

Primljen / Received: 3.2.2014.  
 Ispravljen / Corrected: 26.6.2015.  
 Prihvaćen / Accepted: 23.7.2015.

Dostupno online / Available online: 10.11.2015.

# Analize stabilnosti pokosa metodama granične ravnoteže i smanjenja parametara čvrstoće

## Autori:



**Zoran Berisavljević**, dipl.ing.geol.  
 Koridori Srbije  
[berisavljevic\\_zoran@yahoo.com](mailto:berisavljevic_zoran@yahoo.com)



**Dušan Berisavljević**, dipl.ing.geol.  
 Institut za ispitivanje materijala  
[dusan.berisavljevic@institutims.rs](mailto:dusan.berisavljevic@institutims.rs)



Doc.dr.sc. **Vladimir Čebašek**, dipl.ing.rud.  
 Sveučilište u Beogradu  
 Rudarsko-geološki fakultet  
[vcebasek@rgf.bg.ac.rs](mailto:vcebasek@rgf.bg.ac.rs)



Doc.dr.sc. **Dragoslav Rakić** dipl.ing.geol.  
 Sveučilište u Beogradu  
 Rudarsko-geološki fakultet  
[rgfraka@rgf.bg.ac.rs](mailto:rgfraka@rgf.bg.ac.rs)

Pregledni rad

**Zoran Berisavljević, Dušan Berisavljević, Vladimir Čebašek, Dragoslav Rakić**

## Analize stabilnosti pokosa metodama granične ravnoteže i smanjenja parametara čvrstoće

U ovom su radu predstavljeni rezultati usporedne analize stabilnosti pokosa metodama granične ravnoteže i smanjenja parametara čvrstoće tla. Razmatrano je nekoliko pokosa uzetih iz literature ili iz geotehničke prakse. Analiziran je utjecaj vlačnog naprezanja, raspodijeljenog opterećenja, veličina konačnog elementa i parametri modela na lokaciji te oblik kritičnog loma i odgovarajuće vrijednosti faktora sigurnosti. Obje navedene metode daju slične rezultate ako se ispravno primijene u odgovarajućim računalnim programima.

### Ključne riječi:

granična ravnoteža, smanjenje parametara čvrstoće, dilatacija, optimizacija, Bézierova krivulja, vlačna zona

Subject review

**Zoran Berisavljević, Dušan Berisavljević, Vladimir Čebašek, Dragoslav Rakić**

## Slope stability analyses using limit equilibrium and strength reduction methods

This paper presents results of comparative slope stability analyses conducted by limit equilibrium and strength reduction methods. Several slopes, taken either from geotechnical practice or literature review, are considered. The influence of tension, distributed load, finite element size and model parameters is analysed in relation to the location, shape of the critical failure surface and the corresponding value of the factor of safety. Both methods provide similar results if they are correctly applied using appropriate software programs.

### Key words:

limit equilibrium, reduction of strength parameters, dilatancy, optimisation, Bezier curve, tension zone

Übersichtsarbeit

**Zoran Berisavljević, Dušan Berisavljević, Vladimir Čebašek, Dragoslav Rakić**

## Stabilitätsanalyse von Böschungen mittels Methoden des Grenzgleichgewichts und der Abminderung von Festigkeitsparametern

In dieser Arbeit werden Resultate der Stabilitätsanalyse von Böschungen mittels der Methoden des Grenzgleichgewichts und der Abminderung von Festigkeitsparametern verglichen. Es werden sowohl aus der Literatur übernommene, als auch praktische geotechnische Beispiele erläutert. Dabei werden der Einfluss von Zugspannungen, verteilten Lasten, Dimensionen finiter Elemente und lokalen Modellparametern analysiert, sowie Bruchformen und entsprechende Werte der Sicherheitskoeffizienten dargestellt. Beide untersuchten Methoden ergeben ähnliche Resultate, wenn sie mittels entsprechender Computerprogramme korrekt angewandt werden.

### Schlüsselwörter:

Grenzgleichgewicht, Abminderung von Festigkeitsparametern, Dilatation, Optimierung, Bézier-Kurve, Zugzone

## 1. Uvod

U inženjerskoj se praksi analiza stabilnosti pokosa najčešće provodi metodom granične ravnoteže (eng. *limit equilibrium methods* - LEM). Najviše se primjenjuju metode lamela, gdje se tlo iznad pretpostavljene klizne plohe podijeli na nekoliko, uglavnom vertikalnih, lamela, a rezultat je vrijednost faktora sigurnosti:

$$F_s = \frac{\tau_f}{\tau_m} \quad (1)$$

gdje izraz  $\tau_f$  označava stvarnu raspoloživu posmičnu čvrstoću tla, a  $\tau_m$  je mobilizirana posmična čvrstoća ili prosječno posmično naprezanje na pretpostavljenoj kliznoj plohi tla, mobilizirano s ciljem očuvanja stabilnosti pokosa. Bez obzira na nedostatke [1-3], te su metode razvijene i verificirane na temelju stvarnih ispitivanja u prošlosti. Kako bi se analiza statistički provela, potrebno je odrediti pretpostavke. Dakle, pretpostavljen je odnos međulamelarne posmične sile  $X$  i međulamelarne normalne sile  $E$  (ukupne ili efektivne) sljedećim izrazom:

$$X = \lambda f(x)E \quad (2)$$

gdje izraz  $\lambda$  označava konstantu koja predstavlja postotak funkcije  $f(x)$  koja se primjenjuje za rješavanje jednadžbe faktora sigurnosti,  $f(x)$  je funkcionalni odnos (funkcija međulamelarne sile) koja opisuje način na koji se vrijednost veličine  $X/E$  mijenja duž klizne plohe.

Konačni rezultat najčešće nije previše osjetljiv na izbor funkcije  $f(x)$  [4-6], ali postoje primjeri iz literature gdje rješenje značajno ovisi o pretpostavljenoj funkciji međulamelarnih sila, kao što je primjerice opisao Krahn u svom radu [2].

Iako metoda granične ravnoteže odgovara općem konceptu rješenja "gornje granice" [7], ona ne zadovoljava sve zahtjeve točnosti. Izbicki [8] je definirao rezultate određene metodom granične ravnoteže kao "sniženu gornju granicu", naglašavajući da je faktor sigurnosti određen tom metodom nešto manji od dopuštenog faktora sigurnosti gornje granice.

Bishopova pojednostavljena metoda [9] primjenjuje se za proračun faktora sigurnosti kružne klizne plohe, a dobiveni su rezultati slični vrijednostima dobivenim rigoroznim formulacijama.

Od metoda koje zadovoljavaju sve elemente statičke ravnoteže, primijenjene su Maksimovičeva metoda (1979.), Spencerova metoda (1967.) i GLE metoda (Fredlund i Krahn, 1977.).

