Stručni rad
UDK: 519.83:519.234

Petra Međimurec, mag. oec.*
Doc. dr. sc. Tunjo Perić**

KONCEPT I PRIMJENA EGOISTOVE DILEME

EGOIST'S DILEMMA: CONCEPT AND APPLICATION

SAŽETAK: Problemu alokacije određene količine djeljivih sredstava u ovome radu pristupa se s motrišta koncepta egoistove dileme. Ključna je pretpostavka koncepta egoistove dileme sebičnost igrača koji dijele dobitak, što znači da svaki od njih nastoji održati vlastitu nadmoć u pogledu kriterija na osnovi kojih se vrednuje rezultat. Koncept egoistove dileme razvijen je unutar zajedničkoga okvira analize omeđivanja podataka i kooperativne teorije igara. Proizašla igra i njezina proširenja u ovome radu primjenjuju se na podatke o ostvarenju igrača koji su sudjelovali u jednoj epizodi natjecateljskoga kviza znanja "Potjera" Hrvatske radiotelevizije. Budući da igrači trebaju djelovati kao tim, prema pravilima kviza svakome natjecatelju uručuje se jednak iznos zajednički osvojene novčane nagrade. Međutim, doprinosi igrača pobjedi međusobno se razlikuju, što je u ovome radu uvaženo uvođenjem odgovarajućih pretpostavki i predlaže se nekoliko alternativnih raspodjela raspoložive svote. Dobivena rješenja pozivaju se na Shapleyjevu vrijednost. Razmatraju se i ostale moguće primjene koncepta egoistove dileme. Cilj je predstaviti temu koja je nova i nedovoljno istražena i tako potaknuti na uporabu i daljnji razvoj koncepta egoistove dileme.

KLJUČNE RIJEČI: analiza omeđivanja podataka, kooperativna teorija igara, Shapleyjeva vrijednost.

ABSTRACT: This paper introduces the concept of the egoist's dilemma as a method of solving the problem of allocating a certain amount of dividable resources in a multiple criteria environment. The key assumption of this concept is the selfish behavior of players, which implies that each player is trying to maintain his own superiority regarding the criteria. The egoist's dilemma is developed within the common framework of data envelopment analysis and cooperative game theory. The resulting game and its extensions are applied to data pertaining to the scores achieved by players participating in a particular episode of a game show The Chase (aired by Croatian Radio television). The players are supposed

* Petra Međimurec, mag. oec., asistentica na Katedri za demografiju, Ekonomski fakultet - Zagreb, Trg J. F. Kennedyja 6, 10000 Zagreb.
** Doc. dr. sc. Tunjo Perić, docent na Katedri za matematiku, Ekonomski fakultet - Zagreb, Trg J. F. Kennedyja 6, 10000 Zagreb.

to work as a team, and the rules of the game show suggest rewarding each player with an equal share of the prize. However, the players' contributions to winning the prize mutually differ, and this paper proposes alternative allocations of the prize. The solutions proposed are based on the Shapley value. Other possible applications of the egoist's dilemma are also considered. The main goal is to present a relatively new, underexplored topic, and to encourage its usage and further development.

KEY WORDS: data envelopment analysis, cooperative game theory, Shapley value.

1. UVOD

U ovome radu obrađuje se problem poštene alokacije određene količine djeljivih sredstava u uvjetima višestrukih kriterija. Rješavanju navedenoga problema pristupa se na osnovi metode razvijene unutar zajedničkoga okvira analize omeđivanja podataka (AOMP) i kooperativne teorije igara. Proizašloj je AOMP igri dodijeljen naziv *egoistova dilema*. Cilj je ovoga rada predstaviti koncept i prikazati jednu moguću primjenu egoistove dileme i tako potaknuti na praktičnu upotrebu i daljnji razvoj razmatrane metode.

Egoistovu dilemu predstavili su Nakabayashi i Tone (2006.). Autori su opisali formulaciju i moguće rješenje problema postizanja konsenzusa među pojedincima ili organizacijama čiji je učinak (odnosno postignuti rezultat) potrebno ocijeniti na osnovi višestrukih kriterija. Pri postavljanju problema upotrijebili su koncepte svojstvene AOMP-u, a zatim su predložili rješenje koje se oslanja na primjenu metoda kooperativne teorije igara. Kasnije su izloženu ideju u vlastitim istraživanjima primijenili Wu, Liang i Yang (2009.), Wu, Liang i Zha (2008.), a u spomenutim se radovima model AOMP igre upotrijebio kako bi se unaprijedila postojeća metoda ocjene unakrsne učinkovitosti entiteta. Dostupne su i neke dorade izvornoga oblika egoistove dileme, što uključuje modifikaciju AOMP igre koja omogućuje izražavanje postavljenih kriterija u intervalima vrijednosti (Jahanshahloo, Lotfi i Sohraiee, 2006.) i razvoj alternativne sheme kooperativne igre primjenjive na rješavanje problema alokacije u uvjetima višestrukih kriterija (Sekine, Fu i Muto, 2014.). Dakako, postoje i mnogobrojni dodatni primjeri zajedničke upotrebe analize omeđivanja podataka i (ne samo kooperativne već i nekooperativne) teorije igara (Du, Liang, Chen, Cook i Zhu, 2011., Liang, Cook i Zhu, 2008., Liang, Wu, Cook i Zhu, 2008., Lozano, 2012., Wu, Liang, Yang i Yan, 2009., Zha i Liang, 2010., Zhu, 2004.), no istraživačko je središte ovoga rada usmjereno na egoistovu dilemu.

Ovaj rad sastavljen je od osam dijelova, što uključuje uvod (prvo poglavlje) i zaključak (osmo poglavlje). Nakon uvodnoga dijela opisuje se promatrani problem (situacija) i definira se svrha rada (drugo poglavlje). Potom se izlaže osnovni model AOMP igre i njegova obilježja (treće poglavlje). Slijedi prijedlog rješenja problema u obliku Shapleyjeve vrijednosti (četvrto poglavlje), a zatim se predstavlja dodatna mogućnost prezentacije AOMP igre (peto poglavlje). Proširenja igre obuhvaćaju davanje prioriteta preferiranim kriterijima i uključivanje nepoželjnoga rezultata igrača u analizu (šesto poglavlje). Konačno, završne napomene navode ostala moguća područja primjene, upućuju na nedostatak i daju prijedlog za nadogradnju koncepta egoistove dileme (sedmo poglavlje).

2. POSTAVLJANJE PROBLEMA

Kao polazišna točka pri opisu egoistove dileme poslužit će podatci o rezultatu igrača kviza znanja "Potjera"[1] Hrvatske radiotelevizije na čijim su internetskim stranicama dostupne detaljne informacije o pravilima (Hrvatska radiotelevizija, 2015.). Ukratko, u "Potjeri" četiri igrača (koji se međusobno ne poznaju, ali trebaju djelovati kao tim), odgovaraju na pitanja općega znanja s ciljem pohranjivanja što veće količine novca u zajedničku blagajnu. Igrači najprije zasebno odgovaraju na niz brzopoteznih pitanja u vremenu od jedne minute. Svaki točan odgovor vrijedi 3.500,00 kuna. Igrači pojedinačno moraju obraniti osvojeni iznos pred prokušanim znalcem – lovcem. Nudeći im višu i nižu ponudu, lovac omogućuje igračima da prihvate veći ili manji iznos od osvojenoga. Prihvate li višu ponudu, igrači imaju dva koraka prednosti pred lovcem i brane iznos veći od osvojenoga, a prihvate li nižu ponudu, igrači imaju četiri koraka prednosti pred lovcem i brane iznos manji od osvojenoga. Kada igrači donesu odluku o dobivenim ponudama, samostalno se suočavaju s lovcem. Točan odgovor na postavljeno pitanje vodi ih korak bliže cilju – sudjelovanju u završnome krugu natjecanja, a netočnim odgovorom ostaju na istome položaju. Lovac nastoji dostići igrače istodobno odgovarajući na ista pitanja. Pobjegnu li igrači lovcu, osiguravaju mjesto u završnome krugu natjecanja. Ne pobjegnu li mu, gube pravo na sudjelovanje u ostatku igre ne osvajajući nikakvu nagradu. Igrači koji su uspjeli ući u završni krug natjecanja timski se suprotstavljaju lovcu nastojeći odgovoriti na što više brzopoteznih pitanja u vremenu od dvije minute. Broj igrača u završnome krugu natjecanja početni je broj koraka prednosti pred lovcem. Članovi igračkoga tima svaki sljedeći korak prednosti pred lovcem stječu točnim odgovorom na postavljeno brzopotezno pitanje. Konačno, u vremenu od dvije minute lovac nastoji dostići rezultat igračkoga tima. Ponudi li lovac netočan odgovor na postavljeno pitanje, igrači dobivaju priliku vratiti ga korak unatrag davanjem točnoga odgovora na isto pitanje. Članovi igračkoga tima osvajaju iznos pohranjen u zajedničkoj blagajni ne uspije li lovac dostići njihov rezultat. U suprotnome odlaze kući praznih ruku.

