

Projekt »Kriteriji loma materijala izraženi deformacijama kao osnova za analizu stabilnosti podzemnih prostorija« financiran od Ministarstva znanosti, tehnologije i informatike Republike Hrvatske

METODA RUBNIH ELEMENATA

Mladen HUDEC i Lidija FRGIĆ

Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Pierottijeva 6, 41000 Zagreb, Hrvatska

Ključne riječi: Rubni elementi, Podzemne prostorije, Podgrada

Prikazuju se osnovne postavke, dokazi i postupci metode rubnih elemenata (MRE). Iz literature je korišten objavljeni program za proračun naprežanja i deformacija uz podzemne prostorije, pri čemu je obuhvaćeno ravninsko stanje deformacija za elastični kontinuum. Program je proširen predprocesorom za interaktivno zadavanje ulaznih podataka i postprocesorom za grafički prikaz rezultata.

Radni dio programa je također proširen, tako da se u proračun stanja naprežanja i deformacija mogu uključiti utjecaji različitih podgradnih sistema za podzemne prostorije, posebno: slojevi mlažnog betona, čelični lukovi te pasivna i prednapregnuta sidra.

Razvoj ove numeričke metode je vrlo aktualan u novije vrijeme, a posebno će biti aktualna primjena na materijale s nelinearnim svojstvima. Metoda je brža od ostalih numeričkih metoda, i predstavlja efikasnu dopunu tih metoda.

Key-words: Boundary elements, Underground rooms, Support

This paper includes main theses, proofs, and procedures of Boundary Element Method (BEM). The computer program, announced in 1981, for the calculation of stresses and strains around underground opening was used, comprising plane strain state for elastic continuum.

Preprocessor with interactive input and postprocessor for graphic presentation of the results have been added to the program. In the main program the influences of various support systems for underground rooms were added, especially: shotcrete layers, steel arches and passive and prestressed bolts.

This numerical method has been under current development, especially for materials with nonlinear behaviour. The method is faster than other numerical methods and represents an efficient supplementation to them.

Uvodne napomene

Razmjerno nedavno pojavila se nova numerička metoda za rješavanje raspodjele deformacija i naprežanja u okolini podzemnih prostorija, metoda rubnih elemenata MRE (*Boundary element method – BME*). Treba naglasiti da se i u najnovijim uputstvima o konstruktivnom dijelu projekta podzemnih prostorija koja su izrađena u ITA (Internacionalna tunelska asocijacija, 1988) ta numerička metoda preporučuje ravnopravno s metodom konačnih elemenata.

Iako je razvijena najprije za elastični kontinuum, pokazala se prikladnom za rješavanje nelinearnih problema, pa već postoje primjene te metode na pojave plastifikacije, prvenstveno u području metalnih konstrukcija. U novije se vrijeme primjenjuje i u mehanici loma, pa će prema tome biti i vrlo interesantna za razvoj studija klizanja i plastificiranja u stijenama i u tlu.

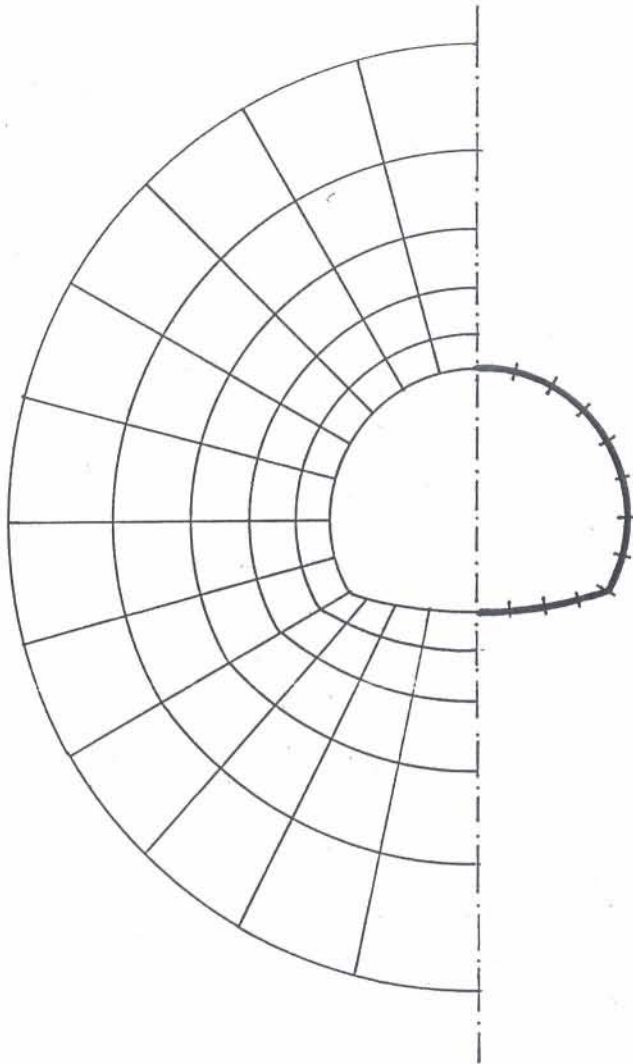
Na većem boju primjera dokazana je ušteda na vremenu zadavanja u procesu projektiranja i adaptiranja oblika konstruktivnih elemenata. Iako suvremena računala raspolažu većim memorijama i imaju vrlo brze procesore, ipak treba napomenuti da za isti problem MRE daje mnogo manje nepoznanica (sl. 1). Autori komercijalnih programa tvrde da je u nekim slučajevima MRE toliko brža od metode konačnih elemenata (MKE), da je odnos utroška vremena čak manji od 1:10. Očigledno se radi o numeričkoj metodi koja će uskoro imati primjenu rješavanju mnogih problema za koje metode konačnih elemenata i konačnih razlika ne daju najpovoljnija rješenja. MRE ne treba shvatiti kao postupak koji je u svim područjima konkurentan ostalim

numeričkim metodama, nego kao postupak koji se još razvija i koji će u nekim područjima dopunjavati postojeće metode.

Objašnjenje metode

Podsjetimo se na povijest metode konačnih elemenata koja je počela od jednostavnih, zornih, inženjerskih objašnjenja odnosa deformacija i sila. Stroži dokazi o egzistenciji i konvergenciji rješenja MKE uvedeni su mnogo kasnije, kada je metoda već široko primjenjivana u inženjerskoj praksi. Možda nije na odmet postupati slično i ovom prilikom. Najbolje je metodu pokušati objasniti na što jednostavniji i pristupačniji način. Najjednostavnije je to na problematiku analize deformacija i naprežanja uz podzemne prostorije. Zadržavamo se za sada samo na idealno elastičnoj sredini i ravninskom problemu, polazeći od poznatih rješenja teorije elastičnosti.