Položaj i oblik kritične klizne plohe određeni su poluautomatskim i automatskim tehnikama traženja. Interaktivni algoritam optimizacije je primijenjen u računalnom programu BGSLOPE [10, 11] kako bi se dobila kritična klizna ploha prikazana Bezierovom ili poligonalnom krivuljom.

Taj postupak se pokazao najboljim za usporedbu s rezultatima metode konačnih elemenata, jer korisniku pruža mogućnost da uspješno upravlja pomacima kontrolnih točaka Bezierovog poligona ili koordinatnim točkama poligonalne krivulje.

Analize stabilnosti pokosa metodom granične ravnoteže provedene su s pretpostavkom linearnog Mohr-Coulombovog kriterija sloma. Na taj način, ulazni podaci se sastoje od samo tri parametra, a to su ukupna jedinična težina materijala ( $\gamma$ ), kohezija ( $c$ ) i kut unutarnjeg trenja ( $\varphi$ ).

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda za proračun približnih rješenja problema graničnih vrijednosti parcijalno diferencijalnih jednadžbi. Teoretski ta metoda zadovoljava sve nepotrebne zahtjeve za potpuno rješenje problema stabilnosti pokosa [12].

Ponašanje materijala u metodi konačnih elemenata opisano je kao elastično - idealno plastični model u skladu s Mohr-Coulombovim kriterijem sloma [13]. Model uzima u obzir parametre posmične čvrstoće i deformacije. Dodatna tri parametra, zajedno s prethodno spomenutim, modul su elastičnosti  $E$ , Poissonov koeficijent  $\nu$  i kut dilatacije  $\psi$ . Neki istraživači [14-16] navode da parametri deformabilnosti  $E$  i  $\nu$ , kao i veličina domene imaju značajan utjecaj na vrijednost faktora sigurnosti. Nekoliko je autora istraživalo i utjecaj dilatacije na konačni rezultat [16, 17], a rezultati tih istraživanja ponovno su analizirani u ovom radu.

U slučaju nepridružene plastičnosti, pozitivan kut dilatacije je izračunan s obzirom na jednostavan, široko primjenjiv odnos ( $\psi = \varphi - 30^\circ$ ). U slučaju da je  $\varphi \leq 30^\circ$ , pretpostavka je da je  $\psi = 0^\circ$ . Postoji iznimka u primjeru 4, gdje je kut dilatacije pretpostavljen kao razlika između Coulombovog kuta i baznog kuta primijenjenog u hiperboličnom opisu nelinearne linije sloma [18-20]. Dvije uobičajene definicije faktora sigurnosti u metodi konačnih elemenata se odnose na očuvanje čvrstoće i preopterećenje [21-23]. Mjesto sloma, kao i faktor sigurnosti, ovisi o odabranoj definiciji. U ovom je radu vrijednost faktora sigurnosti određena metodom smanjenja parametara čvrstoće, gdje se parametri čvrstoće tla umjetno smanjuju sve do sloma. Numerički, do toga dolazi kada više nije moguće ostvariti konvergentno rješenje. Ovo se može izraziti jednadžbom.

$$SRF = \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi_m} = \frac{c}{c_m} \quad (3)$$

gdje izraz SRF označava ukupni umnožak (faktor smanjenja parametara čvrstoće) koji se primjenjuje za određivanje parametara čvrstoće tla u određenoj fazi analize.  $c$ ,  $\varphi$  su ulazni podaci parametara posmične čvrstoće, a  $c_m$ ,  $\varphi_m$  su mobilizirane ili smanjene vrijednosti koje se primjenjuju u analizi.

Na početku proračuna, SRF je postavljena na 1,0, tj. sve vrijednosti parametara čvrstoća tla su podešene na ulazne vrijednosti. Pri stanju sloma SRF, definiran jednadžbom (3), odgovara vrijednostima faktora sigurnosti danog u jednadžbi 1. U metodi konačnih elemenata nisu potrebne pretpostavke o obliku ili položaju sloma. Slom se događa kroz slojeve tla u kojima posmična čvrstoća nije dovoljna za odupiranje nametnutom posmičnom naprezanju [15]. Svi proračuni su provedeni u statički dreniranim uvjetima koji podrazumijevaju efektivne parametre posmične čvrstoće i deformabilnosti, bez uzimanja u obzir seizmičkog djelovanja. Analiziran je utjecaj podzemne

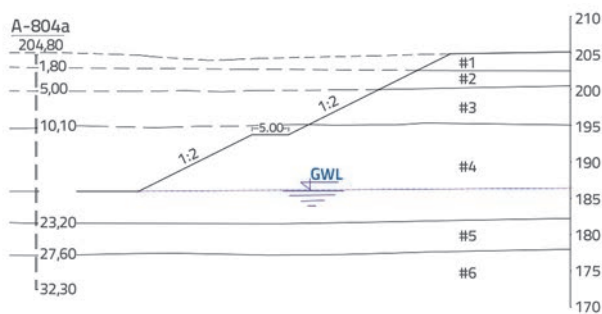
vode i preraspodijeljenog opterećenja. Mnoga istraživanja [14, 24, 25] pokazuju da se još ne može sa sigurnošću tvrditi koja metoda daje najveću vrijednost faktora sigurnosti, jer analiza ovisi o specifičnim problemima i računalnom programu koji se primjenjuje u ispitivanju.

Kako bi se ispicao utjecaj primijenjenog numeričkog algoritma na konačni rezultat, u analizama su korištena četiri komercijalna računalna paketa. BGSLOPE i Slide se temelje na metodi granične ravnoteže, dok se Plaxis i Phase temelje na metodi konačnih elemenata. Radi usporedbe, oblici kritičnih kliznih ploha su preklapljeni s rezultatima dobivenih Plaxisovim modelom konačnih elemenata.

## 2. Primjeri usporedne analize

### 2.1. Primjer 1: Bočni pokos tunela "Beli potok", beogradska obilaznica

Prema projektu [26], visina bočnih pokosa tunela *Beli potok* na dijelu na kojem se tunel izvodio metodom *cut and cover* iznosi 19 m, s nagibom 1:2 (v:h) te bermom na sredini pokosa duljine 5 m. Tlo je podijeljeno na 6 horizontalnih slojeva, kao što se vidi na slici 1.



Slika 1. Karakteristični poprečni presjek pokosa

Na temelju piezometarskih mjerenja određena je razina podzemne vode od 18 m. Rezultati dobiveni ispitivanjima troosnim CU pokusom (s mjerenjem pornog tlaka), izravnim smicanjem, ispitivanjem u edometru, te opsežnim *in situ* CPT ispitivanjima su primijenjeni za određivanje parametara posmične čvrstoće i deformabilnosti. Svi parametri primijenjeni u analizi prikazani su u tablici 1.