Razmatra se epizoda "Potjere" emitirana 31. prosinca 2014. godine. Neka su igrači označeni slovima A, B, C i D. Svi igrači plasirali su se u završni krug natjecanja i naposljetku osvojili novčanu nagradu u iznosu od 130.500,00 kuna. Prema pravilima "Potjere" alokacija osvojene novčane nagrade podrazumijeva uručivanje jednakoga dijela ukupnoga iznosa (32.625,00 kuna) svakomu igraču. Međutim, iako su do pobjede došli zajedničkim naporima, doprinosi igrača pritom nisu bili jednaki. Ako su igrači voljni dijeliti osvojenu novčanu nagradu u skladu s vlastitim doprinosom pobjedi, postoji nekoliko mogućih prijedloga raspodjele dobitka. Dakako, svakomu igraču može se isplatiti svota koju je određenim brojem točnih odgovora na brzopotezna pitanja pohranio u zajedničku blagajnu. Tako se osvojenih 130.500,00 kuna dijeli među igračima na osnovi *samo jednoga* kriterija, no istodobno se zanemaruju ostali aspekti doprinosa igrača pobjedi. Naime, pri alokaciji se mogu razmatrati i dodatni kriteriji (poput uspjeha u završnome krugu natjecanja), koji uvažavaju višestranost kontribucije svakoga igrača osvajanju ukupnoga dobitka.

Tablica 1. prikazuje dva (proizvoljno određena) kriterija na osnovi kojih se može ocijeniti izvedba igrača: broj točnih odgovora na brzopotezna pitanja (kriterij 1) i broj točnih odgovora u završnome krugu natjecanja (kriterij 2).

---

[1] Radi se o licenčnome formatu u vlasništvu tvrtke ITV Global Entertainment Limited (The London Television Centre, Upper Ground, London SE1 9LT, Velika Britanija).

Tablica 1: Rezultat igračkoga tima (dva kriterija)

	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
Kriterij 1	7	7	3	9	26
Kriterij 2	1	10	2	2	15
Ukupno	8	17	5	11	41

Jednostavan primjer alokacije dobitka na osnovi postavljenih kriterija podjela je osvojenoga iznosa razmjerno ukupnomu doprinosu pojedinoga igrača pobjedi. U skladu s navedenim pravilom igrač A dobit će 130.500,00 kuna × 8 / 41 = 25.463,41 kunu. Slično, igrači B, C i D dobit će redom 54.109,76 kuna, 15.914,63 kune i 35.012,20 kuna. U opisanoj je raspodjeli osvojene novčane nagrade svaki kriterij jednako važan (ima istu težinu). Postoje dodatne mogućnosti vrednovanja kriterija i neke od njih prikazane su u tablici 2.

Tablica 2: Alokacija dobitka na osnovi fiksnih težina

	Igrač				Zbroj	Težina
	A	B	C	D		Kriterij 1 : Kriterij 2
Nagrada (u kunama)	25.463,41	54.109,76	15.914,63	35.012,20	130.500,00	1 : 1
Nagrada (u kunama)	29.216,42	46.746,27	15.582,09	38.955,22	130.500,00	2 : 1
Nagrada (u kunama)	20.973,21	62.919,64	16.312,50	30.294,64	130.499,99[2]	1 : 2

Fiksne težine mogu se odrediti na različite načine, što ovisi o važnosti promatranih kriterija. Smatra li se kriterij 1 važnijim od kriterija 2, igrači A i D dobit će veći dio ukupne svote, no igrači B i C možda neće biti zadovoljni opisanim načinom određivanja težina (vidjeti drugi redak tablice 2). Ako se kriterij 2 vrednuje više od kriterija 1, igrači B i C dobit će veći dio osvojene novčane nagrade, ali uz moguće negodovanje igrača A i D (vidjeti treći redak tablice 2). Dakle, alokacija koja se provodi na osnovi unaprijed određenih fiksnih težina može biti problematična.

Iznad opisana situacija može se izbjeći pristupom koji podrazumijeva primjenu varijabilnih težina svojstvenih AOMP-u (vidjeti Cooper, Seiford i Tone, 2007., str. 12-13). Neka je svaki igrač sebičan, što znači da dodjeljuje najveću težinu kriteriju koji je za njega najpovoljniji. Oznake w_1 i w_2 predstavljaju težine postavljenih kriterija. Igrač A nastojat će maksimizirati vlastiti očekivani dobitak $7w_1 + w_2$ uz ograničenje na raspoloživ iznos pohranjen u zajedničkoj blagajni $26w_1 + 15w_2 = 130.500,00$ kuna (iste težine pripisat će se sličnim doprinosima ostalih igrača vrednovanih na osnovi danih kriterija). Optimalne su težine za igrača A $w_1^* = 130.500,00 / 26 = 5.019,23$ i $w_2^* = 0$, a maksimalan dobitak iznosi $R_A^* = 7w_1^* = 35.134,62$ kune. Optimalne težine i pripadni iznosi dobitka za ostale igrače prikazani su u tablici 3.

2 Zbroj ne iznosi 130.500,00 kuna zbog zaokruživanja iznosa na prikladan broj decimala.

Tablica 3: Optimalne težine i proizašli iznosi nagrade

	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
w_1^*	5.019,23	0	0	5.019,23	
w_1^*	0	8.700	8.700	0	
Nagrada (u kunama)	35.134,62	87.000,00	17.400,00	45.173,08	184.707,70 (> 130.500,00)

Kasnije će se pokazati da navedeni način alokacije obično premašuje osvojenu novčanu nagradu pohranjenu u zajedničkoj blagajni, što je posljedica pretpostavke o sebičnome ponašanju igrača pri određivanju težina. Do rješenja prikazanoga problema u ovome će se radu doći primjenom metoda kooperativne teorije igara.

U nastavku će se analiza proširiti uključivanjem dodatnoga kriterija za alokaciju novčane nagrade koju su igrači osvojili. U obzir će se uzeti i svota novca koju je svaki igrač donio u zajedničku blagajnu (kriterij 3). Podatke o rezultatu igračkoga tima u primjeru koji će se u ostatku rada detaljnije sagledati sadrži tablica 4. Samo je igrač C prihvatio višu ponudu i manjak točnih odgovora na brzopotezna pitanja nadoknadio donošenjem najveće svote novca u zajedničku blagajnu.

Tablica 4: Rezultat igračkoga tima (tri kriterija)

	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
Kriterij 1	7	7	3	9	26
Kriterij 2	1	10	2	2	15
Kriterij 3[3]	24,5	24,5	50,0	31,5	130,5

Ključne su prednosti upotrebe opisanih podataka dostupnost i primjerenost problemu koji se obrađuje. Raspoloživi podatci otvaraju mogućnost ilustracije raspodjele osvojene novčane nagrade igračima u skladu s postavljenim kriterijima; rješenje do kojega će dovesti primjena koncepta egoistove dileme pružit će zanimljivu alternativu uvriježenomu postupku podjele dobivenoga iznosa na jednake dijelove.

3. OPIS IGRE

Objašnjenja strukture i matematičkih svojstava AOMP igre koja sačinjavaju ovaj dio rada sastavljena su po uzoru na sljedeće izvore: Cooper i sur. (2007., str. 405-421), Nakabayashi i Tone (2006.). Poopćenje problema razmatranoga u drugome poglavlju popraćeno je primjerima koji se odnose na prethodno dane podatke o rezultatu članova igračkoga tima "Potjere". Cilj je pružiti što bolji uvid u koncept egoistove dileme i prikazati oblik koji poprima kada se obrađuju konkretne okolnosti.