Rješenje Boussinesqua za djelovanje koncentrirane sile na rubu beskonačne poluravnine, koje se svakodnevno koristi u mehanici tla i stijena (Sl. 2a), može se proširiti na djelovanje sile koja djeluje u proizvoljnoj točki beskonačne ravnine (Sl. 2b). Kod toga je potrebno zamisliti da se beskonačna ravnina sastoji od dvije poluravnine od kojih je svaka opterećena silom $F/2$, ali na zamišljenom kontaktu postoje razlike u tangencijalnim pomacima. Nakon što se razlike u pomacima eliminiraju posmičnim silama na liniji kontakta, dobiju se razmjerno jednostavni izrazi koji omogućuju proračun naprežanja u proizvoljnoj točki ravnine, prouzrokovane koncentriranom silom F :

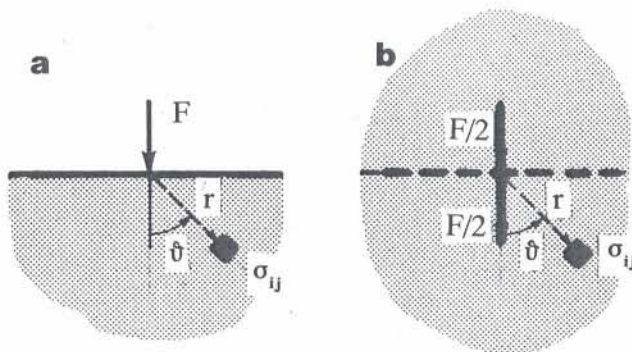


Metoda konačnih elemenata
60 elemenata
78 (203) točaka
156 (406) nepoznanica

Metoda rubnih elemenata
12 elemenata
13 točaka
24 nepoznanice

Sl. 1 Usporedba opsega zadavanja i numeričkog proračuna za MKE i MRE. Podaci u zagradi odnose se na »serendipity« elemente.

Fig. 1 Comparison of the numbers of unknowns values for Finite Elements Method and Boundary Elements Method. Data in brackets refer to »serendipity« elements.



Sl. 2 Rješenje Boussinesq za pojedinačnu silu.
Fig. 2 Boussinesq's solution for concentrated force.

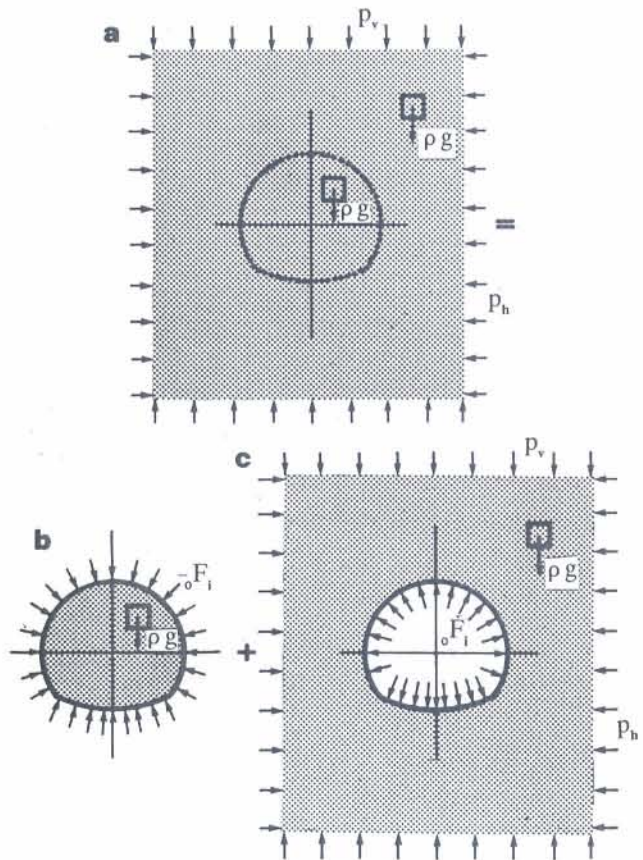
$$\sigma_{11} = \frac{F}{4\pi r} [(1 - \nu) \cos \varphi - 2(1 + \nu) \sin^2 \varphi \cos \varphi]$$

$$\sigma_{22} = -\frac{F}{4\pi r} [(1 - \nu) \cos \varphi + 2(1 - \nu) \cos^3 \varphi] \quad (1)$$

$$\tau_{12} = -\frac{1}{4\pi r} [(1 - \nu) \sin \varphi + 2(1 + \nu) \sin \varphi \cos^2 \varphi]$$

Predznaci naprezanja su ovdje klasični, prema teoriji elastičnosti, tj. pozitivni predznak za vlačno naprezanje. Poissonov koeficijent je označen sa ν , a geometrijske veličine slijede iz slike. Slično je rješenje za silu koja je jednoliko raspodjeljena na konačnu dužinu »c«. Značajnije razlike postoje naravno samo u neposrednoj okolini točke u kojoj je aplicirana sila.

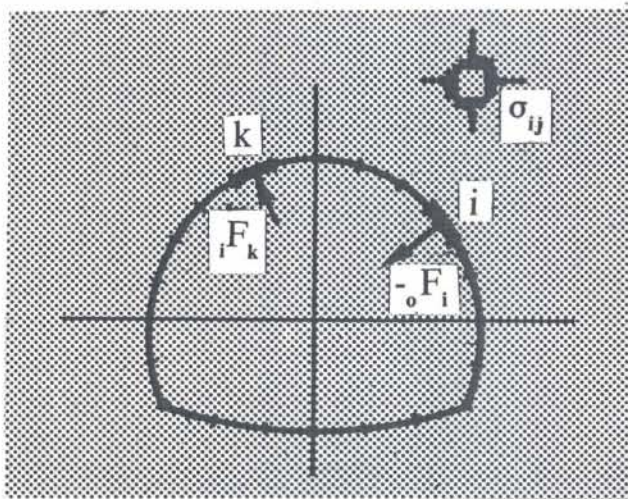
Zamislimo masiv kojeg smatramo beskonačnom ravninom, napregnutom ili homogenim stanjem naprezanja, ili silama vlastite težine ρg . U oba su slučaja poznate komponente tenzora naprezanja σ_{ij} u svakoj točki ravnine. Na sl. 3a pokazana je beskonačna ravnina s budućim otvorom. Cijeli sistem može se zamisliti kao da se sastoji od dva tijela, od tijela koje ispunjava otvor (sl. 3b) i ostatka ravnine (sl. 3c). Na kontaktnoj liniji postoje naprezanja (tlakovi) kojima masiv djeluje na tijelo koje će se ukloniti, ali i suprotno, na masiv djeluju naprezanja istog intenziteta suprotnog smjera kojima to tijelo djeluje na njega. Jednostavnije je ta naprezanja prikazati



Sl. 3 Objašnjenje principa metode rubnih elemenata na primjeru podzemne prostorije

Fig. 3 Explanation of the principle of the Boundary Elements Method on the underground room case.

silama koje su rezultanta napreznja na kratkim odsječcima ruba, kao što je to pokazano na slici. Uklanjanjem tijela koje ispunjava otvor mijenja se stanje napreznja, jer sile koje djeluju na rubu otvora na masiv nisu više uravnotežene. U beskonačnoj ravnini može se na mjestu proizvoljno odabranog elementa ruba otvora »k« djelovati silom ${}_oF_k$ koja je upravo suprotna sili koja je postojala na tom mjestu kontakta (sl. 4). Zbog tog opterećenja će se napreznja promijeniti u cijeloj ravnini, a može ih se proračunati kao zbroj prvobitnih napreznja i utjecaja sile ${}_oF_k$. Na elementu »k« dobili bi rezultat napreznja jednak nuli, ali bi na svim ostalim elementima dobili nove sile u kojima je osim primarne veličine i utjecaj aplicirane sile ${}_oF_k$!



Sl. 4 Djelovanje sile na rubnim elementima.
Fig. 4 Forces acting on boundary elements.