Tablica 1. Ulazni podaci za analizu

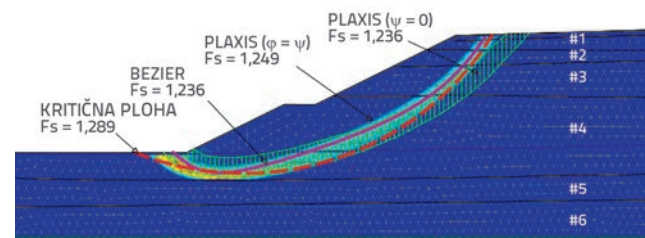
Parametri primijenjeni u analizi	Oznaka parametra	#1	#2	#3	#4	#5	#6
Jedinična težina, [kN/m <sup>3</sup> ]	$\gamma/\gamma_z$	19	18	18,5	19/20	19	20
Youngov modul, [kN/m <sup>2</sup> ]	$E$	18750	7430	8900	18750	22300	22300
Poissonov koeficijent, [-]	$\nu$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
Kohezija, [kN/m <sup>2</sup> ]	$c$	5	10	15/10*	10/5*	5	5
Kut unutarnjeg trenja, [°]	$\varphi$	24	18	18/17*	20/21*	24	24
Kut dilatacije, [°]	$\psi$	24/0	18/0	18/0	20/0	24/0	24/0

\*Vrijednosti posmične čvrstoće, parametri  $c$  i  $\varphi$  odgovaraju analizi prikazanoj na slici 3.

Za slojeve 3 i 4, laboratorijski pokusi su otkrili varijacije u vrijednosti kohezije i kutova unutarnjeg trenja, te su analize provedene na temelju dviju skupina parametara.

Za izračun faktora sigurnosti metodom granične ravnoteže primijenjen je računalni program BGSLOPE. Kako bi se odredila kritična klizna ploha, na glatkoj Bezierovoj krivulji je pomicano 7 kontrolnih točaka u različitim smjerovima, s pomakom od 0,05 m, dok nije ostvaren najmanji faktor sigurnosti. Najmanji faktor sigurnosti je izračunan s pretpostavkom polusinusne funkcije međulamelarne sile. Kako bi se eliminiralo vlačno naprezanje u gornjem dijelu pokosa, uvedena je vlačna pukotina konzistentna s faktorom sigurnosti. Utjecaj vlačnog naprezanja pobliže će se analizirati u primjeru 3. Za proračun faktora sigurnosti metodom smanjenja parametara čvrstoće primijenjen je računalni program Plaxis.

Model konačnog elementa se sastoji od 3011 15-čvornih trokutastih elemenata koji se automatski generiraju na temelju robusnog postupka triangulacije. Veličina prosječnog elementa je 1,168 m. Kritične klizne plohe su uspoređene i prikazane na slici 2. Vrijednosti faktora sigurnosti se nalaze u tablici 2.

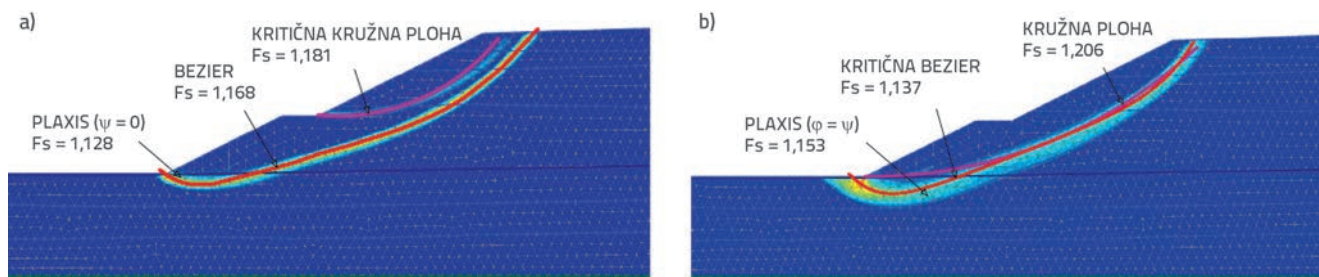


Slika 2. Rezultati analize

Tablica 2. Rezultati ispitivanja

Metoda	Faktor sigurnosti (slika 2.)	Faktor sigurnosti (slika 3. <sup>a</sup> )
BGSLOPE (Bishop)	1,289	1,181
BGSLOPE (Maksimovic, optimizirana)	1,236	1,137
Plaxis ( $\varphi = \psi$ )	1,249	1,153
Plaxis ( $\psi = 0$ )	1,236	1,128

<sup>a</sup>Prikazani su samo najmanji faktori sigurnosti



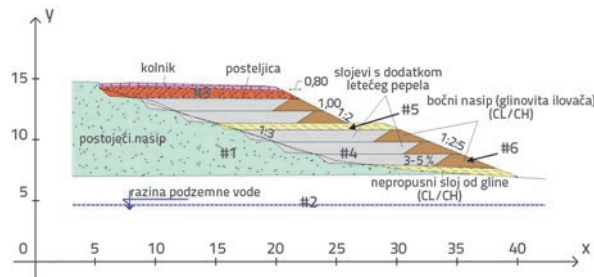
Slika 3. Različite klizne plohe: a) Plaxis ( $\psi = 0^\circ$ ), kritična kružna i Bezierova; b) Plaxis ( $\phi = \psi$ ), kružna i kritična Bezierova

Kao što se vidi na slici 2., optimizirana kritična klizna ploha dobivena metodom granične ravnoteže u skladu je s rješenjem metodom konačnih elemenata u slučaju pridruženog pravila tečenja ( $\phi = \psi$ ). Faktori sigurnosti dobiveni u računalnom programu Plaxis ( $\psi = 0^\circ$ ) i u optimiziranoj Bezierovoj krivulji bili su jednaki. Kružna kritična klizna ploha je precijenila vrijednost faktora sigurnosti za 4,3 %. Vrijednosti faktora sigurnosti dobivenih na temelju druge skupine parametara prikazane su u tablici 2., a oblik klizne plohe se može vidjeti na slici 3. Kritična klizna ploha se pojavila na gornjem dijelu pokosa, a precjenjuje faktor sigurnosti 3,9 do 4,3 %. Kritična klizna ploha dobivena proračunom u Plaxisu za  $\psi = 0^\circ$  ima faktor sigurnosti  $F_s = 1,128$  te se proteže cijelom visinom pokosa.

Kritična klizna ploha određena metodom granične ravnoteže ima  $F_s = 1,137$  te njezin položaj odgovara položaju klizne plohe dobivenom u Plaxisu, uz uvjet  $\phi = \psi$ . Ako se Bezierova krivulja optimizira na način da ima isti oblik Plaxis pri  $\psi = 0^\circ$ , dobiven je lokalni minimum. Ako se usporede najmanji faktori sigurnosti dobiveni dvjema spomenutim metodama, razlika je zanemariva te se njihove vrijednosti razlikuju za približno 0,8 %. Najmanji faktor sigurnosti kritične klizne plohe koja se proteže od vrha do nožice pokosa iznosi  $F_s = 1,206$ .