3 Vrijednosti kriterija 3 su izražene u tisućama kuna.

3.1. Matematička formulacija

Neka je n igrača postiglo rezultat koji se ocjenjuje na osnovi m kriterija i sadržan je u matrici $X = (x_{ij}) \in R_{+}^{n\times m}$. Pretpostavlja se da veći rezultat vrednovan određenim kriterijem znači bolju izvedbu igrača mjerenu istim kriterijem. Svaki igrač k ima pravo postaviti skup nenegativnih težina $w^k = (w_1^k, w_2^k, \ldots, w_m^k)$ koje su za njega najpovoljnije. Rezultat igrača k u odnosu na ukupan rezultat svih igrača definira se pomoću težina w^k:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}}{\sum_{i=1}^{m} w_i^k (\sum_{j=1}^{n} x_{ij})}. \tag{1}$$

Nazivnik predstavlja ukupan rezultat svih igrača određen težinama koje je usvojio igrač k. Brojnik pokazuje samovrednovanje igrača k na osnovi istih težina. Dakle, izraz (1) odnosi se na relativnu važnost igrača uvjetovanu težinama w_k koje je odredio.

Igrač k nastoji maksimizirati dani omjer selekcijom najpovoljnijih težina, što rezultira sljedećim problemom razlomljenoga programiranja:

$$\max_{w^k} \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}}{\sum_{i=1}^{m} w_i^k (\sum_{j=1}^{n} x_{ij})} \tag{2}$$

uz ograničenje

$$w_i^k \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m.$$

Problem se bez gubitka općenitosti može zapisati i na način prikazan ispod. Nad redcima skupa podataka X provodi se normalizacija kako bi vrijedilo $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \ldots, m$. Navedeno se postiže dijeljenjem retka $(xi_1, ..., x_{in})$ sa zbrojem vrijednosti koje sadrži: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$, što ne utječe na program (2). Potom se upotrebom Charnes-Cooperove transformacije (Charnes i Cooper, 1962., vidjeti i Cooper i sur., 2007., str. 72, 268) nelinearni problem razlomljenoga programiranja (2) može izraziti u linearnome obliku:

$$c(k) = \max_{w^k} \sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik} \tag{3}$$

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{m} w_i^k = 1$$

$$w_i^k \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m.$$

Poteškoća se krije u pronalasku maksimuma funkcije cilja u programu (3) simpleks algoritmom predstavljenim danim ograničenjima. Naizgled se do optimalnoga rješenja dolazi pripisivanjem vrijednosti 1 težini kriterija $i(k)$ kako bi vrijedilo $x_{i(k)} = \max\{x_{ik} \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$, što podrazumijeva pripisivanje vrijednosti 0 težinama ostalih kriterija.[4] Oznaka je za razmatrano optimalno rješenje $c(k)$.

[4] Pretpostavlja se da ne postoje višestruka optimalna rješenja. U suprotnome se neko od njih može proizvoljno uporabiti.

Vrijednost $c(k)$ pokazuje najveći relativni rezultat igrača k koji se postiže postavljanjem optimalnih težina. Općenito, igrači će određivati različite optimalne težine.

Propozicija 1

$$\sum_{k=1}^{n} c(k) \geq 1.$$

Za dokaz propozicije 1 vidjeti Cooper i sur. (2007., str. 408) ili Nakabayashi i Tone (2006., str. 136).

Ako su igrači sebični i inzistiraju na dobivanju dijela nagrade koji je predstavljen vrijednošću $c(k)$, zbroj traženih dobitaka obično premašuje raspoloživu svotu. Iz navedenoga razloga slijedi da $c(k)$ ne može igrati ulogu u alokaciji osvojenoga iznosa. Ako se naposljetku zbrajanjem $c(k)$ vrijednosti dobije 1, igrači će prihvatiti proizašlu raspodjelu jer se ista odnosi na najpovoljniju selekciju težina za svakoga člana tima. Pritom će zbroj $c(k)$ vrijednosti iznositi 1 samo u situaciji u kojoj se optimalne težine za igrače međusobno ne razlikuju.

Propozicija 2

Jednakost $\sum_{k=1}^{n} c(k) = 1$ vrijedi ako i samo ako matrica koja sadrži rezultat igrača zadovoljava uvjet

$$x_{1k} = x_{2k} = \ldots = x_{mk},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Izloženo podrazumijeva isti rezultat svakoga igrača s obzirom na m postavljenih kriterija.

U iznad danome slučaju samo je jedan kriterij dovoljan za opis igre i raspodjela proporcionalna dobivenomu rezultatu predstavlja poštenu alokaciju. Međutim, puno se češće javlja relacija $\sum_{k=1}^{n} c(k) > 1$ koja se veže uz koncept egoistove dileme.

Iako se alokacija osvojene nagrade proporcionalna $\{c(k)\}$ vrijednostima nameće kao moguće rješenje, ona neće biti racionalna ako se dopusti suradnja igrača odnosno stvaranje koalicije.

Opisani proces objasnit će se na osnovi podataka sadržanih u tablici 4. Normalizirana matrica rezultata prikazana je u tablici 5 (zadebljane vrijednosti pokazuju najveći iznos u svakome stupcu). Osvojena novčana nagrada također je normalizirana kako bi iznosila 1.

Tablica 5: Normalizirana matrica rezultata

	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
Kriterij 1	**0,2692**	0,2692	0,1154	**0,3462**	1
Kriterij 2	0,0667	**0,6667**	0,1333	0,1333	1
Kriterij 3	0,1877	0,1877	**0,3831**	0,2414	1
Ukupno[5]	0,5236	1,1236	0,6319	0,7209	3

[5] Vrijednosti koje tablica 5. sadrži zaokružene su na četiri decimale (ne odnosi se na posljednji stupac), stoga može doći do blagih odstupanja od navedenih vrijednosti zbrojeva/ukupnih iznosa.

Linearni program za igrača A izveden na osnovi izraza (3) glasi:

$$c(\mathrm{A}) = \max\ 0{,}2692w_1 + 0{,}0667w_2 + 0{,}1877w_3$$

uz ograničenja

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0.$$

Optimalno rješenje već je dobiveno i iznosi $w_1^* = 1$, $w_2^* = 0$, $w_3^* = 0$ uz vrijednost $c(\mathrm{A}) = 0{,}2692$ koja je zadebljana u tablici 5. Za ostale su igrače optimalna rješenja također sadržana u tablici 5. i zadebljana u pripadnim stupcima. Ukupno se zbog pretpostavke o sebičnome ponašanju igrača zahtijeva nagrada u iznosu od 0,2692 + 0,6667 + 0,3831 + 0,3462 = 1,6652 koja premašuje svotu raspoloživu u zajedničkoj blagajni za 66,52 %.

3.2. Pretpostavke i poštena alokacija

Ponašanje igrača je sebično i svaki član tima ustraje na težinama koje su njemu najpovoljnije, što je izraženo programom (3). Osim navedenoga pretpostavlja se i sljedeće:

I. svi igrači pristaju na neraskidanje igre

II. svi igrači voljni su međusobno pregovarati kako bi postigli razumnu i pravičnu alokaciju osvojene nagrade.

Cilj je u nastavku ovoga rada primjenom metoda kooperativne teorije igara pronaći poštenu raspodjelu raspoloživoga iznosa igračima.

3.3. Suradnja igrača i svojstvena funkcija

Stvaranje koalicije podrazumijeva suradnju igrača. Koaliciju čini bilo koji podskup S skupa igrača $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Primjeri su oznaka koje predstavljaju koalicije: {A, B}, {A, C, D}.

Rezultat koalicije S može se definirati kao zbroj ostvarenja njezinih članova s obzirom na postavljene kriterije:

$$x_i(S) = \sum_{j \in S} x_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Koalicija S nastoji maksimizirati vlastiti očekivani dobitak $c(S)$ rješavanjem sljedećega problema linearnoga programiranja:

$$c(S) = \max_{w} \sum_{i=1}^{m} w_i x_i(S) \tag{4}$$

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Vrijednost $c(S)$ određuje karakterističnu funkciju koalicije S. Pritom je $c(\varnothing) = 0$. Dakle, riječ je o kooperativnoj igri u obliku koalicije s prenosivom korisnošću koju prikazuje (N, c).

Propozicija 3

Svojstvo je karakteristične funkcije c subaditivnost, što znači da za bilo koji $S \subset N$ i $T \subset N$ uz $S \cap T = \varnothing$ vrijedi

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T).$$

Za dokaz propozicije 3 vidjeti Cooper i sur. (2007., str. 410) ili Nakabayashi i Tone (2006., str. 137).

Usvaja se i propozicija istaknuta ispod.

Propozicija 4

$$c(N) = 1.$$

Slijedi popisivanje svih koalicija i njihovih karakterističnih funkcija na osnovi raspoloživih prethodno opisanih podataka. Dobiveno je prikazano u tablici 6. (izostavljeni su slučajevi koji se odnose na koalicije čiji je član samo jedan igrač).