Djelovanje sile F_k na neki drugi element »l« može se prikazati pomoću utjecajnih brojeva α_{lk} :

$$F_{lk} = \alpha_{lk} \cdot F_k, \text{ ali i recipročno } F_{kl} = \alpha_{kl} \cdot F_l$$

Kao konačno rješenje može se prihvatiti ono za koje će ukupna sila koja djeluje na rubni element »k« biti jednaka nuli. Dakle:

$$F_k = \sum_n \alpha_{kl} F_l + {}_oF_k = 0; \quad k, l = 1 \dots n \quad (2)$$

Očigledno je da sile kojima treba djelovati na pojedine elemente, tj. sile F_k , neće radi tog međusobnog utjecaja biti baš jednake silama koje su prvobitno djelovale na promatrani element, tj. ${}_oF_k$.

Rezultat je upravo toliko uvjetnih jednadžbi gornjeg tipa koliko je odabrano elemenata po rubu otvora. Opterećenje jednom silom F_k ima utjecaj u svim ostalim rubnim elementima, pa radi toga postoje svi utjecajni faktori α_{kl} . Matrica jednadžbi biti će potpuno popunjena, što je nezgodno sa stajališta numeričkog rješavanja jednadžbi, međutim jednadžbe su pozitivno definitne i rješenja su stabilna. Kada su jednom sile F_i na rubnim elementima poznate, mogu se izračunati napreznja u bilo kojoj točki ravnine:

$$\sigma_{ij} = {}_o\sigma_{ij} + \sum_n F_k \cdot k\sigma_{ij} \quad (3)$$

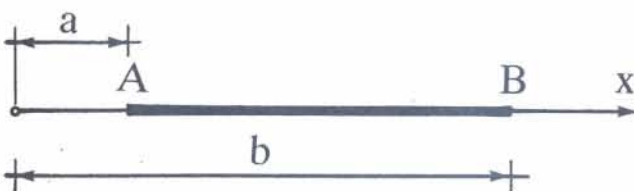
gdje su:

- ${}_o\sigma_{ij}$ – napreznje uslijed prvobitnog stanja
- $k\sigma_{ij}$ – napreznje uslijed sile $F_k = 1, 0$

U ovom objašnjenju hotimice su ispušteni pomaci, jer pri rješavanju intenziteta sile F_k na rubu otvora u beskonačnoj ravnini nije potrebno njihovo uključivanje. Za općenitije rješenje primjene metode rubnih elemenata takvo objašnjenje nije dovoljno.

Brebbia i Dominguez (1992) predlažu slijedeće elementarno objašnjenje vezano na jednodimenzionalni problem prikazan na sl. 5. Zadana je diferencijalna jednadžba za neku fizičku veličinu $z = z(x)$ koju se traži u ograničenom području $a \leq x \leq b$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \lambda z - f(x) = 0 \quad (4)$$



Sl. 5 Osnovne pretpostavke za dokaz metode rubnih elemenata na slučaj jedne nezavisne promjenjive.

Fig. 5 Basic assumptions for the BEM for the case of one independent variable.

Ovdje je $\lambda =$ konstanta, a $f(x)$ može biti ma kakva funkcija koordinate x . Traže se numerička rješenja za z , unutar promatranog područja, s time da su na rubu područja poznate ili neke vrijednosti funkcije z ili njene derivacije $\frac{dz}{dx} = \bar{q}$. Autori metode predlažu da se pretpostavi neka druga funkcija

$$w = w(x)$$

koja je neprekinuta u promatranom području, a isto su tako neprekinute i odgovarajuće derivacije te funkcije. Budući da vodeća diferencijalna jednadžba vrijedi za cijelo promatrano područje, mora i produkt vodeće diferencijalne jednadžbe i odabrane funkcije w biti jednak nuli:

$$\int_a^b \left(\frac{d^2z}{dx^2} + [\lambda z - f(x)] \right) w dx = 0 \quad (5)$$

Nešto više o traženoj funkciji z može se doznati integriranjem za cijelo područje, a to je moguće prema poznatom pravilu integracije:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Nakon prve integracije izgubit će se druga derivacija funkcije z :

$$\int_a^b \left(-\frac{dz}{dx} \frac{dw}{dx} + [\lambda z - f(x)] w \right) dx + \left[\frac{dz}{dx} w \right]_a^b = 0 \quad (6)$$

Nakon druge integracije dobiva se:

$$\int_a^b \left(z \frac{d^2w}{dx^2} + [\lambda z - f(x)] w \right) dx + \left[\frac{dz}{dx} w \right]_a^b - \left[z \frac{dw}{dx} \right]_a^b = 0 \quad (7)$$

Uz uvrštavanje vrijednosti funkcije $\bar{z} = z_{x=a}$ na jednom rubu i njene derivacije $\bar{q} = \frac{dz}{dx_{x=b}}$ na drugom rubu područja, te uz supstituciju $q = \frac{dz}{dx}$ za cijelo područje, dobiva se:

$$\int_a^b \left(z \frac{d^2 w}{dx^2} + [\lambda z - f(x)] w \right) dx + [\bar{q} w]_{x=b} - [q w]_{x=a} - \left[z \frac{dw}{dx} \right]_{x=b} + \left[\bar{z} \frac{dw}{dx} \right]_{x=a} = 0$$

Ponovnim parcijalnim integriranjem, s time da se funkcija w i njene derivacije shvate kao derivacije (dv), dobiti će se nakon uvrštavanja vrijednosti na granicama:

$$\int_a^b \left(- \frac{dz}{dx} \frac{dw}{dx} + [\lambda z - f(x)] w \right) dx + \left[z \frac{dw}{dx} \right]_{x=b} - \left[z \frac{dw}{dx} \right]_{x=a} + [\bar{q} w]_{x=b} - [q w]_{x=a} - \left[z \frac{dw}{dx} \right]_{x=b} + \left[\bar{z} \frac{dw}{dx} \right]_{x=a} = 0 \quad (8)$$

Nakon druge parcijalne integracije, na isti se način dobiva:

$$\int_a^b \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + [\lambda z - f(x)] w \right) dx - [(q - \bar{q}) w]_{x=b} + \left[(\bar{z} - z) \frac{dw}{dx} \right]_{x=a} = 0 \quad (9)$$

Prvi član je isti kao i u početku i jednak sam za sebe nuli, pa se problem numeričkog rješavanja diferencijalne jednačbe svodi na rješavanje rubnih uvjeta preko sistema jednačbi:

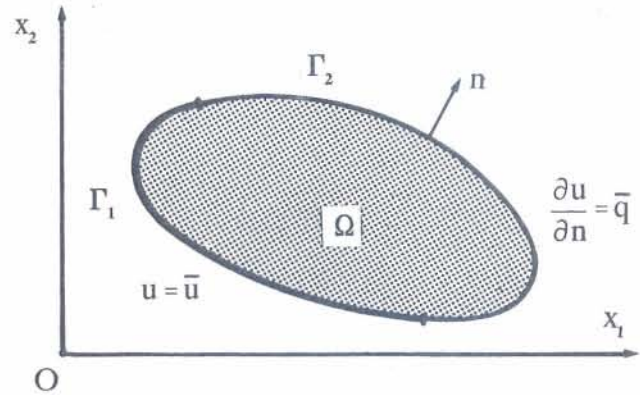
$$\left[\left(\frac{dz}{dx} - \bar{q} \right) w \right]_{x=b} - \left[(\bar{z} - z) \frac{dw}{dx} \right]_{x=a} = 0 \quad (10)$$

Nepoznate veličine su $z_{x=a}$ i $\frac{dz}{dx_{x=b}}$, a za vrijednosti uvedene funkcije w i $\frac{dw}{dx}$ može se odabrati neko poznato opće rješenje zadane diferencijalne jednačbe.