### 2.2. Primjer 2: Proširenje nasipa na cesti M-19

U svrhu proširenja postojeće ceste M-19 na dionici Beograd-Ljig (stacionaže 4+100), planirana je izgradnja nasipa približne visine 8 m. Projektom se predlagalo nekoliko različitih rješenja predstavljenih u [27]. U ovom su radu analizirana samo rješenja s primjenom letećeg pepela kojeg karakterizira relativno mala zapreminska težina. Geometrija nasipa je prikazana na slici 4.



Slika 4. Proširenje nasipa na cesti primjenom letećeg pepela

Parametri tla primijenjeni u analizi dobiveni su iz terenskih i laboratorijskih ispitivanja (tablica 3.).

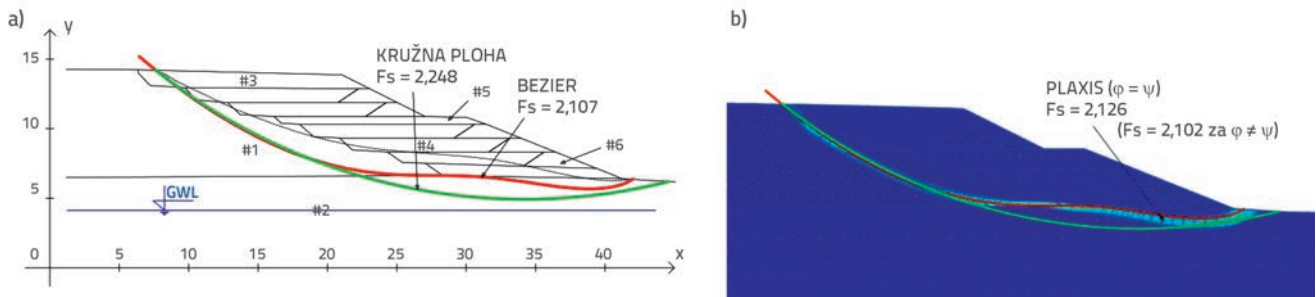
Parametri posmične čvrstoće letećeg pepela određeni su izravnim smicanjem na zbijenim uzorcima (prema Proctorovom testu), koji su konsolidirani 42 sata [28]. Važno je napomenuti kako leteći pepeo ima pucolansku aktivnost, odnosno samovezujuće svojstvo zbog kemijske reakcije s kalcijevim hidroksidom u kombinaciji s vodom, što utječe na povećanje posmične čvrstoće tijekom zbijanja i konsolidacije. Linearna Mohr-Coulombova krivulja je određena za vrijednost normalnog naprezanja do  $150 \text{ kN/m}^2$ .

Youngov model je određen korelacijom s prethodno određenim edometarskim modulom (na kompaktnim uzorcima) [28] sukladno teoriji elastičnosti s pretpostavljenim Poissonovim koeficijentom od 0,3.

Za analizu metodom granične ravnoteže primijenjen je računalni program BGSLOPE. Dana je pretpostavka o linearnoj raspodjeli funkcije međulamelarnih sila duž optimizirane Bezierove krivulje. Raspodjela je određena jednim parametrom ( $z_1 = 0,1$ ), na osi  $x$  duž klizne plohe, gdje dodatna vrijednost parametra  $z$  na

Tablica 3. Ulazni podaci za analizu

Parametri primijenjeni u analizi	Oznaka parametra	#1	#2	#3	#4	#5/#6
Jedinična težina, $[\text{kN/m}^3]$	$\gamma/\gamma_z$	18	18/19	18,5/20	8,5	18
Youngov modul, $[\text{kN/m}^2]$	$E$	18750	6300	26000	24500	18750
Poissonov koeficijent, [-]	$\nu$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
Kohezija, $[\text{kN/m}^2]$	$c$	10	2	1	12	5
Unutarnji kut trenja, $[\circ]$	$\phi$	15	25	34	54	25
Kut dilatacije, $[\circ]$	$\psi$	15/0	25/0	34/4	54/24	25/0



Slika 5. Rezultati analize: a) metoda granične ravnoteže; b) kritična klizna ploha preklapljena s modelom konačnih elemenata

sredini klizne plohe iznosi 1. Model konačnih elemenata u Plaxisu se sastoji od 1716 15-čvornih trokutastih elemenata. Veličina prosječnog elementa je 0,942. Kritične klizne plohe se preklapaju, kao što se vidi na slici 5. Pripadajući faktori sigurnosti su prikazani u tablici 4.

Tablica 4. Rezultati ispitivanja

Metoda	Fs
BGSLOPE (Bishop)	2,248
BGSLOPE (Maksimović, optimizirana)	2,107
Plaxis ( $\varphi = \psi$ )	2,126
Plaxis ( $\varphi \neq \psi$ )	2,102

Kao što se može vidjeti na slici 5., kritična klizna ploha u Plaxisu ( $\varphi = \psi$ ) odgovara plohi dobivenoj metodom granične ravnoteže, dok je razlika faktora sigurnosti dobivenih Plaxisom ( $\varphi \neq \psi$ ) i metodom granične ravnoteže zanemarivo mala. Kružna kritična klizna ploha precjenjuje faktor sigurnosti za 6,7 %. U sljedeća dva primjera analiziran je utjecaj raspodijeljenog opterećenja na konačni rezultat. Razmotrena je pojava vlačnih naprezanja na vrhu pokosa (s horizontalnom plohom).

### 2.3. Primjer 3: NTNU pokos

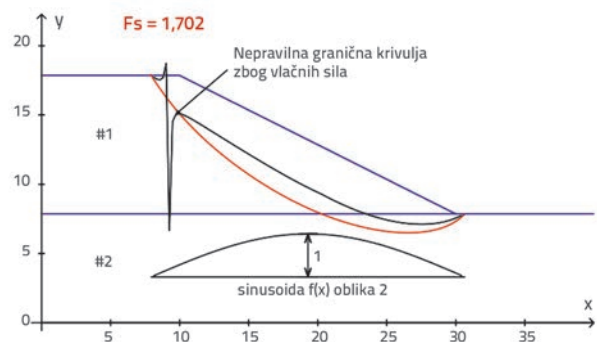
U primjeru 3 je analiziran relativno jednostavan pokos preuzet iz disertacije obranjene na Sveučilištu znanosti i tehnologije u Norveškoj. U spomenutoj disertaciji [17] je primijenjen programski paket Slope/W s metodom Morgenstern-Price kako bi se provela metoda granične ravnoteže. Utjecaj vlačnih naprezanja nije razmatran. Kako bi se provjerili dobiveni zaključci, primjer je ponovno ispitan.