Tablica 6: Koalicije i pripadne karakteristične funkcije

Koalicija	Vrijednost karakteristične funkcije
{A, B}	0,7333
{A, C}	0,5709
{A, D}	0,6154
{B, C}	0,8000
{B, D}	0,8000
{C, D}	0,6245
{A, B, C}	0,8667
{A, B, D}	0,8846
{A, C, D}	0,8123
{B, C, D}	0,9333
{A, B, C, D}	1

4. RJEŠENJE IGRE

Nakabayashi i Tone (2006.) temeljito obrađuju koncept egoistove dileme, pa tako i moguće rješenje razmatranoga problema. Ovo poglavlje ne obuhvaća toliko detalja: najprije se određuje granični doprinos svakoga igrača u popisanim koalicijama, a potom se predstavlja Shapleyjeva vrijednost koja služi pronalasku optimalne alokacije osvojene novčane nagrade u analiziranoj situaciji.

4.1. Koalicija i individualni doprinos igrača

Ulazak u koaliciju ne nudi jednaku prednost svakomu igraču. U tablici 7. navedena je tvrdnja predočena.

Tablica 7: Granični doprinos igrača koaliciji

Koalicija	Igrač			
	A	B	C	D
{A}	0,2692	0	0	0
{B}	0	0,6667	0	0
{C}	0	0	0,3831	0
{D}	0	0	0	0,3462
{A, B}	0,0667	0,4641	0	0
{A, C}	0,1877	0	0,3017	0
{A, D}	0,2692	0	0	0,3462
{B, C}	0	0,4169	0,1333	0
{B, D}	0	0,4538	0	0,1333
{C, D}	0	0	0,2784	0,2414
{A, B, C}	0,0667	0,2958	0,1333	0
{A, B, D}	0,0846	0,2692	0	0,1513
{A, C, D}	0,1877	0	0,1969	0,2414
{B, C, D}	0	0,3088	0,1333	0,1333
{A, B, C, D}	0,0667	0,1877	0,1154	0,1333

Slijedi pojašnjenje sadržaja tablice 7. Naime, poznato je da koalicija {A, B} postiže maksimalan dobitak u vrijednosti od 0,7333 (vidjeti prvi redak tablice 6.). Nadalje, najveće nagrade koje igrači A i B samostalno mogu potraživati redom iznose 0,2692 i 0,6667 (vidjeti prvi i drugi stupac tablice 5.). Dakle, granični doprinos igrača A koaliciji {A, B} iznosi $c(\{A, B\}) - c(\{B\}) = 0,7333 - 0,6667 = 0,0667$[6], a granični doprinos igrača B istoj koaliciji iznosi $c(\{A, B\}) - c(\{A\}) = 0,7333 - 0,2692 = 0,4641$. Uloga je igrača A u koaliciji {A, B, C} najskromnija: $c(\{A, B, C\}) - c(\{B, C\}) = 0,8667 - 0,8000 = 0,0667$. Ostali su unosi u tablici 7. dobiveni sukladno izloženome postupku.

4.2. Shapleyjeva vrijednost

Poznato je da individualni doprinos igrača k u koaliciji S iznosi $c(S) - c(S - \{k\})$. Razumno je, dakle, ocijeniti doprinos igrača k u cijeloj igri na osnovi prosjeka graničnih

[6] Odstupanje razlike proizlazi iz zaokruživanja umanjenika i umanjitelja na četiri decimale.

doprinosa koje ostvaruje u mogućim koalicijama čiji je član. Shapleyjeva se vrijednost (Shapley, 1953.) pritom nameće kao reprezentativno rješenje kooperativne igre. Postupak opisan u nastavku odnosi se na AOMP igru koja se obrađuje u ovome radu. Najprije se predstavlja poredak igrača do kojega može doći prilikom stvaranja koalicije. Neka stvaranje koalicije započne pristupanjem samo jednoga člana – igrača A. Potom se koaliciji pridružuje igrač B, a slijede ga redom igrači C i D. Oznaka je za tako nastalu koaliciju A ← B ← C ← D.

Granični je doprinos igrača D

$$c(\{A, B, C, D\}) - c(\{A, B, C\}) = 1 - 0{,}8667 = 0{,}1333.$$

Nadalje, granični je doprinos igrača C (neovisno o igraču D)

$$c(\{A, B, C\}) - c(\{A, B\}) = 0{,}8667 - 0{,}7333 = 1{,}1333^{7}.$$

Granični doprinosi igrača B i A određuju se na isti način.

Dekompozicija je graničnoga doprinosa igrača u koaliciji A ← B ← C ← D:

$$1 = c(\{A, B, C, D\}) = 0{,}2692(A) + 0{,}4641(B) + 0{,}1333(C) + 0{,}1333(D).$$

Izloženu dekompoziciju prikazuje prvi redak tablice 8., a ostali su unosi dobiveni sukladno danomu postupku na osnovi sadržaja tablica 5. i 6.: razmatra se svaki poredak (permutacija) igrača do kojega može doći prilikom stvaranja koalicije i vrednuje se granični doprinos pojedinih članova. Iznimka je posljednji redak tablice 8. koji sadrži proizašlu Shapleyjevu vrijednost. Naime, pretpostavlja se da je svaka permutacija jednako vjerojatna, a Shapleyjeva je vrijednost prosjek izračunatih graničnih doprinosa pojedinih članova koalicije.

Tablica 8: Shapleyjeva vrijednost

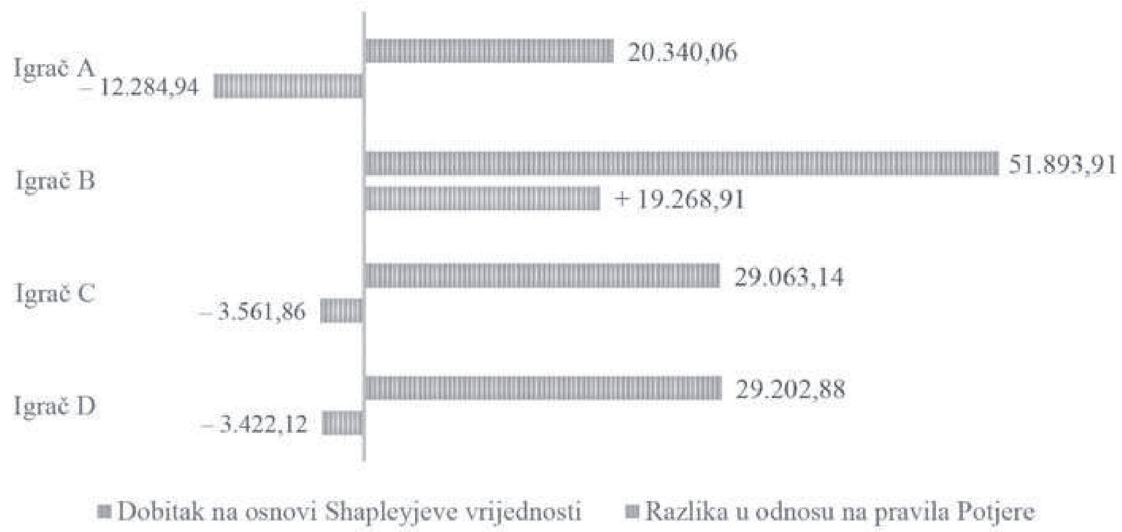
Koalicija	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
A ← B ← C ← D	0,2692	0,4641	0,1333	0,1333	1
A ← B ← D ← C	0,2692	0,4641	0,1154	0,1513	1
A ← C ← B ← D	0,2692	0,2958	0,3017	0,1333	1
A ← C ← D ← B	0,2692	0,1877	0,3017	0,2414	1
A ← D ← B ← C	0,2692	0,2692	0,1154	0,3462	1
A ← D ← C ← B	0,2692	0,1877	0,1969	0,3462	1
B ← A ← C ← D	0,0667	0,6667	0,1333	0,1333	1
B ← A ← D ← C	0,0667	0,6667	0,1154	0,1513	1

[7] Unosi su zaokruženi na četiri decimale, što objašnjava moguća blaga odstupanja od navedenih vrijednosti zbrojeva.

Nastavak tablice 8.

