

Projekt »Analiza hidrogeoloških istraživanja Hrvatske« financiran od Ministarstva znanosti, tehnologije i informatike Republike Hrvatske

## OPTIMALIZACIJA RASPOREDA I IZDAŠNOSTI BUNARA U POLUZATVORENOM VODONOSNOM SLOJU

Marija HEINRICH-MILETIĆ

Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Pierottijeva 6, 41000 Zagreb, Hrvatska

**Ključne riječi:** Optimalizacija, Linearno programiranje

Opisan je postupak primjene linearnog programiranja za optimalizaciju rada skupine bunara u poluzatvorenom vodonosnom sloju. Predviđena ograničenja u sustavu izražena su rasporedom potencijala (sniženja) vode u bunarima i u sloju te kapacitetom bunara.

**Key-words:** Optimization procedure, Linear programming

In the paper the application of linear programming for optimization of water well field in the semiconfined aquifer is discussed. The algorithm for several constrains including the distribution of head (drawdown) as well as capacity of the wells are foreseen.

### Uvod

U našim se ravničarskim područjima često pretpostavlja međuslojno prihranjivanje vodonosnih slojeva. U takvim slučajevima kod projektiranja crpilišta postavlja se pitanje broja, rasporeda i kapaciteta bunara u odnosu na zadana ograničenja promatranog sustava i njegova okoliša, a s tim u vezi i troškova izvođenja radova. Ograničenja u sustavu mogu biti primjerice: zadane vrijednosti pijezometarskih visina (sniženja) u bušotinama i točkama prostora i/ili količina crpljenja iz pojedinih bunara te implicite parametri porozne sredine.

Za rješenje takvih zadataka predlaže se algoritam procedure optimalizacije rada crpilišta koje je smješteno u neograničenom poluzatvorenom sloju. Isti se postupak može primijeniti i za ograničene vodonosne slojeve uz uvjet, da se utjecaj crpilišta ne osjeća na granici hidrogeološkog sustava. Navedeni algoritam skraćuje i olakšava postupak procjene eksploatacijskih zaliha vode u sloju, oblikovanje crpilišta, a koristi i za procjenu ili određivanje njegovih zaštitnih zona. Postupak obrade algoritma na računalu bit će opisan u posebnom članku.

### Matematička formulacija modela linearnog programiranja

Formulacija modela linearnog programiranja (LP modela) sastoji se u povezivanju modela toka i tehnike optimalizacije. U ovom slučaju model toka čini poluzatvoren vodonosan sloj koji se prihranjuje iz krovinskih naslaga. Podina je nepropusna, a bočne granice sloja protežu se u beskonačnost. Prikaz konceptualnog modela dan je na slici 1.

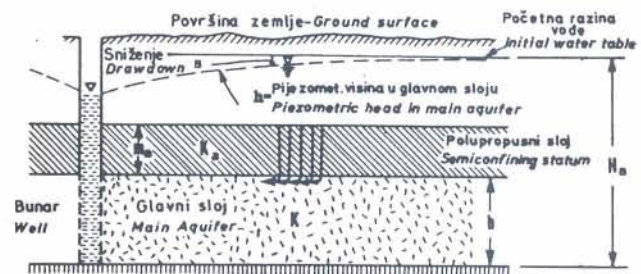
Rješenje modela toka navedenog sustava predložio je De Glee, zatim Jacob (1946) a detaljno opisao Hantush (1964). Ono je oblika:

$$s = \frac{Q}{2\pi T} K_0 \left( \frac{r}{B} \right) \quad (1)$$

Pri čemu su:

- s – sniženje pijezometarske razine podzemne vode u glavnom sloju (m)
- Q – količina crpljenja (utiskivanja) podzemne vode ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
- T – koeficijent transmisivnosti ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
- $K_0$  – modificirana Besselova funkcija prve vrste nul-tog reda
- r – udaljenost između promatranih objekata (m)
- B – faktor procjeđivanja (m)

Kao tehnika optimalizacije ovdje je korištena metoda linearnog programiranja. Općenito, model