Model pokosa se sastoji od dva sloja, kao što se vidi na slici 6. Parametri koji se primjenjuju u analizama su prikazani u tablici

Tablica 5. Ulazni podaci za analizu

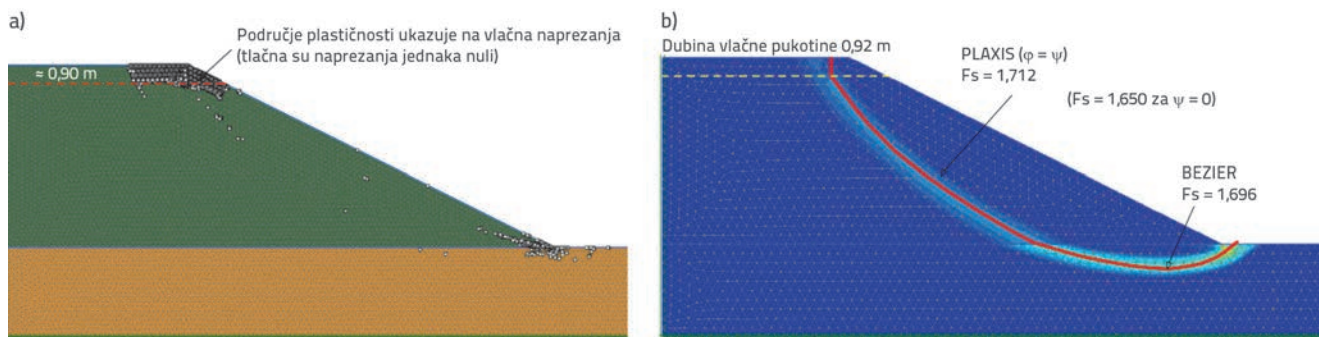
Parametri Sloj	Jedinična težina $\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	Youngov modul $E$ [kN/m <sup>2</sup> ]	Poissonov koeficijent $\nu$ [-]	Kohezija $c$ [kN/m <sup>2</sup> ]	Kut unutarnjeg trenja $\varphi$ [°]	Kut dilatacije $\psi$ [°]
#1	18	5000	0,3	10	30	30/0
#2	18	5000	0,3	5	25	25/0

5. Za izračun faktora sigurnosti LEM metodom primijenjeni su računalni programi BGSLOPE (Maksimovićeva metoda) i SLIDE (metoda GLE). Za provedbu proračuna pretpostavljena je polusinusna funkcija međulamelarne sile. Za izračun faktora sigurnosti metodom smanjenih parametara čvrstoće primijenjeni su računalni programi Plaxis i Phase<sup>2</sup>. Model u Plaxisu se sastoji od 2249 15-čvornih trokutastih konačnih elemenata. Veličina prosječnog elementa je 0,516 m. Model u Phase<sup>2</sup> se sastoji od 7433 6-čvornih trokutastih konačnih elemenata.



Slika 6. Geometrija pokosa i pojava vlačnog naprezanja (proračun u BGSLOPE)

U proračunu granične ravnoteže pojavila su se vlačna naprezanja na gornjim dijelovima pokosa zbog kohezije sloja 1, kao što je prikazano na slici 6. Vlačna naprezanja su označena kao nepravilnost u položaju linije pritiska koja se pojavljuje izvan klizne plohe, što upućuje na to da je rješenje fizički nedopušteno. Kao rezultat vlačnih naprezanja, normalne sile na dnu lamela, kao i međulamelarne sile, negativne su, što znači da su lamele pod utjecajem uzgona, iako zapravo ne postoji tendencija njihovog pokretanja prema gore. Također je zaključeno da pojava negativnih sila može dovesti do numeričke nestabilnosti



Slika 7. Rezultati analiza: a) raspodjela točki plastičnosti; b) vrijednosti faktora sigurnosti

pri proračunu faktora sigurnosti [1, 11]. Kako bi se to izbjeglo, Spencer [29, 30] je predložio da bi se vlačna zona s pukotinama trebala nalaziti na vrhu pokosa. Dubina vlačne zone se pretpostavlja se da je jednaka dubini na kojoj je aktivno efektivno naprezanje jednako nuli, konzistentno s faktorom sigurnosti stabilnosti pokosa:

$$H_c = \frac{2c}{\gamma F_s (1 - r_v)} \tan(45 + \varphi / 2) \quad (4)$$

gdje je  $r_v$  koeficijent pornog tlaka  $H_c$  dubina zone na kojoj je aktivno efektivno naprezanje jednako nuli.

Kako bi se rezultati dobiveni metodom konačnih elemenata usporedili s rezultatima dobivenih metodom granične ravnoteže, dana je pretpostavka da svi materijali u modelu metode konačnih elemenata imaju nultu vlačnu čvrstoću [25, 31]. Nakon niza pokušaja, zaključeno je da je za uobičajenu kombinaciju parametara čvrstoće, debljina vlačne zone u skladu s debljinom izračunanom prema jednadžbi (4). Parametri deformacije  $E$  i  $\nu$  nemaju nikakav utjecaj na debljinu vlačne zone. Kut dilatacije povećava faktor sigurnosti, dok istovremeno smanjuje debljinu vlačne zone. Takvi zaključci se odnose na potpuno razvijeni mehanizam sloma.

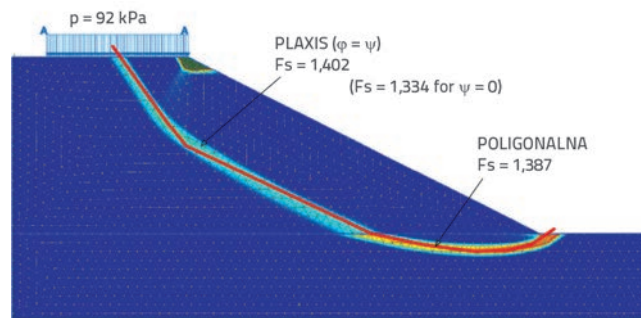
Tablica 6. Rezultati ispitivanja

Metoda	F <sub>s</sub>	F <sub>s</sub> prema [17]	F <sub>s</sub> (za opt. 92 kPa)
Slope/W (Bishop)		1,737	
Slope/W(M-P, optimizirana)		1,701 <sup>a</sup>	
Slide (GLE, optimizirana)	1,691		1,386
BGSLOPE (Maksimovic, optimizirana)	1,696 (1.702) <sup>a</sup>		1,387
Plaxis (φ = ψ)	1,712		1,402
Plaxis (ψ = 0)	1,650	1,654	1,334
Phase <sup>2</sup> (ψ = 0)	1,690		

<sup>a</sup> bez vlačnih pukotina

Položaj kritične klizne plohe u programu Plaxis (φ = ψ) odgovara rješenju dobivenom u programu BGSLOPE, kao što se može vidjeti na slici 7.b. Mehanizmi sloma dobiveni u programima Phase<sup>2</sup> i Slide su jednaki kao mehanizmi dobiveni u Plaxisu i BGSLOPE-u, te stoga nisu prikazani na slici 7. Pripadajući faktori sigurnosti su prikazani u tablici 6.