Koalicija	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
B ← C ← A ← D	0,0667	0,6667	0,1333	0,1333	1
B ← C ← D ← A	0,0667	0,6667	0,1333	0,1333	1
B ← D ← A ← C	0,0846	0,6667	0,1154	0,1333	1
B ← D ← C ← A	0,0667	0,6667	0,1333	0,1333	1
C ← A ← B ← D	0,1877	0,2958	0,3831	0,1333	1
C ← A ← D ← B	0,1877	0,1877	0,3831	0,2414	1
C ← B ← A ← D	0,0667	0,4169	0,3831	0,1333	1
C ← B ← D ← A	0,0667	0,4169	0,3831	0,1333	1
C ← D ← A ← B	0,1877	0,1877	0,3831	0,2414	1
C ← D ← B ← A	0,0667	0,3088	0,3831	0,2414	1
D ← A ← B ← C	0,2692	0,2692	0,1154	0,3462	1
D ← A ← C ← B	0,2692	0,1877	0,1969	0,3462	1
D ← B ← A ← C	0,0846	0,4538	0,1154	0,3462	1
D ← B ← C ← A	0,0667	0,4538	0,1333	0,3462	1
D ← C ← A ← B	0,1877	0,1877	0,2784	0,3462	1
D ← C ← B ← A	0,0667	0,3088	0,2784	0,3462	1
Shapleyjeva vrijednost	0,1559	0,3977	0,2227	0,2238	1

Grafikon 1. prikazuje prijedlog alokacije osvojene novčane nagrade s obzirom na dobivenu Shapleyjevu vrijednost. Igraču A u skladu s pripadnom Shapleyjevom vrijednošću trebala bi pripasti svota od 20.340,06 kuna, a prema pravilima "Potjere" igraču A dodijeljen je iznos od 32.625,00 kuna. Proizašla je razlika negativna i apsolutno izraženo iznosi čak 12.284,94 kune.



Grafikon 1: Alokacija dobitka na osnovi Shapleyjeve vrijednosti

Dobro poznata formula za izračun Shapleyjeve vrijednosti $\phi_k(c)$ igrača k pomoću karakteristične funkcije $c(S)$ glasi:

$$\phi_k(c) = (n!)^{-1} \sum_{S:k\in S\subset N}(s-1)!(n-s)!\{c(S) - c(S-\{k\})\}. \tag{5}$$

U izrazu (5) s označuje broj članova koalicije S. Ako podskup S ($\subset N$) uključuje igrača k, onda je granični doprinos toga igrača $c(S) - c(S - \{k\})$. Broji se pojava definiranoga doprinosa u svim permutacijama koje uključuju igrača k. Kako bi se objasnila procedura putem koje se dolazi do Shapleyjeve vrijednosti, potrebno je pretpostaviti da je igrač k u koaliciju stupio posljednji. To znači da su mu prethodili igrači α_1, ..., α_{s-1}, a slijedit će ga igrači β_1, ..., β_{n-s}. Opisani se obrazac javlja $(s-1)!(n-s)!$ puta u svim permutacijama $n!$. Prema tome, uvaži li se pretpostavka kojom se uz svaku permutaciju veže jednaka vjerojatnost nastupanja, Shapleyjeva vrijednost $\phi_k(c)$ igrača k može se odrediti formulom za izračun navedenom u izrazu (5).

5. ALTERNATIVNI OBLIK IGRE

Dosad izloženo može se pojednostavniti upotrebom AOMP-a. Pritom se problem maksimizacije, koji se može nazvati AOMP max igrom i dan je izrazom (4), pretvara u problem minimizacije – AOMP min igru:

$$d(S) = \min_{w} \sum_{i=1}^{m} w_i x_i(S) \tag{6}$$

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Optimalno rješenje $d(S)$ najmanja je vrijednost nagrade koju koalicija S može očekivati na osnovi igre. Pomoću optimalnoga rješenja definira se AOMP min igra (N, d). Ta je igra superaditivna, što znači da vrijedi:

$$d(S \cup T) \geq d(S) + d(T),\ \forall S,\ T \subset N,\ S \cap T = \emptyset.$$

Dakle, na početku je razmatrane igre $d(k) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ i dobitak raste stvaranjem koalicija. Navedeni postupak traje sve dok ne nastane velika koalicija N uz koju se veže $d(N) = 1$.

Igre (N, d) i (N, c) povezane su na način čiji opis slijedi u nastavku.

Propozicija 5

$$d(S) + c(N - S) = 1,\ \forall S \subset N.$$

Za dokaz propozicije vidjeti Cooper i sur. (2007., str. 414) ili Nakabayashi i Tone (2006., str. 138).

Teorem 1

Shapleyjeva je vrijednost AOMP max i min igara (N, c) i (N, d) jednaka.

Za dokaz teorema 1 vidjeti Cooper i sur. (2007., str. 415) ili Nakabayashi i Tone (2006., str. 140).

Teorem 1 upućuje na zanimljivo svojstvo Shapleyjeve vrijednosti u AOMP igrama. Iako max igra podrazumijeva sebično ponašanje igrača, a min igra samopožrtvovno, proizašlo je Shapleyjevo rješenje jednako: $\phi_k(d) = \phi_k(c)$. Dakle, do raspodjele osvojene novčane nagrade igračima "Potjere" koja je prikazana na grafikonu 1 i može se, u skladu s postavljenim kriterijima, smatrati pravičnom došlo bi se i rješavanjem prikladno postavljene AOMP min igre (6).

6. PROŠIRENJA IGRE

Model AOMP igre koji je opisan u prethodnim poglavljima može se nadograditi kako bi pri praktičnoj upotrebi odgovarao većemu broju različitih situacija. Primjeri takvih situacija se ilustriraju u ostatku ovoga dijela rada. Najprije se prikazuje oblik AOMP igre pogodan za primjenu u slučaju koji podrazumijeva suglasnost igrača o značaju određenih kriterija. Zatim se uvođenjem dodatnih postavki u AOMP igru omogućuje uvažavanje ne samo uspjeha već i neuspjeha igrača.

6.1. Određivanje važnosti postavljenih kriterija

Neka su svi igrači voljni dati prednost nekome kriteriju. U svrhu pojašnjenja može se (proizvoljno) pretpostaviti da je kriteriju 1 potrebno dodijeliti prioritet nad kriterijem 2. Tada se polazišnomu problemu linearnoga programiranja (3) dodaje ograničenje

$$w_1 \geq w_2 \text{ (ili } \frac{w_1}{w_2} \geq 1).$$

Isto ograničenje valja uključiti i u problem linearnoga programiranja (4) koji se odnosi na koaliciju S.

Ako se preferencije igrača o važnosti kriterija međusobno ne razlikuju, može se primijeniti model područja izvjesnosti (takozvana AR metoda[8]). Spomenuti su model predstavili Thompson, Singleton, Thrall i Smith (1986.), a potom se AR metoda nastavila razvijati u okviru AOMP literature (vidjeti i Dyson i Thanassoulis, 1988., Roll i Golany, 1993., Thompson, Langemeier, Lee, Lee i Thrall, 1990.). Ako označuje težinu referentnoga kriterija, onda se na omjer w_i/w_1 postavlja ograničenje

8 Kratica AR odražava engleski naziv metode o kojoj je riječ (izvorno: *assurance region method*).

$$L_i \leq \frac{w_i}{w_1} \leq U_i,\ i = 2, 3, \ldots, m.$$

Pritom su L_i i U_i redom donja i gornja granica omjera $^{w_i}/_{w_1}$. Vrijednosti navedenih granica određuju se sporazumno (uz pristanak svakoga igrača). U danim okolnostima program (4) može se zapisati na sljedeći način:

$$c(S) = \max_{w} \textstyle\sum_{i=1}^{m} w_i x_i(S)$$

uz ograničenja

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

$$L_i \leq \frac{w_i}{w_1} \leq U_i,\ i = 2, 3, \ldots, m$$

$$w_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Na osnovi podataka predočenih u tablici 5. demonstrirat će se provedba iznad izloženoga postupka. U tu svrhu nužno se pretpostavlja da su članovi igračkoga tima "Potjere" postigli konsenzus o važnosti razmatranih kriterija. Ako je dogovorom utvrđeno da je kriterij 3 pri alokaciji raspoloživoga iznosa poželjno vrednovati više kriterija 1 i kriterija 2, onda je prikladno osloniti se na AR metodu i početnu AOMP igru proširiti ograničenjima

$$w_3 \geq w_1,\ w_3 \geq w_2 \ (\text{ili } \frac{w_1}{w_3} \leq 1,\ \frac{w_2}{w_3} \leq 1).$$

Prema tome, zahtijeva se da vrijedi $U_i = 1$, i = 1, 2, a vrijednosti su donjih granica neodređene. U petome poglavlju ovoga rada ustanovilo se da je Shapleyjeva vrijednost AOMP max i min igara (N, c) i (N, d) jednaka, stoga se u nastavku traži rješenje problema linearnoga programiranja

$$d(S) = \min_{w} \textstyle\sum_{i=1}^{3} w_i x_i(S)$$

uz ograničenja

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$$

$$w_3 \geq w_1,\ w_3 \geq w_2$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0.$$

Tablica 9. prikazuje proizašle vrijednosti karakterističnih funkcija koje su izračunate pomoću Microsoft Excel programske podrške (uporabljen je dodatak Rješavatelj).