Slično se dokazuje i rješenje za Poissonovu (a i Laplaceovu) diferencijalnu jednačbu za dvodimenzionalni prostor u području Ω :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - f = 0 \quad \text{ili} \quad \nabla^2 u - f = 0 \quad (11)$$

Prilikom provedbe numeričkog postupka potrebno je poznavanje vrijednosti u u području ruba Γ_1 , ili vrijednosti derivacija u smjeru normale na rub tj. $\frac{\partial u}{\partial n}$ u točkama područja ruba Γ_2 (sl. 6).



Sl. 6 Rubni uvjeti za Poissonovu i Laplaceovu diferencijalnu jednačbu.

Fig. 6 Boundary conditions for Poisson's and Laplace's differential equations.

Rješenje za elastični kontinuum

Ovo je zapravo proširenje ranije pokazanog rješenja za koncentriranu silu u ravnini. Polazi se od osnovnih postavki i uvjeta teorije elastičnosti. Jednačbe ravnoteže pisane u tenzorskom obliku s indeksnim oznakama glase:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (12)$$

$$b_i = q a_i$$

Uobičajeno je deriviranje po koordinati označiti $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$. Naprezanje na plohi čija je normala definirana normalom \bar{n} iznose:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad n_j = \cos(\bar{n}, x_j) \quad (13)$$

Za dio ruba Γ_2 na kojem je zadano vanjsko opterećenje \bar{p} bit će:

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i$$

Pomaci točaka kontinuum definirani su vektorom pomaka \bar{u} ili komponentama tog vektora u_i . Na dijelu rubnog područja Γ_1 zadane su komponente vektora pomaka \bar{u}_i . Komponente tenzora deformacija vezane su s vektorom pomaka relacijama:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (14)$$

Konstitutivna jednačba za elastični kontinuum, zapravo prošireni Hookeov zakon, glasi:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} + \epsilon_{ij} \right) \quad (15)$$

gdje su:

δ_{ij} – Kronekerov vektor,
 $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ – volumenska deformacija,
 E – modul elastičnosti,
 ν – Poissonov koeficijent.

Uvođenjem konstitutivnih jednačbi u uvjete ravnoteže dobivaju se poznate Navierove jednačbe:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,jl} + u_{l,jj} + \frac{1}{G} b_l = 0 \quad (16)$$

pri čemu je uvršten modul smicanja G

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)}$$

Modul smicanja G jednak je Lameovoj konstanti μ . Kod Kelvinovog rješenja za opterećenje jediničnom koncentriranom silom u smjeru jediničnog vektora e_1 može se pisati:

$$b_l = \Delta^l e_1 \quad (17)$$

Koristi se Galjerkinov postupak s vektorom funkcija Φ koje zadovoljavaju uvjete pomaka za rubove područja (ovdje za $\bar{r} = \infty$). Pomaci su na cijelom području definirani kao:

$$u_j = \Phi_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{m,jm} \quad (18)$$

Navierova jednadžba ravnoteže uz uvođenje tako definiranih pomaka glasi:

$$\Phi_{l,mmjj} + \frac{1}{G} \Delta^l e_1 = 0$$

ili

$$\nabla^2 (\nabla^2 \Phi_l) + \frac{1}{G} \Delta^l e_1 = 0 \quad (19)$$

Za $\nabla^2 \Phi_l$ dobivaju se slijedeća rješenja:

$$\nabla^2 \Phi_l = \frac{1}{4\pi r G} e_l; \text{ (trodimenzionalno)}$$

$$\nabla^2 \Phi_l = \frac{1}{2\pi G} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_l; \text{ (dvodimenzionalno)}$$

Kao konačno rješenje za Galjerkinovu funkciju Φ dobiva se:

$$\Phi = \frac{1}{8\pi G} r; \text{ za trodimenzionalni kontinuum.}$$

$$\Phi = \frac{1}{8\pi G} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right); \text{ (dvodimenzionalni)} \quad (20)$$

Zbog međusobne neovisnosti djelovanja koncentriranih sila može se za pomake napisati:

$$u_k^* = u_{1k}^* e_1 \quad (21)$$

Konačno rješenje za pomak u točki »k« uslijed sile koja djeluje u točki »l« dobiva se za dvodimenzionalni kontinuum u obliku:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + \frac{r_l}{r} \frac{r_k}{r} \right] \quad (22)$$

a za naprezanja, odnosno opterećenja na rubu:

$$p_{lk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{lk}] + (1-2\nu) \left(n_l \frac{r_k}{r} - n_k \frac{r_l}{r} \right) \right] \quad (23)$$

Ovdje su r_k i r_l projekcije vektora položaja u smjerove koordinatnih osi, a n_l i n_k kosinusi smjerova normala u točkama »l« i »k«.

Metodu rubnih elemenata za elastični kontinuum može se dokazati slično kao što je to pokazano za slučaj funkcije jedne varijable. Vodeća diferencijalna jednadžba ravnoteže vrijedi za cijelo područje Ω :

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0$$

Rubni uvjeti su:

$$u_k = \bar{u}_k, \text{ za područje ruba } \Gamma_1$$

$$p_k = \bar{p}_k, \text{ za područje ruba } \Gamma_2$$

Za cijelo područje će vrijediti:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0 \quad (24)$$

Kao funkcija u_k^* uvodi se ranije pokazano rješenje za pomake u elastičnom kontinuumu. Ovaj bi se izraz u tom slučaju mogao shvatiti i kao stavak o virtualnom radu, pisan na nešto neobičajan način. Parcijalnom integracijom, kako je objašnjeno na funkciji jedne varijable, nakon prve integracije dobiva se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma$$

odnosno nakon druge integracije:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j} u_k^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (25)$$

Kada se ponovo dva puta integrira, s time da se sada članovi koji proističu od uvedenog rješenja za koncentriranu silu shvate kao derivacije, dobiva se konačno:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (26)$$

Lijeva strana je početni uvjet i jednaka je nuli, pa preostaje samo desni dio koji predstavlja osnovnu uvjetnu jednadžbu za primjenu metode rubnih elemenata na elastični kontinuum.

I ovaj izraz, kao i opće rješenje za pomake i naprezanja za koncentričnu silu u beskonačnom kontinuumu ima singularitet u hvatištu silu i daje u toj točki beskonačno velika naprezanja i neodređene pomake. Singularitet se može izbjeći tako da se u hvatištu doda polovina kugle (odnosno polovina kružnice za ravninsko stanje) s radijusom $r = \varepsilon$ i nakon proračuna pomaka i naprezanja u hvatištu svede radijus na zanemarivu dimenziju. Ako se sada izdvoje projekcije vektora pomaka i komponenta

rubnog opterećenja u smjeru koordinatnih osi »i« i »k«, izdvajajući smjer pomaka »i« za promatranu točku, dolazi se do izraza koji je definirao Somigliana:

$$u_i^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega \quad (27)$$

Pri prelasku na diskretizaciju ruba, tj. na numeričko rješavanje, mora se primijeniti matricni oblik formuliranja osnovnog rješenja, pa će pomaci i naprezanja osnovnog rješenja za ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacija biti izraženi matricama 2×2 . Pomaci, rubna opterećenja i volumenske sile imaju pri tome formu matricnih vektora s dva člana:

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}; p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}; b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Osnovna jednadžba dobiva time oblik:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (29)$$

Član c^i ima također matricnu definiciju (2×2), a vrijednost članova te matrice ovisi o tipu točke u kojoj se proračunava pomak u . Za sve točke ruba matrica ima samo dijagonalne članove jednake jedinici, osim za onu rubnu točku u kojoj djeluje sila (zbog granične vrijednosti polukugli!) gdje su dijagonalni članovi jednaki $1/2$. Samo za točke u kojima se sastaju elementi pod oštrim kutovima postoje sva četiri člana matrice c .