Sl. 1. Radijalni tok prema bunaru u poluzatvorenom sloju, prema De Wiest (1965)  
 h – pijezometarska visina u glavnom sloju  
 s – sniženje razine pijezometarske visine glavnog sloja  
 $m_a$  – debljina polupropusnog sloja  
 $K_a$  – vertikalna hidraulička provodljivost polupropusnog sloja

Fig. 1. Radial flow to a well in leaky aquifer, according De Wiest (1965)  
 h – piezometric head in main aquifer  
 s – drawdown in main aquifer  
 $m_a$  – thickness semiconfining layer  
 $K_a$  – vertical hydraulic conductivity semiconfining layer

linearnog programiranja može se u matematičkoj notaciji izraziti kao:

$$\max_x Z = CX \quad (2)$$

$$AX \leq F, X \geq 0 \quad (3)$$

gdje su:

Z – funkcija cilja

C – jednodimenzionalni n-komponentni vektor, vektor koeficijentata funkcije cilja

X – jednodimenzionalni n-komponentni vektor, vektor varijabli odluke

A – matrica utjecaja tipa  $m \times n$ , čijim koeficijentima su definirani odnosi varijabli i parametara sustava

F – jednodimenzionalni m-komponentni vektor čijim komponentama je definirana vrsta ograničenja

m – broj relacija ograničenja

n – broj varijabli odluke

LP modeli primjenjeni na podzemne vode mogu se podijeliti u dvije skupine (Ye h, 1985.). U prvoj skupini vrijednosti funkcije cilja uvjetovane su ograničenjima koja određuju pretežno fizikalne karakteristike sustava, a ulazne varijable su determinističke veličine. S gledišta iskorištavanja zaliha voda traži se maksimalno moguća količina crpljenja. U drugoj skupini, funkcija cilja predstavlja maksimalnu korist uz ulazne varijable koje su dane kao stohastičke veličine (Freeze et al, 1990.).

Uzimajući u obzir prvu skupinu varijabli odluke (X) opisuju se alternativna tehnička rješenja (broj, lokacija i raspored kapaciteta potencijalnih bunara). Komponente vektora C u matematičkoj notaciji predstavljaju težinsku mjeru pojedine varijable odluke u definiranju fizikalnih i/ili gospodarskih čimbenika inženjerskog hidrogeološkog sustava. Koeficijenti matrice A su veličine kojima se putem relacija ograničenja opisuju posljedice određene inženjerske aktivnosti na fizikalno stanje sustava.

Pri opisu stanja u hidrogeološkom sustavu koristi se princip superpozicije, tj. sumiraju se posljedice proizvedene od različitih uzroka koji su međusobno nezavisni. Suma svih pojedinačnih stanja predstavlja stanje sustava kao cjeline.

LP model poluzatvorenog vodonosnog sloja

Model linearnog programiranja sastoji se od rješenja jednadžbe (1), fizikalnih i gospodarskih ograničenja sustava, te linearne funkcije cilja. U ovom radu traži se najpovoljniji broj, raspored i izdašnost bunara uz ograničenja koja se odnose na piježometarske visine (sniženja) podzemne vode i/ili kapacitete pojedinih bunara. Funkcija cilja može biti bilo koja kontinuirana linearna funkcija koja u skladu s modelom simulacije povezuje potencijal (sniženje razine) podzemne vode i kapacitete.

Formulacija funkcije cilja i sustava ograničenja učinjena je u skladu s kriterijima koje je postavio Ye h, (1985.) za prvu skupinu modela optimalizacije. Funkcija cilja definirana je:

$$\max Z = \sum_{r_j \in D} C_j Q(r_j) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

Sustav ograničenja je oblika:

$$\sum_{r_j \in D} a_i(r_j) Q(r_j) \geq h_i \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

$$\sum_{r_j \in D} Q(r_j) \geq Q_p \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$Q(r_j) \leq Q_j^* \quad r_j \in D \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

$$Q(r_j) \geq 0 \quad r_j \in D \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

gdje su: -

N – broj potencijalnih bunara

M – broj točaka zadanih piježometarskih visina

$Q(r_j)$  – količina crpljenja na lokaciji  $r_j$

$a_i(r_j)$  – koeficijent matrice utjecaja, predstavlja promjenu piježometarske visine uslijed jedinične količine crpljenja u točki  $r_j$