Dubina vlačne pukotine od 0,92 m odgovara debljini vlačne zone dobivenoj u programu Plaxis, kao što je vidljivo na slici 7a. U usporedbi s rezultatom iz Plaxisa (ψ = 0°), kružna kritična klizna ploha precjenjuje vrijednost faktora sigurnosti za 5 %, te samo za 2,7 % u usporedbi s rezultatima iz Phase<sup>2</sup> (ψ = 0°). Kako bi se ispitaio utjecaj raspodijeljenog opterećenja na stabilnost pokosa, proizvoljno je odabrana vrijednost od 92 kPa na vrhu pokosa, kao što se vidi na slici 8.

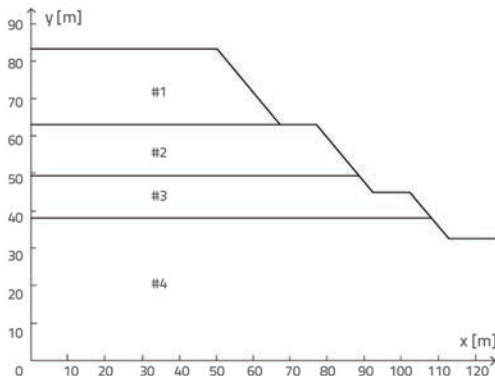


Slika 8. Utjecaj raspodijeljenog opterećenja

Utjecaj raspodijeljenog opterećenja eliminira pojavu vlačnih naprezanja. Rezultati proračuna su prikazani u tablici 6. Klizna ploha u Plaxisu pokazuje oštar prijelaz u gornjim dijelovima pokosa zbog pojave aktivne Rankinove zone. Najmanji faktor sigurnosti u BGSLOPE-u je ostvaren optimizacijom poligonalne klizne plohe određene pomoću 9 točaka. Vrijednost faktora sigurnosti iznosi 1,387, što je 4 % veća vrijednost od one dobivene u Plaxisu za pretpostavljeno ponašanje materijala bez dilatacije. Oblik poligonalne klizne plohe odgovara rješenju iz Plaxisa, kao što se vidi na slici 8. Ista kritična klizna ploha je dobivena u programu Slide (metoda GLE), s pripadajućim faktorom sigurnosti,  $F_s = 1,386$ , što je zapravo ista vrijednost kao faktor sigurnosti izračunan u BGSLOPE-u.

### 2.4. Primjer 4: Projekt Nova dolina- stabilnost stijenskog pokosa

U navedenom se primjeru ispituje stabilnost stijenskog pokosa, koji je formiran u sklopu izgradnje građevne jame za crpnu stanicu, kao dio projekta *Nova dolina* u Egiptu. Proračun u programu Plaxis, proveden za potrebe verifikacije programa [20], ponovljen je uvođenjem različitih mreža s različitim veličinom konačnih elemenata. Poprečni presjek je prikazan na slici 9. Pokos nagiba 1,2:1 (v:h) približno je visok 50 m, s dvije berme duljine 10 m. Parametri primijenjeni u proračunu prikazani su u tablici 7. Analiza je provedena pretpostavljajući suhe uvjete pokosa.



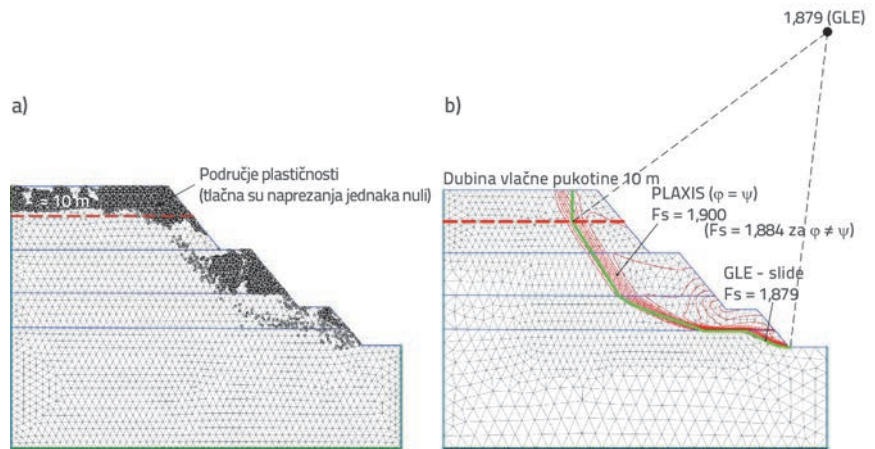
Slika 9. Tipični poprečni presjek stijenskog pokosa

Tablica 7. Ulazni podaci za analizu

Parametri	Oznaka parametra	#1	#2	#3	#4
Jedinična težina [kN/m <sup>3</sup> ]	$\gamma$	22	22,4	21,9	21,6
Modul posmika [kN/m <sup>2</sup> ]	$G$	2.400.000	4.200.000	2.000.000	2.000.000
Poissonov koeficijent [-]	$\nu$	0,35	0,32	0,4	0,32
Kohezija, [kN/m <sup>2</sup> ]	$c$	100	135	55	70
Kut unutarnjeg trenja [°]	$\varphi$	44	52	28	38
Kut dilatacije, [°]	$\psi$	44/14	52/22	28/4	38/9

Tablica 8. Rezultati ispitivanja

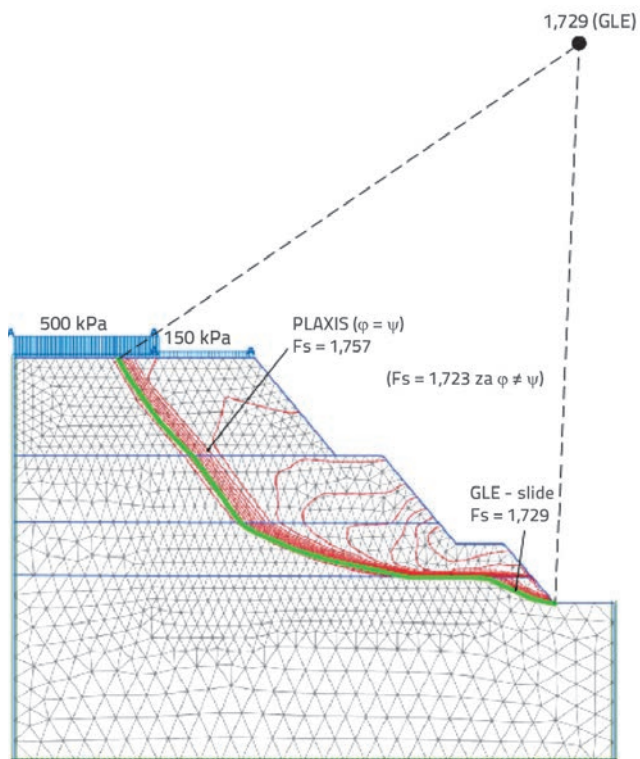
Metoda	$F_s$	$F_s$ prema [20]	$F_s$ (za opt. 150, 500 kPa)
BGSLOPE (Bishop)		2,057	
BGSLOPE (Maksimović, optimizirana)		1,951	
Slide (GLE, optimizirana)	1,879		1,729
Plaxis ( $\varphi = \psi$ )	1,900	1,967	1,757
Plaxis ( $\psi \neq \varphi$ )	1,884	1,927	1,723