Integrali po rubu promatranog područja Γ , odnosno po području Ω za volumenske sile, mogu se prikazati u obliku suma integrala po svim elementima ruba područja. Za rubne točke mogu se zbrojiti doprinosi prva dva člana, pa se dobiva:

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j + \sum_{s=1}^M B^{is} \quad (30)$$

I ovdje se primjenjuje matricni oblik pisanja:

$$H U = G P + B \quad (31)$$

U vektorima U i P postoje i nepoznate i zadane vrijednosti pomaka odnosno opterećenja rubnih elemenata, pa se jednadžba na kraju sređuje tako da se sve nepoznate veličine prebace na lijevu stranu, a zadane na desnu i tako dobiva konačni oblik sistema linearnih jednadžbi:

$$A X = F + B \quad (32)$$

Treba napomenuti da je za razliku od sistema jednadžbi koje se dobivaju metodom konačnih razlika i metodom konačnih elemenata ovdje matrica koeficijentata potpuno popunjena, ali je pozitivno definitna, jer su dijagonalni članovi uvijek pozitivni i mnogo veći od ostalih. Raspodjela pomaka i opterećenja na elementima ruba može se pretpostaviti konstantna, linearna ili drugog stupnja i o tome će ovisiti trajanje numeričkog rješavanja.

Primjena metode rubnih elemenata

U novije su se vrijeme pojavili komercijalni programski paketi koji omogućuju primjenu metode rubnih elemenata (MRE) na inženjerske konstrukcije, koji uzimaju u obzir i nelinearne probleme vezane uz plastifikaciju, geometrijsku nelinearnost i deformacije ovisne o trajanju opterećenja, ali nažalost vezane za sada samo na svojstva metalnih konstrukcija. U prvobitno objavljenom obliku metoda uzima u obzir deformacije i raspodjelu naprezanja samo za elastični kontinuum, onako kao što je to izloženo u uvodu.

Metoda rubnih elemenata je naročito povoljna za rješavanje raspodjele naprezanja u problemima poluprostora ili poluravnine. Primjer prikazan na sl. 1 prikazuje otvor podzemne prostorije i način diskretizacije metodom konačnih elemenata i metodom rubnih elemenata. Da bi se dovoljnom točnošću dobila naprezanja uz rub otvora treba konačnim elementima obuhvatiti područje promjera barem od pet do deset većeg od promjera otvora. Treba formirati prikladnu mrežu elemenata, koja s jedne strane mora što točnije modelirati formu otvora, a s druge strane na dovoljnoj udaljenosti od otvora uspostaviti stanje slobodnog ruba ili neporemećenog masiva. Prikladna mreža čvorova i elemenata imat će barem stotinjak točaka i dvostruko toliko nepoznatih pomaka. Postoje programi MKE koji imaju ugrađene generatore mreže točaka i elemenata, tako da je potreban mali broj ulaznih podataka, jer programski paket rješava sve ostalo. Razvijen je i velik broj tipova elemenata, tako da se pomoću MKE mogu modelirati gotovo svi problemi mehanike kontinuuma i teorije konstrukcija.

Metoda rubnih elemenata pokazuje neke prednosti koje već sada tu metodu stavljaju uz bok MKE, ne kao konkurentnu u svim područjima, nego kao metodu koja je komplementarna s njome i koja ima prednosti pri rješavanju nekih specifičnih problema. Na primjeru otvora podzemne prostorije treba prema MRE zadati samo elemente ruba otvora, dakle za slučaj poluravnine neuporedivo manje podataka.

Prigovoru da elastični kontinuum ne odražava stvarno stanje u stijenskom masivu može se suprotstaviti niz argumenata:

- samo u iznimnim slučajevima poznata su nelinearna mehanička svojstva stijene prije početka izgradnje podzemnih prostorija. Uobičajeni prethodni istražni radovi su petrografsko i mehaničko ispitivanje jezgri dobivenih iz bušotina (zapravo kamena, a ne stijene). Geofizička mjerenja daju samo prosječne vrijednosti nekih konstanti, a to nije dovoljno za definiranje elastičnih i nelinearnih karakteristika masiva,
- stanje naprezanja koje proističe iz rješenja teorije elastičnosti slijedi iz uvjeta kompatibilnosti deformacija i naprezanja. Takvo stanje je potpuno točno za cijelo područje osim za područja u kojima je nastupila plastifikacija ili viskozno tečenje, pa može poslužiti kao osnova za provjeru stabilnosti. Pojave relaksacije i popuštanja dovode uvijek do smanjivanja ekstremnih naprezanja, tako da je elastično rješenje redovito na strani veće sigurno-

sti. Čak i za armirano betonske konstrukcije primjenjuje se obično proračun raspodjele unutrašnjih sila prema rješenjima za elastične sisteme, iako su nelinearna svojstva betona vrlo dobro poznata,

- raspodjela naprezanja po teoriji elastičnosti za probleme koncentracije naprezanja uz otvore podzemnih otvora ne ovisi za ravninsko stanje uopće o mehaničkim svojstvima materijala. Jedino je veličina deformacija ovisna o vrijednostima Youngovog modula elastičnosti i Poissonovog koeficijenta.

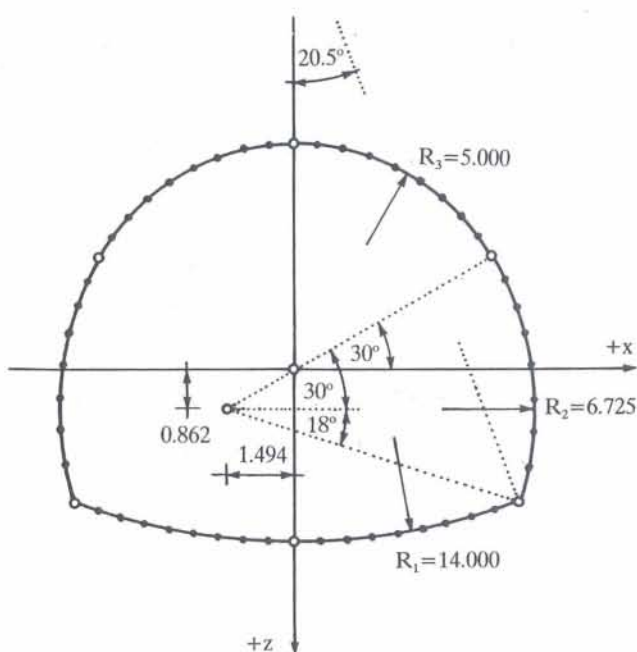
Program rubni

Kompjutorski program za rješenje problema raspodjele naprezanja uz otvore podzemnih prostorija po principima metode rubnih elemenata (MRE) objavili su Hoek i Brown (1982) i taj smo program prihvatili kao osnovu za dalju razradu, upotpunjavanje i adaptaciju za primjenu i nastavu. Program je raden prema modelu s konstantnim pomacima i naprezanjima na dužini jednog elementa. U daljnjem se tekstu prikazuje definiranje problema uz korištenje tog razrađenog programa.