Tablica 9: Vrijednosti karakterističnih funkcija – AR slučaj

Koalicija	$d(S)$	Koalicija	$d(S)$	Koalicija	$d(S)$
{A}	0,1272	{A, C}	0,3852	{A, B, C}	0,7062
{B}	0,1877	{A, D}	0,3146	{A, B, D}	0,6169
{C}	0,2106	{B, C}	0,4777	{A, C, D}	0,5728
{D}	0,1874	{B, D}	0,4291	{B, C, D}	0,7715
{A, B}	0,3755	{C, D}	0,4456	{A, B, C, D}	1

Tablica 10. sadrži pripadnu Shapleyjevu vrijednost do koje se došlo na otprije poznat način (vidjeti poglavlje 4.2.).

Tablica 10: Shapleyjeva vrijednost – AR slučaj

Koalicija	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
Shapleyjeva vrijednost	0,1750	0,2959	0,2932	0,2358	1

Prijedlog raspodjele osvojene novčane nagrade koji je u skladu s pretpostavljenim stavom igrača o značaju pojedinih kriterija istaknut je u tablici 11.

Tablica 11: Alokacija dobitka – AR slučaj

	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
AR slučaj (umanjenik)	22.837,28	38.620,20	38.267,85	30.774,68	130.500,01
Alokacija iz poglavlja 4.2. (umanjitelj)	20.340,06	51.893,91	29.063,14	29.202,88	130.499,99
Razlika[9]	+ 2.497,21	– 13.273,71	+ 9.204,71	+ 1.571,79	0,00

Svote dobivene u AR slučaju uspoređuju se s ranije ponuđenom alokacijom dobitka (vidjeti grafikon 1. u poglavlju 4.2.), koja ne uvažava preferencije igrača o važnosti postavljenih kriterija. Interpretacija je posljednjega retka tablice 11 sljedeća: AR slučaj u odnosu na alokaciju iz poglavlja 4.2. igraču C, koji je s obzirom na kriterij 3 ostvario najveći rezultat, dodjeljuje čak 9.203,45 kuna više (radi se dakle, o pozitivnoj razlici).

[9] Moguća blaga odstupanja od navedenih vrijednosti zbrojeva (i razlike iz posljednjega retka tablice 11.) posljedica su zaokruživanja unosa na određen broj decimala.

6.2. Simultano razmatranje superiornosti i inferiornosti igrača

Dosadašnja su se poglavlja bavila AOMP igrom u kojoj se matrica rezultata X odnosila isključivo na superiornost (uspjeh, poželjne značajke, korist) igrača. Međutim, može doći i do situacije u kojoj neki kriteriji odražavaju inferiornost (neuspjeh, nepoželjne značajke, trošak) igrača. U toj je situaciji AOMP igru potrebno proširiti, a takva igra, u koju je uključena i maloprije spomenuta inferiornost igrača, naziva se igrom koristi i troška – BC[10] igrom. Rezultat igrača u BC igri vrednuje se na osnovi razlike između koristi i troška (na osnovi profita).

Neka postoji s kriterija koji predstavljaju superiornost i m kriterija koji predstavljaju inferiornost igrača. Nadalje, neka su y_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, s$ i x_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$ redom poželjne i nepoželjne značajke igrača j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Tada je ocjena rezultata igrača j

$$(u_1 y_{1j} + \ldots + u_s y_{sj}) - (v_1 x_{1j} + \ldots + v_m x_{mj}). \tag{7}$$

Pritom su $u = (u_1, ..., u_s)$ težine koje se pripisuju poželjnim, a $v = (v_1, ..., v_m)$ težine koje se pripisuju nepoželjnim značajkama igrača. Rezultat igrača j u odnosu na ukupan rezultat svih igrača uvjetovan je – slično izrazu (1) – težinama u i v:

$$\frac{\sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{s} u_i \left(\sum_{k=1}^{n} y_{ik}\right) - \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\right)}.$$

Igrač j nastoji maksimizirati vlastiti rezultat. Usto se uvodi ograničenje kojime se pretpostavlja da je rezultat svih igrača nenegativan:

$$\sum_{i=1}^{s} u_i y_{ik} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dosad izloženo može se opisati linearnim programom ispod:

$$\max_{v,\,u} \sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$$

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{s} u_i \left(\sum_{k=1}^{n} y_{ik}\right) - \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\right) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_i y_{ik} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

$$v_i \geq 0, \; u_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Postupak kojime se dolazi do rješenja BC igre također iziskuje popisivanje mogućih koalicija i pronalazak pripadajuće Shapleyjeve vrijednosti. Ipak, normalizacija redaka matrice koja sadrži rezultat igrača u BC igri nije dostupna (Nakabayashi i Tone, 2006., str. 143). Karakteristična funkcija koalicije S definirana je linearnim programom:

[10] Kratica BC potječe od engleskoga naziva igre koristi i troška (izvorno: *benefit – cost game*).

$$c(S) = \max_{v,\, u} \sum_{i=1}^{s} u_i \sum_{j \in S} y_{ij} - \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j \in S} x_{ij} \tag{8}$$

uz ograničenja

$$\sum_{i=1}^{s} u_i \left(\sum_{k=1}^{n} y_{ik} \right) - \sum_{i=1}^{m} v_i \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \right) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_i y_{ik} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

$$v_i \geq 0,\ u_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

U programu (8) zadržano je ograničenje kojime se pretpostavlja da je rezultat svih igrača nenegativan. S obzirom na to da su ograničenja u programu (8) jednaka za sve koalicije, vrijedi propozicija 6.

Propozicija 6

Svojstvo je BC max igre subaditivnost.

Za dokaz propozicije 6 vidjeti Nakabayashi i Tone (2006., str. 143).

Vrijedi i jednakost $c(N) = 1$.

Alternativni je oblik BC max igre (istovjetno slučaju iz petoga poglavlja) BC min igra koja je superaditivna.

Propozicija 7

Budući da su BC max i min igre (N, c) i (N, d) dualne, vrijedi

$$d(S) + c(N - S) = 1,\ \forall S \subset N.$$

Za dokaz propozicije 7 vidjeti Nakabayashi i Tone (2006., str. 143).

Iz propozicije 7 slijedi da je Shapleyjeva vrijednost max i min igara (N, c) i (N, d) jednaka.

Kako bi se BC igra primijenila na rezultat igračkoga tima "Potjere", nužno je razmotriti i mjeru neuspjeha igrača. U tu će se svrhu u analizu uključiti i broj netočnih odgovora na brzopotezna pitanja (kriterij 4). Prema tome, u nastavku se na osnovi podataka koje sadrži tablica 12. nastoji pronaći poštena alokacija raspoložive novčane nagrade.

Tablica 12: Rezultat igračkoga tima (četiri kriterija)

	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
Kriterij 1	7	7	3	9	26
Kriterij 2	1	10	2	2	15
Kriterij 3[11]	24,5	24,5	50,0	31,5	130,5
Kriterij 4	4	4	5	2	15