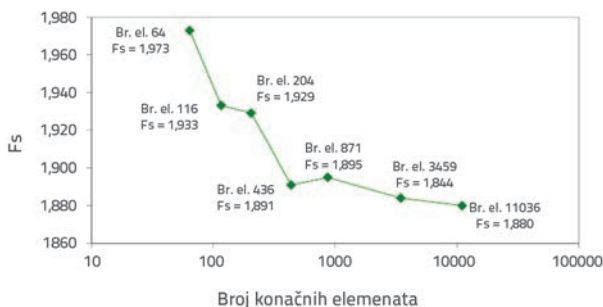
Slika 10. Rezultati proračuna: a) debljina vlačne zone; b) položaj i oblik klizne plohe

Rezultati metode konačnih elemenata su predstavljeni za model s 3459 15-čvornih trokutastih konačnih elemenata, prosječne veličine 1,740 m. Metoda granične ravnoteže je provedena u računalnom paketu Slide (metoda GLE). Pretpostavljeno je da funkcija međulamelarnih sila  $f(x)$  ima linearnu distribuciju određenu na x-osi pomoću dvaju parametara ( $z_1 = 0,4$  i  $z_2 = 2$ ) na suprotnim stranama klizne plohe. Položaj kritične klizne plohe, kao i u prethodnom primjeru, određen je primjenom automatskog traženja koje se temelji na metodi Monte Carlo. Rezultati ispitivanja su prikazani na slici 10, a vrijednosti faktora sigurnosti se nalaze u tablici 8. Druga analiza je obuhvatila slučaj raspodijeljenog opterećenja na vrhu pokosa. Rezultati ispitivanja su prikazani na slici 11., a pripadajući faktori sigurnosti se nalaze u tablici 8.

Na slici 8. vidi se da se položaji kritičnih kliznih ploha kao i odgovarajući faktori sigurnosti dobro poklapaju. Usporedbom slike 10. i 11. može se zaključiti da, kada se postavi opterećenje, klizna ploha pomiče se prema stražnjem dijelu pokosa, a faktori sigurnosti smanjeni su na  $F_s = 1,723$  (1,729). Napravljene su dodatne analize kako bi se odredio utjecaj veličine konačnog elementa na faktor sigurnosti. Rezultati analize mreža sastavljenih od 64 do 11064 konačna elementa prikazani su na slici 12. Faktor sigurnosti varira između 1,973 (za 64 elementa) i 1,880 (11064 elementa). Daljnje povećanje broja konačnih elemenata ne bi značajno utjecalo na faktor sigurnosti, ali bi se vrijeme proračuna znatno povećalo. Da bi se vrijeme proračuna smanjilo, može se lokalno progustiti mrežu u zonama koje su od interesa za stabilnost pokosa, dok se na krajevima modela može definirati krupnija mreža konačnih elemenata.



Slika 11. Analiza različite raspodjele opterećenja



Slika 12. Faktori sigurnosti prema broju konačnih elemenata mreže

### 3. Zaključak

Usporedno ispitivanje je provedeno kako bi se ispitala primjenjivost metoda konačnih elemenata i granične ravnoteže za izračun najmanjeg faktora sigurnosti i položaja kritične klizne plohe. Ispitan je utjecaj različitih parametara na konačni rezultat. Kritična klizna ploha precjenjuje faktor sigurnosti za 9 % u prikazanim primjerima. Cheng [32] je dao opsežan prikaz problema povezanih s mogućnosti određivanja položaja kritične

klizne plohe metodom granične ravnoteže. Potpuno automatska optimizacija može ponekad odrediti rješenje koje odgovara lokalnom minimumu. Zbog toga se za određivanje položaja kritične klizne plohe predlaže primjena poluautomatske analize, poput interaktivnog optimiziranog algoritma.

Glatka Bezierova krivulja je u većini slučajeva prikladnija za određivanje najmanjih faktora sigurnosti nego poligonalna krivulja. Međutim, oštri prijelazi (kao u slučaju raspodijeljenog opterećenja koje se pojavljuje na vrhu pokosa) mogu se detaljnije opisati primjenom poligonalne krivulje. Oblik funkcije međulamelarnih sila  $f(x)$  treba odabrati tako da se dobije najmanji faktor sigurnosti. Zadovoljavajući rezultati se dobivaju s uobičajeno korištenim raspodjelama kao što su Spencerova, polusinusna ili linearna.

Smatra se da veličine  $E$  i  $v$  te veličina domene nemaju (ili imaju vrlo mali) utjecaj na faktor sigurnosti i položaj kritične klizne plohe u metodi smanjenja parametara čvrstoće. Ako se primjenjuju realne vrijednosti  $E$  i  $v$  (određene u laboratoriju ili *in situ* ispitivanjem), rezultati bi trebali odgovarati onima iz metode granične ravnoteže.

Cheng i suradnici [14] pokazali su da se najveća razlika između dviju metoda može očekivati u posebnoj vrsti pokosa s tankim mekanim proslojkom. Unatoč činjenici da se analize vrše pri nesmetanom bočnom širenju, kut dilatacije ima određeni utjecaj na rezultate dobivene metodom smanjenja parametara čvrstoće. U slučaju pridruženog pravila tečenja u metodi smanjenja parametara čvrstoće, položaji kritičnih kliznih ploha određeni dvjema metodama su gotovo jednaki. Ipak, najbolja slaganja faktora sigurnosti u odnosu s metodom granične ravnoteže postižu se u slučaju s nepridruženim pravilom toka, kada se realne vrijednosti pozitivne dilatacije uvrštavaju u analizu [33, 34]. Ako se primjerice pretpostavi nedilatacijsko ponašanje materijala u prvom slučaju primjer 4, tada faktor sigurnosti iznosi 1,796. U slučaju pridruženog pravila tečenja, ta je vrijednost 6 % veća. Drugi parametar koji utječe na rezultate metode smanjene čvrstoće jest veličina konačnog elementa. Predlaže se da se analiza provodi s progušćivanjem mreže lokalno, na način da je vrijeme proračuna prihvatljivo i praktično. Prednost je dana 15-čvornom trokutastom konačnom elementu u odnosu na 6-čvorne elemente.

Ako se pretpostave nulta vlačna naprezanja u Plaxisu, ostvaruje se dobar odnos između dubine vlačne pukotine dane u jednadžbi (4) i raspodjele plastičnih vlačnih točaka. Različiti numerički algoritmi implementirani u računalnim paketima, poput Plaxisa, Phase<sup>2</sup>, Slidea i BGSLOPE-a s izborom broja dopuštenih iteracija, broja lameli itd. imaju utjecaj na konačni rezultat u metodama granične ravnoteže i konačnih elemenata. Ako se pravilno primijene u računalnim programima, obje metode daju slične rezultate.