Geometrijska definicija ruba otvora.

Zadani rub otvora podzemne prostorije treba opisati umjerenim brojem kratkih elemenata. Već s dvadesetak elemenata na polovini profila dobivaju se zadovoljavajući rezultati. Budući da se kontura otvora obično definira ravnim odsječcima i segmentima kružnica ili elipsa, u program je ugrađen generator elemenata kao dijelova takvih segmenata. Primjer profila cestovnog tunela pokazan na sl. 7 sastoji se od tri kružna luka, a postoji simetrija oko osi »z«, što pojednostavnjuje zadavanje.

Program prihvaća podatke koji geometrijski definiraju pojedine segmente. Za ravne segmente to su



Sl. 7 Primjer zadavanja konture otvora tunela.
Fig. 7 Example of determining the tunnel opening contour.

koordinate početnih i završnih točaka ravnih segmenata i broj elemenata u segmentu. Za segmente kružnica i elipsa zadaju se koordinate središta, dužine poluosi, početni i završni kutovi segmenta, orijentacija elipse i naravno broj elemenata u segmentu. Segmenti se dijele na elemente jednakih dužina. Ako je zadan samo jedan otvor, mogu se u programu generirati koordinate točaka u masivu i to tako da se iz sredine rubnih elemenata povlače okomice, pa se koordinate točaka određuju na odabranim razmacima od ruba otvora.

U programu se izračunavaju zamjenjujuće sile koje prema zadanim opterećenjima djeluju na rubne elemente. Kao izlazni podaci dobivaju se intenziteti i smjerovi glavnih naprezanja, te pomaci u svim točkama.

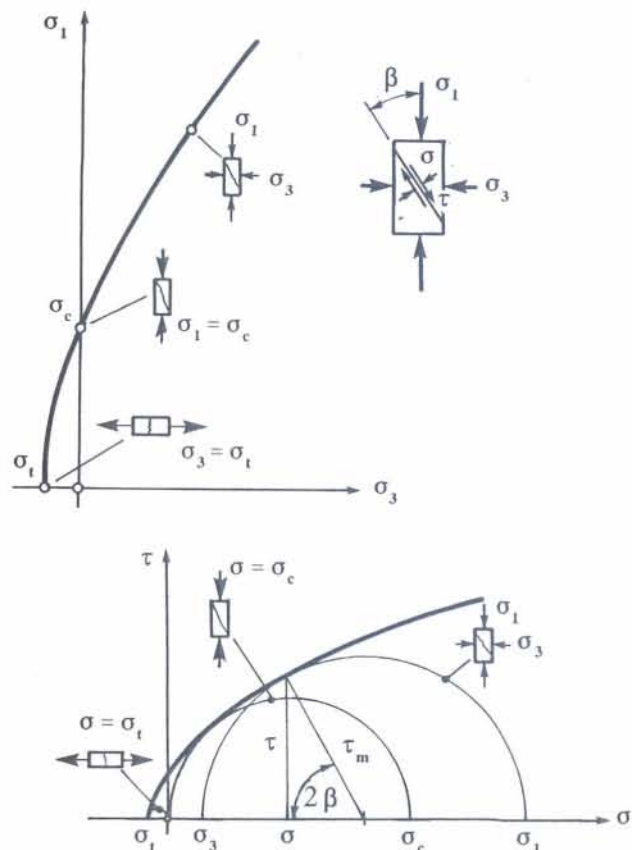
Materijalne konstante.

Za masiv treba zadati modul elastičnosti i Poissonov koeficijent, i to je dovoljno da bi se izračunala naprezanja i pomaci. U program je ugrađena i kontrola loma po kriteriju koji su definirali Hoek i Brown (sl. 8), a glasi:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{m \sigma_c \sigma_3 + s \sigma_c^2} \tag{33}$$

gdje su:

- σ_1, σ_3 - veće odnosno manje tlačno glavno naprezanje
- σ_c - jednoaksijalna tlačna čvrstoća stijene
- m, s - konstante masiva



Sl. 8 Hoek-Brownov kriterij loma.
Fig. 8 Hoek-Brown's failure criteria.

Fizikalni se smisao konstanti može dobiti ako se razmotre karakteristična stanja jednoaksijalnog tlačnog ili vlačnog naprezanja. Stanje $\sigma_3 = 0$ tj. jednoaksijalni tlak daje:

$$\sigma_1 = \sqrt{s \sigma_c^2} \quad (34)$$

Iz ovoga slijedi da bi za masiv bez pukotina bilo $s = 1$, dok je za realne uvjete $0.05 \leq s \leq 1.0$, ovisno o stanju masiva.

Slično se iz uvjeta $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_T$ («*tension*» = vlačna čvrstoća) može dobiti koeficijent m . Za realne masive ta se vrijednost kreće između 5 i 20, ovisno o raspucalosti stijene. Obje konstante su bezdimenzionalne i njihova vrijednost je neovisna o mjernoj jedinici naprezanja.

Provjera kriterija loma za svaku točku omogućava jedino da se uoče područja u kojima može doći do vlačnog loma odnosno do klizanja. Stanje se naprezanja u programu ne mijenja, ono ostaje prema kriterijima elastičnih deformacija. Prividni koeficijent sigurnosti predstavlja odnos izračunatog naprezanja σ_1 i onog prema kriteriju loma, a ima samo indikativni smisao.

Opterećenja masiva u okolini otvora

Stanje naprezanja okoline podzemnog otvora ovisi o opterećenju masiva silama vlastite mase i direktno opterećenja ruba otvora silama koje nastaju uslijed djelovanja podgradnog sistema. Opterećenja koja se mogu pojaviti uz tunelske otvore jesu:

- opterećenje silama vlastite mase,
- jednoliko polje naprezanja zadano intenzitetima vertikalnih i horizontalnih glavnih naprezanja (tlakova) p_z i p_x [kN/m^2],

Vertikalna naprezanja ovise direktno o dubini ispod gornje površine:

$$p_z = \rho g (z + z_0) \quad (35)$$

gdje su:

ρ = gustoća stijene [t/m^3]

$g = 9.81$ [m/s^2]

z_0 = dubina ishodišta koordinatnog sistema

z = lokalna koordinata

Horizontalna komponenta naprezanja može se zadati odnosom horizontalne i vertikalne komponente naprezanja:

$$p_x = K p_z \quad (36)$$

K je odnos horizontalnog i vertikalnog naprezanja u masivu.

- Opterećenje ruba otvora podzemne prostorije iznutra ostvaruje reaktivno opterećenje podgrade i opterećenje pasivnim ili aktivnim sidrima, koja također sudjeluju u podgradnom sistemu. Intenzitet opterećenja podgradom i pasivnim sidrima (u idealno elastičnoj sredini) ovisi samo o ostvarenim deformacijama podgradnog sistema, pa je sistem koji čine stijena i podgrada statički neodređen.

