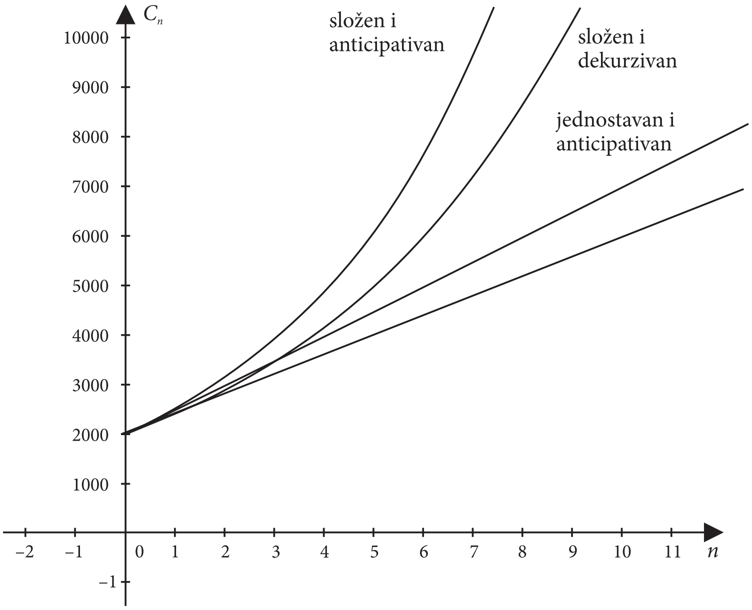
Primjećujemo da ukoliko je obračun kamata anticipativan, onda su u glavnicu za obračun uključene upravo kamate tekućeg razdoblja, pa bi to mogao biti i alternativni ili čak više pogođen opis ovog obračuna kamata. To su zapravo „kamate na kamate" tekućeg razdoblja ili, da se tako izrazimo, „kamate na same sebe". Dakle, anticipativni način obračuna kamata u glavnicu za obračun uključuje kamate tekućeg razdoblja, a dekurzivni način obračuna kamata u glavnicu za obračun ne uključuje kamate tekućeg razdoblja. Jednostavni kamatni račun ne uključuje kamate prethodnih razdoblja, a složeni kamatni račun uključuje kamate prethodnih razdoblja – to su zapravo poznate „kamate na kamate", ali prethodnih razdoblja, odnosno „kamate na prethodne kamate".

Tako se može zaključiti da je obračun kamata:

– **jednostavan i dekurzivan ako ne uključuje kamate ni prethodnih niti tekućeg razdoblja,**
– **jednostavan i anticipativan ako ne uključuje kamate prethodnih, a uključuje one tekućeg razdoblja,**
– **složen i dekurzivan ako uključuje kamate prethodnih, ali ne i tekućeg razdoblja,**
– **složen i anticipativan ako uključuje kamate i prethodnih i tekućeg razdoblja.**

S ciljem da potkrijepimo ove tvrdnje grafičkim prikazom može se ponoviti usporedba 4 spomenuta osnovna modela iznesenih u [8]. U nastavku se nalaze grafovi konačnih vrijednosti iznosa u ovisnosti o broju godina s unaprijed određenim početnim iznosom i kamatnom stopom, jednakima za svaki od modela (početna vrijednost 2 000 kamatna stopa 20).

Slika sugerira da prelaskom s jednog modela na drugi glavnica uključuje sve više i više kamata. Može se primijetiti da jednostavan i anticipativan način obračuna ostvaruje više kamata s tekućim razdobljem nego što to čini složen i dekurzivan obračun, sve do onog trenutka dok zbroj kamata prethodnih razdoblja ne postane veći od kamata tekućeg razdoblja.



Slika 1. Osnovni modeli obračuna kamata – konačni iznos u ovisnosti o broju godina

Jednostavno-složen i dekurzivno-anticipativan obračun kamata

Kada govorimo o uključivanju kamata u glavnicu kod jednostavnog odnosno složenog kamatnog računa, onda podrazumijevamo ostvarene, ali neobrađene kamate. Ukoliko se kamate obrade u cijelosti (npr. isplate do trenutka novog obračuna), više ih „nema" pa se ne može utvrditi bi li se inače uključile u glavnicu ili ne. Takvu situaciju možemo shvatiti kao „jednostavno-složeni" kamatni račun.