$c_j$  – koeficijent kojim je opisana dobit (trošak) od pojedinog bunara

$Q_p$  – ukupna tražena količina crpljenja

$Q_j^*$  – maksimalno dozvoljena količina crpljenja na lokaciji  $r_j$

Koeficijenti matrice utjecaja definirani su relacijom:

$$a_i(r_j) = \frac{1}{2\pi T} K_0 \left( \frac{\Delta r_{ij}}{B} \right) \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M \\ j = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (9)$$

gdje su:

$K_0$  – modificirana Besselova funkcija I vrste nultog reda

$\Delta r_{ij}$  – međusobna udaljenost objekata smještenih na lokacijama  $r_i$  i  $r_j$

$h_i$  – kritična piježometarska visina (sniženje) podzemne vode na lokaciji  $r_i$

T – koeficijent transmisivnosti

B – faktor procjeđivanja

D – domena lokacije bunara

Alternativne formulacije LP problema mogu sadržavati funkciju cilja definiranu kao:

$$\min Z = \sum_{r_j \in D} s(r_j) \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

kojom se minimizira suma sniženja u svim točkama u kojima se planira promjena, a da pritom vrijede ograničenja definirana relacijama (5), (6), (7) i (8).

U procesu projektiranja mogu se primijeniti funkcije cilja dane relacijama (4) i (10), a tehnika optimalizacije može se odnositi na minimalizaciju ili maksimalizaciju funkcije cilja uz odgovarajuću definiciju koeficijentata matrice utjecaja.

## Zaključak

Opisanim LP modelima (relacije 4 do 8) dobije se procjena stanja u hidrogeološkom sustavu za različite sheme crpljenja (utiskivanja) uz zadana ograničenja. Ograničenja mogu biti zadana preko rasporeda potencijala ili kapaciteta bunara. Implicitne moguće je i ekonomska optimalizacija. Prednosti ovih modela u prvom su redu u efikasnosti obrade i jednostavnom postupku pripreme ulaznih podataka.

Rješenje LP modela za konceptualan hidrogeološki model opisan izrazom (1) nije opisano u dostupnoj literaturi. Razlog tome su vjerojatno ograničenja u primjeni samog rješenja jednadžbe toka. No uvjeti primjene su samo prividna ograničenja, jer je uz značajno vertikalno procjeđivanje predložena procedura optimalizacije crpilišta upotrebljiva za neograničene i ograničene poluzatvorene vodonosne slojeve.

Optimalna varijanta ukupne aktivnosti dobije se kao rezultat matematičke procedure, no intervencija istraživača u proces optimalizacije moguća je putem varijabli ograničenja, što obradi osigurava realne rezultate vezane za konkretne hidrogeološke uvjete i uvjete ograničenja okoliša.

Primljeno: 18. I. 1993.

Prihvaćeno: 27. V. 1993.

#### LITERATURA

- De Wiest, R. J. M. (1965): *Geohydrology*. J. Wiley, 272 pp., New York.
- Freeze, R. A., Massmann, J., Smith, L., Sperling, T. & James, B. (1990): Hydrogeological decision analysis. – I. A. Framework. *Groundwater*, Vol 28, No 5, 738–766, New York.
- Hantush, M. S. (1964): Hydraulics of Wells in *Advances in Hydroscience*. ed. V. T. Chow. Academic Press. 378 pp., New York.
- Jacob, C. E. (1946): Radial flow in a leaky artesian aquifer. *Am. Geoph. Union*, Vol. 27, No 2, 198–208, Washington.
- Yeh, W. W-G (1985): Reservoir management and operative models: A State-of-the-art-review. *W R R* 21 (12) 1797–1818, Washington.

### Determination of Optimal Locations and Capacity of Wells in Leaky Aquifer

M. Heinrich-Miletić

The LP models are developed for the designing of water well field in leaky aquifer under specific constrains. The constrains are: desired distribution of ground water potential, maximum deawdowns in the wells or prescribed capacity of the particular well. Implicitly, the cost/benefit analyses could be carried out too.

LP model (relations 2 and 3) is based upon the analytical solution (relation 1), but is useful for the implementation in many cases where the hydraulic conductivity of semipervious layer has high values.