U suvremenim pogledima na teoriju čeličnih i armirano betonskih konstrukcija kao osnova za proračun prihvaćaju se granična stanja deformacija i naprezanja. Graničnim se stanjima smatraju ona kod

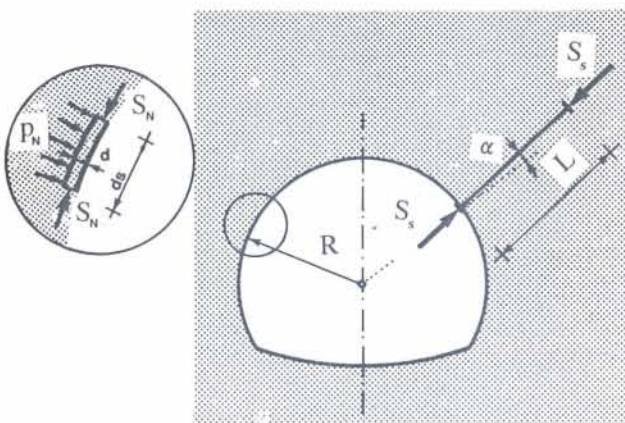
kojih dolazi do velikih deformacija i plastifikacije betonskog presjeka i čelika, tj. stanja kada nije više moguće povećavati opterećenje bez opasnosti od pretjerano velikih deformacija ili loma. Stanje oko podzemnih prostorija je potpuno analogno situaciji u armirano betonskim presjecima, jer se deformacije stijene povećavaju tako dugo dok se ne uravnoteži stanje naprezanja u stijeni i reaktivni tlak podgrade, uz izjednačavanje deformacija na kontaktu oba sistema. Deformacije podgrade pri tome obično dosižu i prelaze granice elastičnog ponašanja, pa se podgrada nalazi u istom stanju kao i presjeci armirano-betonskih konstrukcija.

U sklopu koji sačinjavaju podgrada i stijena donekle su poznata mehanička svojstva elemenata podgrade i njihova nosivost, ali pouzdaniji podaci o mehaničkim svojstvima stijene mogu se dobiti u pravilu tek nakon iskopa i vremena potrebnog da se stijena temeljito ispita. U prethodni proračun sklopa stijena – podgrada ulazi se radi toga s graničnom nosivošću podgrade i prethodno dobivenim ili pretpostavljenim svojstvima stijene.

Podgrađivanje slojem mlaznog betona.

Sloj betona prati zakrivljeni rub profila podzemne prostorije. Element luka podgrade betonom opterećen je tlakom stijene izvana i unutrašnjim normalnim silama u luku, koje imaju smjer tangente na luk (sl. 9). Uvjet ravnoteže projekcija u smjer okomice na luk daje:

$$p_N ds - 2 S_N \sin(d\varphi/2) = 0 \quad (37)$$



Sl. 9 Djelovanje podgradnih sistema na rub otvora.

Fig. 9 Influence of the support systems on the opening boundary.

Ovdje su:

P_N – opterećenje kojim luk podgrade djeluje na intrados podzemne prostorije [kN/m^2]

ds – dužina elementa luka podgrade

S_N – normalna sila u luku podgrade [kN/m]

$d\varphi$ – kut između dva bliska presjeka

Budući da je

$$ds = R d\varphi$$

gdje je R radijus zakrivljenosti luka podgrade [m], te da se za $\sin(d\varphi/2)$ može uvrstiti da je jednak $d\varphi/2$, dobiva se konačno:

$$p_N = S_N/R \quad (38)$$

Za veličinu S_N treba uzeti graničnu nosivost sloja mlaznog betona zadane debljine d [m]:

$$S_N = d \sigma_c / \gamma \quad [\text{kN/m}] \quad (39)$$

Ovdje su:

σ_c = tlačna čvrstoća mlaznog betona u $[\text{kN/m}^2]$

γ = faktor sigurnosti koji se može uzeti kao za stalno opterećenje u inženjerskim konstrukcijama ($\gamma_G = 1.35$), ali uvećan za utjecaj raznolikosti materijala (γ_M za čelik = 1.1). Trebalo bi prema tome faktor sigurnosti pretpostaviti s:

$$\gamma = 1.3 * 1.1 = 1.50$$

Ako je sloj mlaznog betona armiran s mrežom presjeka A_a $[\text{m}^2/\text{m}]$, onda se nosivost S_N povećava za doprinos armature:

$$S_N = (d \sigma_c + A_a f_y) / \gamma \quad (40)$$

Ovdje je f_y granica popuštanja primijenjenog čelika $[\text{kN/m}^2]$. Podgrada slojem betona prouzrokuje samo normalno opterećenje ruba otvora.

Podgrada krutim čeličnim lukovima.

Slično kao i za armaturu u sloju mlaznog betona može se nosivost krutih lukova izračunati kao:

$$S_N = (A_L f_y / e) / \gamma \quad (41)$$

Upotrebene oznake:

f_y – granica popuštanja čelika $[\text{kN/m}^2]$ ili $[\text{kN/cm}^2]$

A_L – presjek luka u $[\text{m}^2]$, odnosno $[\text{cm}^2]$, ovisno o dimenziji f_y

Podgrada sidrima.

Pod pojmom aktivnih sidara podrazumijevaju se sidra sa sidrišnim bravama koje se razupiru o stijene bušotine u sidrištu, a na ušćima bušotina su pritegnuta. Sila koju prenose takva sidra jednaka je sili pritezanja glave na rubu otvora, a nakon što se ostvari dovoljno produljenje sidra, sila će biti jednaka nosivosti sidrišne brave. Aktivna sidra su i prednapregnuta sidra koja se usidruju u sidrišnu zonu silom prednapreznjanja. Osim tlačne sile na obodu otvora, aktivna sidra prouzrokuju u sidrištu suprotnu (reaktivnu) silu koja je orijentirana prema otvoru. Djelovanje sidra prema tome definiraju dvije jednake nasuprotne sile, jedne na intradosu otvora i druge u sredini sidrišta (sl. 9). Obzirom na veliki kapacitet plastičnih deformacija materijala šipkastih i prednapreznutih sidara može se kao granična prihvatiti sila koju može preuzeti sidro uz napreznjanje koje je jednako granici velikih deformacija f_y :

$$S_S = A_S f_y / \gamma \quad (42)$$

Ovdje je A_S presjek sidra u $[\text{cm}^2]$. Za proračun treba silu sidra S_S umanjiti za faktor sigurnosti, koji u ovom slučaju može biti nešto manji od ranije preporučenog 1.50. Program uzima u obzir obadvije sile kojima sidro djeluje na stijenu.

Osim intenziteta sile treba definirati dužinu sidra i smjer od normale na intrados prostorije. Dužina sidra računa se od točke djelovanja na unutrašnjem rubu do sredine sidrišne zone. Smjer se zadaje u stupnjevima od okomice u matematski pozitivnom

smislu. U programu se pretpostavlja da je hvatište sidra u masi na površini koja je jednaka i paralelna s opterećenim rubnim elementom.

Pod pasivnim sidrima podrazumijevaju se sidra od čeličnih šipki koja se ugrađuju kao »perfo« sidra ili sidra koja se ulažu u prethodno izbušene bušotine i injektiraju. Sidra se aktiviraju tek kada se produlje zbog toga što prate deformacije stijene. Granična nosivost sidra je ona kod koje se postiže granica popuštanja čelika.

Reaktivno kontinuirano opterećenje koje proizvodi podgrada sidrima na stijenu, proračunava se unutar programa. Budući da jednom sidru pripada površina oboda otvora jednaka A_1 , a treba zadati ukupnu silu koja djeluje na jedan element, mora se zadati sila koja pripada jednom rubnom elementu, tj.

$$S_{1S} = S_S * A_e / A_1 \quad [\text{kN}] \quad (43)$$

A_1 – površina oboda tunela koji pripada jednom sidru $[\text{m}^2]$

A_e – površina rubnog elementa $[\text{m}^2]$

Korištenje programa.