Kamate koje su nastale prije do sada se moglo obraditi tako da više ne budu aktualne, ali one koje nastaju sada mora se smatrati aktualnima, s njima se mora računati. To je razlog zašto način obračuna kamata ne može biti „dekurzivno-anticipativan", kao što je bio slučaj kada smo utvrdili da obračun kamata može biti „jednostavno-složen".

U sljedećim primjerima razmotrit će se jednostavno i anticipativno ukamaćivanje.

Jednostavan i anticipativan obračun kamata na primjeru

Primjer A

Iznos s početka prve godine ulaganja je 1 000 kn, a kamatna stopa 20. Koliki je iznos na kraju trećeg razdoblja ako je obračun kamata jednostavan i anticipativan?

$k_1 = 250 \quad k_2 = 250 \quad k_3 = 250$ (ukupno 750 kn kamata)

Ulog:	1 000			
Iznos:	1 000	1 250	1 500	1 750
Glavnica:		1 250	1 250	1 250

Glavnica za obračun kamata prvog razdoblja ona je u koju su uključene kamate prvog razdoblja (jer je obračun kamata anticipativan), a to je onda iznos na kraju prvog razdoblja.

$$C_0 = 1000 \Rightarrow \; C_1 - C_1 \cdot \frac{20}{100} = 1000 \; \Rightarrow \; C_1 = \frac{1000}{0.8} = 1250 \; \Rightarrow \; k_1 = \frac{1250 \cdot 20}{100} = 250$$

Glavnica za obračun kamata drugog razdoblja ona je u koju su uključene kamate drugog razdoblja (jer je obračun kamata anticipativan), a to je onda iznos bez kamata uvećan za kamate drugog razdoblja, ne i prethodnih (jer je obračun kamata jednostavan), što je zapravo ponovljena situacija iz prvog razdoblja, pa vrijedi

$$k_2 = \frac{1250 \cdot 20}{100} = 250$$

U trećem razdoblju, kao i u prva dva, u glavnicu su uključene kamate tekućeg razdoblja (jer je obračun kamata anticipativan), dok kamate iz prethodnih razdoblja nisu uključene u glavnicu (zbog toga što je obračun kamata jednostavan), pa je glavnica početni iznos bez kamata uvećan za kamate trećeg razdoblja, stoga vrijedi

$$k_3 = \frac{1250 \cdot 20}{100} = 250$$

Konačni iznos na kraju trećeg razdoblja tada je

$$C_3 = C_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 1000 + 250 + 250 + 250 = 1750 .$$

Jednostavan i anticipativan obračun kamata s promjenljivom glavnicom

Kada se osnovna glavnica kao iznos bez kamata ne mijenja intervencijom drugih iznosa, jedino tada je i glavnica za obračun nepromjenjiva, a to zapravo često i ne mora biti slučaj. Slijedi primjer jednostavnog i anticipativnog obračuna kamata s promjenljivom glavnicom.

Primjer B

Netko ulaže početkom svake sljedeće tri godine stvarni iznos od 1 000 kn uz kamatnu stopu 20. Kojim će iznosom raspolagati na kraju treće godine ukoliko je obračun kamata jednostavan i anticipativan?

$k_1 = 250 \quad k_2 = 500 \quad k_3 = 750$ (ukupno 1 500 kn kamata)

Ulog:	1 000	1 000	1 000	
Iznos:	1 000	1 250/2 250	2 750/3 750	4 500
Glavnica:		1 250	2 500	3 750

Glavnica za obračun kamata prvog razdoblja ona je u koju su uključene kamate prvog razdoblja (jer je obračun kamata anticipativan), a to je onda iznos na kraju prvog razdoblja.

Neka je početni iznos $C_0 = 1\,000$. Označimo prvu glavnicu za obračun kamata sa G_1. Zbog gore navedenog vrijedi $G_1 = C_1$.

$$C_1 - C_1 \cdot \frac{20}{100} = 1000 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1000}{0.8} = 1250 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{1250 \cdot 20}{100} = 250$$

Glavnica za obračun kamata drugog razdoblja ona je u koju su uključene kamate drugog razdoblja (jer je obračun kamata anticipativan), a to je onda iznos bez kamata uvećan za kamate drugog razdoblja, ne i prethodnih (jer je obračun kamata jednostavan).