## LITERATURA

- [1] Ching, R.K.H., Fredlund, D.G.: Some difficulties associated with the limit equilibrium method of slices, *Canadian Geotechnical Journal*, 20 (1983), pp. 661-672, <http://dx.doi.org/10.1139/t83-074>
- [2] Krahn, J.: The 2001 R.M. Hardy Lecture: The limits of limit equilibrium analyses, *Canadian Geotechnical Journal*, 40 (2003), pp. 643-660, <http://dx.doi.org/10.1139/t03-024>
- [3] Krahn, J.: Limit Equilibrium, Strength Summation and Strength Reduction Methods for Assessing Slope stability, *Proc. of the 1st Canada-U.S. Rock Mechanics Symposium*, Vancouver, 2007.
- [4] Duncan, J.M.: State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering ASCE*, 122 (1996) 7, 577-596.
- [5] Fredlund, D.G.: State of the Art Lecture-Analytical methods for slope stability analysis, *IV Int. Symposium on Landslides*, Toronto, 1984.
- [6] Maksimovic, M.: *Soil mechanics (in Serbian)*, Gradjevinska knjiga, Belgrade, 2005.
- [7] Chowdhury, R. with contributors: Flentje, P., Bhattacharya G.: *Geotechnical slope analysis*, CRC Press/Balkema, London, 2009.
- [8] Izbicki, R.: Limit plasticity approach to slope stability problems, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering ASCE*, 107, (1981), GT2, pp. 228-233.
- [9] Bishop, A.W.: The use of slip circle in the stability analysis of slopes, *Geotechnique*, 5 (1955), pp. 7-17, <http://dx.doi.org/10.1680/geot.1955.5.1.7>
- [10] Maksimovic, M.: General slope stability software package for micro-computers, *6th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics*, Innsbruck, pp. 2145-2150, 1988.
- [11] Maksimovic, M.: *BGSLOPE 11-A, Slope Stability for PC*, User's manual, 2011.
- [12] Potts, D.M., Zdravkovic, L.: *Finite element analysis in geotechnical engineering: theory*, Thomas Telford, London, 1999., <http://dx.doi.org/10.1680/feaiget.27534>
- [13] Brinkgreve, R.B.J., Bakker, H.L.: Non-linear finite element analysis of safety factors, *Proc. of the 7th Int. Conf. on Comp. Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)*, Cairns, pp. 1117-1122, 1991.
- [14] Cheng, Y.M., Lansivaara, T., Wei, W.B.: Two-dimensional slope stability analysis by limit equilibrium and strength reduction methods, *Computers and Geotechnics*, 34, (2007), pp. 137-150, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compgeo.2006.10.011>
- [15] Griffiths, D.V., Lane, P.A.: Slope stability analysis by finite elements, *Geotechnique*, 49 (1999) 3, pp. 378-403.
- [16] Hammah, R., Jacoub, T., Corkum, B., Curran, J.: A comparison of finite element slope stability analysis with conventional limit-equilibrium investigations, *Rocscience*, (2005).
- [17] Aryal, P.A.: *Slope Stability Evaluations by Limit Equilibrium and Finite Element Methods*, PhD thesis, NTNU, University of Trondheim, Norway, 2006.
- [18] Maksimovic, M.: Limit equilibrium for nonlinear failure envelope and arbitrary slip surface, *Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics*, Aachen, pp. 769-777, 1979.
- [19] Maksimovic, M.: A Family of Nonlinear Failure Envelopes for Non-cemented Soils and Rock Discontinuities, *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 1 (1996), pp. 1-62.
- [20] Verification for BGSLOPE software: New valley project - Stability of rock slopes, Report No. 2.
- [21] Farias, M.M., Naylor, D.J.: Safety analysis using finite element, *Computers and Geotechnics*, (1988) 22(2), pp. 165-181, [http://dx.doi.org/10.1016/S0266-352X\(98\)00005-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0266-352X(98)00005-6)
- [22] Zheng, H., Tham, L.G., Liu, D.F.: On two definitions of the factor of safety commonly used in the finite element slope stability analysis, *Computers and Geotechnics*, 33 (2006), pp.188-195, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compgeo.2006.03.007>
- [23] Zheng, H., Sun, G., Liu, D.F.: A practical procedure for searching critical slip surfaces of slopes based on the strength reduction technique, *Computers and Geotechnics*, 36 (2009), pp.1-5, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compgeo.2008.06.002>
- [24] Alkasawneh, W., Husein Malkawi, A.I., Nusairat, J.H.: A comparative study of various commercially available programs in slope stability analysis, *Computers and Geotechnics*, 35 (2008), pp. 428-435, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compgeo.2007.06.009>
- [25] Bojorque, J., De Roeck, G., Maertens, J.: Comments on 'Two-dimensional slope stability analysis by limit equilibrium and strength reduction methods by Y. M. Cheng, T. Lansivaara and W. B. Wei [Computers and Geotechnics 2007; 34:137-150]', *Computers and Geotechnics*, 35 (2008), pp. 305-308, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compgeo.2007.04.005>
- [26] The Highway Institute: *Project documentation*, (2011).
- [27] Berisavljevic, Z.: Problems in predicting the behaviour of the road embankment built on a soft soil, *Proc. of the 20th EYGEC*, Brno, pp. 242-247, 2010.
- [28] The Highway Institute: Research-developmental project - Utilization of fly-ash and slag produced in thermo-electric power plants 'Nikola Tesla A& B' and 'Kostolac A & B' for road construction, Belgrade, 2008, pp.157.
- [29] Spencer, E.: Effect of tension on stability on embankments. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering ASCE*, 94, (1968), SM5, pp.1159-1173.
- [30] Spencer, E.: Thrust line criterion in embankment stability analysis. *Geotechnique*, (1973) 23, pp. 85-100, <http://dx.doi.org/10.1680/geot.1973.23.1.85>
- [31] Plaxisbv.: *Finite Element Code for Soil and Rock Analysis, Slope Stability Analysis*, Delft University of Technology and Plaxis, The Netherlands.
- [32] Cheng, Y.M.: Location of critical failure surface and some further studies on slope stability analysis. *Computers and Geotechnics* 30 (2003), pp. 255-267, [http://dx.doi.org/10.1016/S0266-352X\(03\)00012-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0266-352X(03)00012-0)
- [33] Davis, R.O., Selvadurai, A.P.S.: *Plasticity and geomechanics*, Cambridge University press, New York, 2002., <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511614958>
- [34] Vermeer, P.A., de Borst, R.: *Non-associated plasticity for soils, concrete and rock* 29(3), Heron, Delft, 1984.