Da bi se korisnicima programa pojednostavnilo rad s proširenim programom (Hudec et al. 1992), sastavljen je menu koji omogućuje izbor:

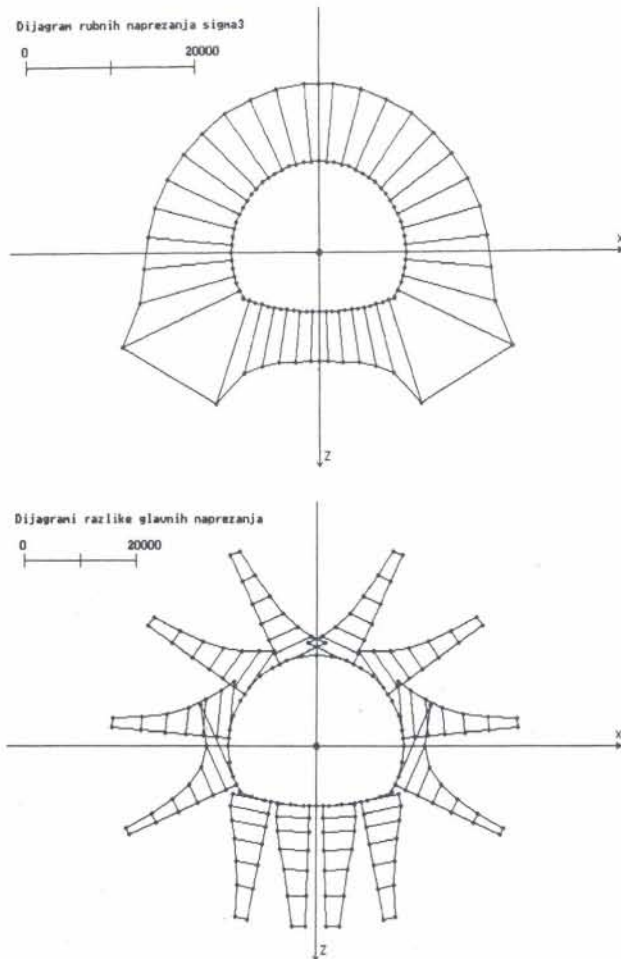
- zadavanje ulaznih podataka u posebnom pretprocesoru,
- obrada sloga ulaznih podataka u glavnom programu. Glavni program formira dva zapisa, jedan s numeričkim rezultatima i drugi s podacima za grafički prikaz rezultata,
- ispis rezultata,
- iscertavanje dijagrama pomaka, napreznjanja i prividnog koeficijenta sigurnosti.

Pretprocesor je koncipiran interaktivno. Budući da glavni program prima formatizirane podatke određenim redosljedom, pretprocesor postavlja pitanja na koja treba odgovoriti upisivanjem tekstovnog ili brojčanog podatka.

Uvedena je i opcija »verifikacija« da bi se u nekom postojećem slogu podataka omogućilo mijenjanje pojedinih ulaznih podataka. Kod te se opcije ispisuju podaci iz ranije zadanog sloga podataka, naravno s opisom značenja, s time da se bilo koji ranije zadani podatak može mijenjati u toj fazi. Na kraju pretprocesor iscertava geometriju zadanog otvora i točaka u masivu.

Ispisivanje i pregled numeričkih rezultata na ekranu moguć je pozivom bilo kojeg tekstovnog procesora, a za ispis na štampač mogu se odabrati samo oni dijelovi koji su korisniku interesantni.

Posebno su korisni grafički prikazi rezultata. Glavni program sprema u poseban zapis geometrijske podatke sistema i podatke o komponentama tenzora napreznjanja za sve obuhvaćene točke, tako da program CRTARUB može te podatke prihvatiti i prema svojem meniju iscertati na ekranu (i štampaču) dijagrame pomaka ili dijagrame napreznjanja. Pri tome se podaci za točke na rubu otvora iscertavaju okomito na rub, a mogu se iscertati i dijagrami napreznjanja uzduž radialnih pravaca. Na slici 10 pokazani su neki od takvih dijagrama.



Sl. 10 Dijagrami cirkularnih naprezanja na rubu otvora i dijagrami razlike glavnih naprezanja.

Fig. 10 Diagrams of circular stresses on the boundary and of the principal stresses difference.

Boundary Element Method

M. Hudec and L. Frgić

Boundary element method (BEM) is relatively new numerical method of solving the stress and strain distribution in the continuum mechanics. The method supplies the existing numerical methods – the Finite difference method (FDM) and the Finite element method (FEM).

The method is based on the solution for infinite elastic continuum loaded with locally concentrated force or by the load distributed on the finite area. This solution can be applied on the boundary area and the problem solution oriented to satisfy boundary conditions on the given contour of observed area. The method is acceptable in the defining input data, because it is necessary to give only the condition of loads and deformations on the geometrically given contours.

The number of input data for BEM is incomparably less than the analogous number of data for the FDM and FEM. Unknown forces and displacement are determined by solving the system of linear equations. The number of unknowns is less, but the matrix of coefficients is full, what is not the case with the FEM. The total time for input and computation is by BEM approximately 10 times less than for the same case by FEM.

One of the examples where the BEM is useful is the computation of the stresses and strains around the openings of under-

Dosadašnja iskustva s primjenom programa pokazuju da trud uložen u pripremu ovog programskog paketa nije bio uzaludan, jer omogućuje uvid u problematiku koncentracija naprezanja uz otvore. Vrlo jednostavno mijenjanje ulaznih podataka omogućuje uočavanje utjecaja raznih ulaznih parametara koji karakteriziraju materijal, promjene oblika otvora, promjene načina opterećenja, kao i utjecaje raznih sistema podgrađivanja.

Primljeno: 2. IV. 1993.

Prihvaćeno: 27. V. 1993.

LITERATURA

- Brebbia, C. A. (1992): Boundary elements, an introductory course. Tempus – ACEM, 89 pp, Maribor
- Brebbia, C. A. and Dominguez, J. (1992): Boundary elements. Mc. Graw Hill, 313 pp, London
- Hoek, E. and Brown, E. T. (1982): Underground excavations in rock. Institution of Mining and Metallurgy, 527 pp, London
- Hudec, M., Frgić, L. and Paris, B. (1992): RUBNI, metoda rubnih elemenata, PORG 92, Primjena osobnih računala u geotehnici. Građevinski fakultet, 1–22, Zagreb
- Radna grupa ITA (1988): Konstruktivni projekt tunela. *Gradevinar, posebni otisak*, 1–31, Zagreb 1992.

ground rooms. As the basis, the Hoek – Brown's program (1982) for the elastic continuum for plane strain was accepted. The basic loading of the massif are the forces of the own weight or vertical and horizontal pressures. The Hoek – Brown's program was extended by the effects of primary support on the stresses and strains around the opening so that it accepts the loading with reactive forces of the support (shotcrete layers, steel arches) and with the active and reactive forces of bolts. Analogously to the treatment of reinforced concrete, the ultimate bearing capacity of the concrete and steel are considered. The control of failure according to the criterion defined by Hoek and Brown is in-built in the program.

The program is extended by the pre-processor for interactive defining of the input data, as well as by a post-processor for graphic presentation of results.

In its present shape, the program gives results for elastic strains. That will satisfy all the cases of the previous projects and the cases with no sufficient material properties.

The program enables a simple access into the problem of stress concentration around the openings and into the influence of different support systems.