Označimo drugu glavnicu sa G_2. Uloženi iznos na početku drugog razdoblja iznosi 2 000 kn. Na taj se iznos pribrajaju kamate drugog razdoblja i dobije se glavnica G_2 za drugo razdoblje. Dakle vrijedi:

$$G_2 = 2000 + G_2 \cdot \frac{20}{100} \Rightarrow G_2 - G_2 \cdot \frac{20}{100} = 2000 \Rightarrow G_2 = \frac{2000}{0.8} = 2500 \Rightarrow k_2 = \frac{2500 \cdot 20}{100} = 500$$

U trećem razdoblju u glavnicu su uključene kamate tekućeg razdoblja (jer je obračun kamata anticipativan), dok kamate iz prethodnih razdoblja nisu uključene u glavnicu (zbog toga što je obračun kamata jednostavan). Glavnica za obračun kamata trećeg razdoblja stoga je do sada uloženi iznos (3 000 kn) uvećan za kamate trećeg razdoblja koje tek treba izračunati. Zato vrijedi

$$G_3 - G_3 \cdot \frac{20}{100} = 3000 \quad \Rightarrow \quad G_3 = \frac{3000}{0.8} = 3750 \quad \Rightarrow \quad k_3 = \frac{3750 \cdot 20}{100} = 750$$

Konačni iznos na kraju trećeg razdoblja tada je zbroj ukupno uloženog iznosa uvećanog za kamate svih razdoblja.

$$C_3 = 3\,000 + 250 + 500 + 750 = 4\,500$$

Nadovezujući se na tvrdnje iz [8], gdje se razrađivala tvrdnja da se dekurzivni način obračuna kamata može svesti na anticipativni i obrnuto kroz prilagođavanje kamatne stope, treba reći da je ekvivalentan primjer prethodnom primjeru obrađen u [8], samo uz pretpostavku dekurzivnog načina obračuna kamata i kamatnu stopu

25. Da je obračun kamata iz prethodnog primjera bio dekurzivan, a bez prilagodbe kamatne stope, lako se primjećuje da bi kamate iznosile redom 200 kn, 400 kn, 600 kn, pa bi konačna vrijednost iznosila 4 200 kn.

S ciljem izbjegavanja mogućih nesporazuma, prethodnom je usporedbom moguće i na ovom primjeru predočiti razliku između dekurzivnog i anticipativnog načina obračuna kamata.

Zaključne napomene

Čini se da je, u odnosu na druge osnovne modele, spoj jednostavnog kamatnog računa i anticipativnog načina obračuna kamata najzahtjevnije oblikovati kada se radi o primjeni njihovih pretpostavki za slučaj više od jednog (temeljnog) razdoblja obračuna kamata (vidi [1], [3], [4], [6], [7]). To je mogući razlog za suzdržanost u nastojanju da se po tom pitanju model ispravno izvede do kraja (vidi [2] Anticipativni način obračuna kamata, [10] Simple Discount). Ovaj sadržaj pokušaj je objašnjenja odnosno prevladavanja prethodno opisanog problema.

Literatura

1. Branko Relić, *Gospodarska matematika,* HZRIFD, 2002.
2. Đurđica Salamon/Boško Šego, *Matematika za III. razred ekonomskih škola,* Alka script d.o.o., 2004.
3. Vladimir Kadum: *Matematika za 3. razred ekonomskih škola,* IGSA, 2001.
4. Kristina Šorić: *Matematika 3, udžbenik i vježbenica za 3. razred srednje ekonomske škole,* Školska knjiga, 2004.
5. Vesna Erceg, *Gospodarska matematika,* Element, 2008.
6. Jasenka Đurović/Ivo Đurović/Sanja Rukavina/Biljana Janković, *Matematika 3 – udžbenik sa zbirkom zadataka za 3. razred ekonomskih škola,* Neodidacta d.o.o., 2005.
7. Branimir Gruić/Igor Jemrić/Ivan Šutalo/Hrvoje Volarević, *Matematika za ekonomiste i managere,* MATE, 2006.
8. Gordan Nogić, *O jednostavnom, složenom, dekurzivnom i anticipativnom obračunu kamata*, Poučak 30, 63-79.
9. Gordan Nogić, *Jednostavno – složeni kamatni račun*, Poučak 36, 54-61.
10. Petr Zima/Robert. L. Brown, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Mathematics of Finance,* The McGraw-Hill Companies, 1996.
11. Tall & Vinner (1981), *Concept image – concept definition*, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169, 81.
12. http://en.wikipedia.org/wiki/Concept_image_and_concept_definition