Najprije valja pronaći rješenje prikladne inačice programa (8). Kako se pokazalo u poglavlju 6.1. ovoga rada, može se pretpostaviti da su igrači suglasno odredili značaj pojedinih kriterija. Neka su u ovome slučaju igrači odlučili kriterije 1 i 2 vrednovati jednako (oba su izdvojena kriterija mjerilo znanja). Istim se kriterijima daje prioritet nad kriterijem 3 (oprečno AR slučaju koji je predstavljen u poglavlju 6.1.). Nadalje, igrači smatraju da su kriteriji 1, 2 i 3 (koji se odnose na poželjne značajke igrača) ipak važniji od kriterija 4 (koji je mjerilo neznanja i predstavlja nepoželjnu značajku igrača). Konačno, dogovorom je ustanovljeno da se vrijednost težine kriterija 4 mora kretati u precizno postavljenome rasponu: tako da se nalazi između jedne i triju četvrtina vrijednosti težine kriterija 1. Iz navedenoga slijedi da je polazišnu BC igru potrebno proširiti ograničenjima:

$$\frac{u_1}{u_2} = 1$$

$$\frac{u_1}{u_3} \geq 1, \ \frac{u_2}{u_3} \geq 1$$

$$\frac{u_1}{v_1} \geq 1, \ \frac{u_2}{v_2} \geq 1, \ \frac{u_3}{v_1} \geq 1$$

$$\frac{4}{3} \leq \frac{u_1}{v_1} \leq 4.$$

Dakle, traži se rješenje problema linearnoga programiranja:

$$c(S) = \max_{v,\,u} \textstyle\sum_{i=1}^{3} u_i \sum_{j \in S} y_{ij} - v_1 \sum_{j \in S} x_{1j} \tag{9}$$

uz ograničenja

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} u_i \left(\sum_{k=1}^{4} y_{ik} \right) - v_1 \left(\sum_{k=1}^{4} x_{1k} \right) = 1$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} u_i y_{ik} - v_1 x_{1k} \geq 0, \ k = 1, 2, 3, 4$$

$$\frac{u_1}{u_2} = 1$$

[11] Vrijednosti su kriterija 3 (kao i u tablici 4) izražene u tisućama kuna.

$$\frac{u_1}{u_3} \geq 1, \frac{u_2}{u_3} \geq 1$$

$$\frac{u_1}{v_1} \geq 1, \frac{u_2}{v_2} \geq 1, \frac{u_3}{v_1} \geq 1$$

$$\frac{4}{3} \leq \frac{u_1}{v_1} \leq 4$$

$$v_1 \geq 0, u_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

U tablici 13 prikazane su dobivene vrijednosti karakterističnih funkcija.

Tablica 13: Vrijednosti karakterističnih funkcija – BC slučaj

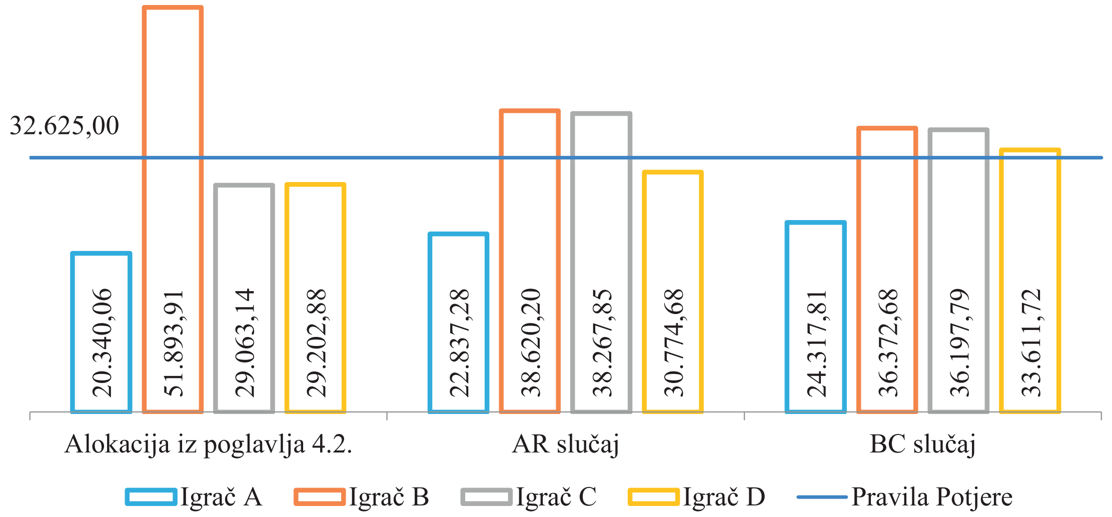
Koalicija	$c(S)$	Koalicija	$c(S)$	Koalicija	$c(S)$
{A}	0,1878	{A, C}	0,5082	{A, B, C}	0,7496
{B}	0,3166	{A, D}	0,4508	{A, B, D}	0,7674
{C}	0,3204	{B, C}	0,5618	{A, C, D}	0,7598
{D}	0,2630	{B, D}	0,5796	{B, C, D}	0,8168
{A, B}	0,5045	{C, D}	0,5757	{A, B, C, D}	1

Iznova se primjenjuje i već dobro poznata procedura za određivanje Shapleyjeve vrijednosti (vidjeti poglavlje 4.2.), a ishod je predočen u tablici 14.

Tablica 14: Shapleyjeva vrijednost – BC slučaj

Koalicija	Igrač				Zbroj
	A	B	C	D	
Shapleyjeva vrijednost	0,1863	0,2787	0,2774	0,2576	1

Alokacija koju sugerira BC igra (9) najveći iznos još jednom dodjeljuje igraču B. Na grafikonu 2 BC slučaj uspoređuje se s ostalim alokacijama koje su predložene u prethodnim poglavljima ovoga rada. Za igrače A i D najbolji su uvjeti koje nudi upravo BC slučaj. Alokacija iz poglavlja 4.2. najviše odgovara igraču B, a igraču C najveći dio svote iz zajedničke blagajne pripao bi u AR slučaju (što ne iznenađuje ako se u obzir uzmu pretpostavljene preferencije o značaju kriterija).



Grafikon 2: Različite mogućnosti alokacije dobitka

7. ZAVRŠNE NAPOMENE

Središnja je pretpostavka koncepta egoistove dileme sebičnost igrača. To znači da će prilikom raspodjele raspoloživih sredstava igrači nastojati održati vlastitu nadmoć u pogledu kriterija na osnovi kojih se vrednuje rezultat. Izložena je pretpostavka primjeren opis brojnih i realnih društvenih situacija i prijepora koji se nerijetko rješavaju na osnovi običaja, uvažavanjem samo jednoga kriterija ili primjenom pravila fiksnih težina. Prednosti su predstavljene AOMP igre (i njezinih inačica i proširenja) objektivnost, uvažavanje višestrukih kriterija i rješenje koje su voljni prihvatiti svi sudionici.

Nakabayashi i Tone (2006.) predlažu niz mogućih primjena modela AOMP igre. Prvo, AOMP max igra može se primijeniti u svrhu alokacije beneficija igračima. Drugo, AOMP min igra prikladna je za alokaciju troškova odnosno dijeljenje opterećenja. U takvim okolnostima igrači nastoje minimizirati vlastiti udio u alokaciji iznosa u pitanju. Treće, BC igra primjeren je izbor ako je nužno simultano uzeti u obzir i povoljna i nepovoljna obilježja igrača. Svaku od spomenutih situacija poželjno je sagledati iz perspektive višestrukih kriterija. Neki od kriterija koji se mogu obuhvatiti analizom prikazani su u tablici 15.

Tablica 15: Primjene AOMP igre: primjeri višestrukih kriterija

AOMP max igra	
Kriteriji za alokaciju istraživačkih potpora prijavljenim kandidatima: 1. Aktualnost i relevantnost teme 2. Provedivost istraživanja 3. Znanstveni doprinos 4. Postignuća članova tima	Kriteriji za alokaciju resursa za istraživanje i razvoj: 1. Kratkoročna profitabilnost 2. Doprinos budućemu razvoju tvrtke 3. Učinci prelijevanja na postojeće tehnologije u posjedu tvrtke
Izvor: Nakabayashi i Tone (2006.), str. 145.	

AOMP min igra
Kriteriji za alokaciju troška u NATO savezu (prednosti članstva): 1. Zaštita od vanjske prijetnje 2. Politička korist 3. Ekonomska i vojna pomoć 4. Ekonomska prednost u obliku deviznoga prihoda 5. Ekonomska prednost u obliku povećane zaposlenosti u obrambenoj industriji

Izvor: Kim i Hendry (1998.), prema Nakabayashi i Tone (2006.), str. 145.

BC igra	
Kriteriji (povoljni) za alokaciju troška osiguranja od terorističke prijetnje: 1. Zaštita od vanjske prijetnje 2. Ekonomska korist koja je odraz regionalne stabilnosti 3. Politička korist	Kriteriji (nepovoljni) za alokaciju troška osiguranja od terorističke prijetnje: 1. Izdvajanja za obranu 2. Subvencije za prisutnost vojnika 3. Rizik vojne operacije 4. Ostale dužnosti i ograničenja vezana uz stvoreni savez
Kriteriji (povoljni) za ocjenu kvalitete života na nekome području: 1. Stambeni prostor po članu domaćinstva 2. Izdvajanja za obrazovanje po studentu 3. Broj bolnica po stanovniku 4. Površina parka po stanovniku 5. Broj knjižnica po stanovniku 6. Dohodak po stanovniku	Kriteriji (nepovoljni) za ocjenu kvalitete života na nekome području: 1. Zagađenje (okoliša i bukom) 2. Prometna zakrčenost 3. Troškovi života (razina cijena) 4. Kriminal

Izvor: Cha (1999.), Saaty (1986.), Zhu (2001.), prema Nakabayashi i Tone (2006.), str. 145.

U predloženim primjenama koncepta egoistove dileme razmatrani su kriteriji raznovrsni i mogu se izraziti u različitim jedinicama mjere. To ne predstavlja nikakav problem prilikom primjene AOMP max i min igara jer je u tim igrama dozvoljena normalizacija redaka matrice koja sadrži rezultat igrača. U tim se slučajevima rezultat igrača s obzirom na dane kriterije ocjenjuje na osnovi relativnih udjela. Međutim, u BC igri postupak se normalizacije ne može provesti i prilikom stvaranja ovoga rada ustanovilo se da izražavanje ostvarenoga rezultata igrača u različitim jedinicama mjere ima posljedice na proizašlo rješenje. Primjena BC igre na rezultat igračkoga tima "Potjere" dala je rješenje predočeno u poglavlju 6.2. jer su svote novca koje su igrači pohranjivali u zajedničku blagajnu bile izražene u tisućama kuna. Kada se isti kriterij izrazio u kunama (a ne u tisućama kuna), dobilo se primjetno drukčije rješenje (vidjeti tablicu 16.).

Tablica 16: Shapleyjeva vrijednost – BC slučaj (kriterij 4 izražen u kunama)

	Igrač			
	A	B	C	D
Shapleyjeva vrijednost	0,1877	0,1879	0,3829	0,2414
Pripadna alokacija	24.499,74	24.522,28	49.974,03	31.503,95

Rezultat igrača vrednovan preostalim kriterijima poprima znatno manje vrijednosti od iznosa pohranjenoga u zajedničku blagajnu kada je taj iznos izražen u kunama. U tome slučaju upravo svota novca koju su igrači donijeli u zajedničku blagajnu najviše utječe na dobivenu Shapleyjevu vrijednost, pa je i raspodjela dobitka igračima (bez obzira na pretpostavljeni značaj kriterija) ponajprije njome uvjetovana. Zaobilaženje opisanoga problema predstavlja zanimljiv zadatak za buduća istraživanja. Polazišna točka za uklanjanje pronađenoga nedostatka može biti promjena načina na koji se vrednuje rezultat igrača u BC igri: umjesto izraza (7) valja razmotriti potencijal za upotrebu omjera

$$\frac{\sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}$$

kojim se u AOMP literaturi (vidjeti Cooper i sur., 2007., str. 15) određuje učinkovitost igrača (odnosno donositelja odluke). Naime, poznato je da na rješenja AOMP modela kriteriji izraženi u različitim jedinicama mjere neće utjecati (vidjeti Cooper i sur., 2007., str. 23).

8. ZAKLJUČAK

U ovome radu predstavio se i ukratko objasnio koncept egoistove dileme, a kako bi se ilustrirale mogućnosti njegove primjene, uporabljeni su podatci o rezultatu igrača koji su sudjelovali u kvizu znanja "Potjera". Razmotren je osnovni model AOMP igre, a potom i njegova proširenja: AR i BC slučajevi. Pokazalo se da uvođenje dodatnih kriterija i ograničenja u analizu osjetno utječe na prijedlog alokacije novčane nagrade koju su igrači osvojili. Svaka se od danih alokacija primjetno razlikovala od uobičajenoga načina podjele dobitka koji nalažu pravila "Potjere" (svakomu igraču jednak iznos). Dakako, primjeri koji su se obradili u ovome radu podložni su preinakama poput sagledavanja većega broja kriterija i mijenjanja postavljenih preferencija igrača o važnosti kriterija. Ako su igrači voljni svotu pohranjenu u zajedničkoj blagajni međusobno rasporediti u skladu s vlastitim doprinosom pobjedi, onda rješenja izložena u ovome radu dovode do pravične alokacije koju bi trebali prihvatiti svi članovi tima.

Utvrdilo se da postoje dva oblika AOMP igre. Prvi je AOMP max igra (polazišni model) koja se veže uz sebičnost igrača. Drugi je AOMP min igra (alternativni model) koja se veže uz samopožrtvovnost igrača. Shapleyjeva je vrijednost, unatoč različitim pretpostavkama o ponašanju igrača, za obje spomenute igre jednaka.

Ovim se radom čitatelje nastoji potaknuti na primjenu i daljnji razvoj koncepta egoistove dileme. Iz toga razloga navedeno je nekoliko sugestija za upotrebu modela AOMP igre u praksi. Te su sugestije prvobitno ponudili autori koncepta egoistove dileme. Konačno, ovaj rad upozorava na poteškoće do kojih može doći prilikom primjene BC igre i daje prijedlog za nadogradnju toga modela u budućim istraživanjima.

LITERATURA:

1. Du, J., Liang, L., Chen, Y., Cook, W. D. i Zhu, J. (2011.), A bargaining game model for measuring performance of two-stage network structures. *European Journal of Operational Research*, 210 (2): 290–397.
2. Charnes, A. i Cooper, W. W. (1962.), Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 9 (3–4): 181–186.
3. Cooper, W. W., Seiford, L. M. i Tone, K. (2007.), *Data Envelopment Analysis: A Coprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Springer Science & Business Media.
4. Dyson, R. G. i Thanassoulis, E. (1988.), Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 39 (6): 563–576.
5. Hrvatska radiotelevizija (2015.), *Potjera*. Dostupno online na: http://potjera.hrt.hr/pravila-i-propozicije/ (1. rujna 2015.).
6. Jahanshahloo, G. R., Lotfi, F. H. i Sohraiee, S. (2006.), Egoist's dilemma with interval data. *Applied Mathematics and Computation*, 183 (1): 94–105.
7. Liang, L., Cook, W. D. i Zhu, J. (2008.), DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition. *Naval Research Logistics*, 55 (7): 643–653.
8. Liang, L., Wu, J., Cook, W. D. i Zhu, J. (2008.), The DEA game cross-efficiency model and its Nash equilibrium. *Operations Research*, 56 (5): 1278–1288.
9. Lozano, S. (2012.), Information sharing in DEA: A cooperative game theory approach. *European Journal of Operational Research*, 222 (3): 558–565.
10. Nakabayashi, K. i Tone, K. (2006.), Egoist's dilemma: a DEA game. *Omega*, 34 (2): 135–148.
11. Roll, Y. i Golany, B. (1993.), Alternate Methods of Treating Factor Weights in DEA. *Omega*, 21 (1): 99–109.
12. Sekine, S., Fu, J. i Muto, S. (2014.), *Game Theoretic Approaches to Weight Assignments in Dana Envelopment Aanalysis Problems. Mathematical Problem sin Engineering*, 2014. Dostupno online na: http://dx.doi.org/10.1155/2014/434252 (1. rujna 2015.).
13. Shapley, L. S. (1953.), A value for *n*-person games. U: Roth, A. E. (ur.), *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley* (str. 31–40), Cambridge University Press.
14. Thompson, R. G., Langemeier, L. N., Lee, C. T., Lee, E. i Thrall, R. M. (1990.), The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. *Journal of Econometrics*, 46 (1): 93–108.

15. Thompson, R. G., Singleton Jr., F. D., Thrall, R. M. i Smith, B. A. (1986.), Comparative Site Evaluations for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas. *Interfaces*, 16 (6): 35–49.
16. Wu, J., Liang, L. i Yang, F. (2009.), Determination of the weights for the ultimate cross efficiency using Shapley value in cooperative game. *Expert Systems with Applications*, 36 (1): 872–876.
17. Wu, J., Liang, L., Yang, F. i Yan, H. (2009.), Bargaining game model in the evaluation of decision making units. *Expert Systems with Applications*, 36 (3): 4357–4362.
18. Wu, J., Liang, L. i Zha, Y. C. (2008.), Determination of the Weights of Ultimate Cross Efficiency based on the Solution of Nucleolus in Cooperative Game. *Systems Engineering – Theory & Practice*, 28 (5): 92–97.
19. Zha, Y. i Liang, L. (2010.), Two-stage cooperation model with inout freely distributed among the stages. *European Journal of Operational Research*, 205 (2): 332–338.
20. Zhu, J. (2004.), A buyer-seller game model for selection and negotiation of purchasing bids: extensions and new models. *European Journal of Operational Research*, 154 (1): 150–156.