Osječki matematički list 15 (2015), 41-50

Matematikom do ideja za uzorke

Amra Duraković, Selma Kapić *

Sažetak

Modularna aritmetika predstavlja aritmetički sustav kod koga se brojevi "vraćaju u krug" nakon što dostignu određenu vrijednost - modul. U ovom članku ćemo opisati jednu od primjena modularne aritmetike.

Ključne riječi: *modularna aritmetika, uzorak*

Design ideas through math

Abstract

Modular arithmetic is a system of arithmetic for integers, where numbers "wrap around" upon reaching a certain value - the modulus. In this paper, we describe an application of modular arithmetic

Keywords: *modular arithmetic, pattern*

1 Uvod

Modularna aritmetika, tj. aritmetika modulo neki cijeli broj m, definira se uvođenjem relacije kongruencije na skupu cijelih brojeva.

Definicija 1.1. Ako cijeli broj $m \neq 0$ dijeli razliku $a - b$, onda kažemo da je a kongruentno b modulo m i pišemo $a \equiv b \pmod{m}$. U protivnom, kažemo da a nije kongruentno b modulo m i pišemo $a \not\equiv b \pmod{m}$.

*Pedagoški fakultet, Univerzitet u Bihaću, email: amra_aldzic@hotmail, selmak1@hotmail.com

Na primjer, $17 \equiv 7 \pmod 5$ jer 5 dijeli razliku $17 - 7 = 10$.

Koncept modularne aritmetike je povezan s konceptom ostatka pri dijeljenju. Ukoliko je ostatak pri dijeljenju broja a brojem m jednak r, $r \geq 0$, piše se a mod $m = r$ (=, a ne $\equiv$). Tako je 17 mod 5 = 2, ali "17 mod 5 = 7" nije dobro.
Modularna aritmetika ima primjenu u teoriji brojeva, teoriji grupa, teoriji prstena, apstraktnoj algebri, kriptografiji, računarstvu, u vizualnim umjetnostima i glazbi.

2 Modularna aritmetika u vizualnim umjetnostima

U vizualnim umjetnostima modularna aritmetika se može koristiti za kreiranje različitih umjetničkih uzoraka - šara, odnosno uzoraka baziranih na tablicama množenja i zbrajanja modulo m. Također koristeći modularnu aritmetiku možemo dobiti zvijezdu s m krakova, te tzv. (m, n)-uzorak.

2.1 Zvijezda s m krakova

Na kružnici proizvoljnog radijusa odaberemo m jednako udaljenih točaka i označimo ih sa $0, 1, 2, \ldots, m-2, m-1$ (ostaci modulo m). Odaberemo ostatak i mod m takav da je $(i, m) = 1$, odnosno da su i i m relativno prosti. Zatim spojimo točku 0 s točkom i, pa tu točku spojimo s točkom $2i$ mod m, pa nju spojimo s točkom $3i$ mod m, i tako dalje sve dok ne spojimo točku $(m-1)i$ mod m s točkom mi mod m, što je ujedno i početna točka 0.

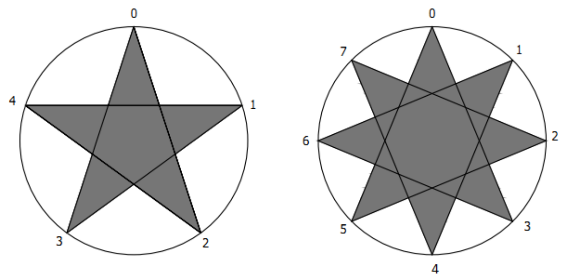
Problem konstrukcije pravilnog mnogokuta, tj. podjela kružnice na jednake dijelove je jedan od klasičnih geometrijskih problema. Babilonci su vrlo dobro znali približno podijeliti kružnicu na sedam jednakih dijelova. Grci su elementarno dijelili kružnicu na 2, 3, 4, 5, 6, 8 i 12 jednakih dijelova. Pokušaji da se krug podijeli na n jednakih dijelova, gdje je n proizvoljan prirodan broj, ostali su bez uspjeha. Krajem 18. stoljeća Gauss je dokazao da se ovaj problem može riješiti elementarnim geometrijskim konstrukcijama (upotrebom ravnala i šestara) samo za neke vrijednosti broja n. Pokazao je da se pravilni n-terokut može konstruirati ako su neparni djelitelji broja n međusobno različiti i prosti Fermatovi brojevi $2^{2^k} + 1$, $k \geq 0$.
Kada ne možemo ili ne znamo konstruirati pravilni n-terokut, moramo se koristiti nekim pomagalom, npr. kutomjerom.

Zvijezda s 5 krakova

Možemo uzeti $i = 2$ jer je $(2, 5) = 1$. Spojimo točku 0 s točkom 2, pa tu točku spojimo s točkom $2 \cdot 2 \bmod 5 = 4$, pa nju spojimo s točkom $3 \cdot 2 \bmod 5 = 1$. Zatim točku 1 spojimo s točkom $4 \cdot 2 \bmod 5 = 3$, pa točku 3 s točkom $5 \cdot 2 \bmod 5 = 0$, što je ujedno i početna točka 0.

Zvijezda s 8 krakova

Možemo uzeti $i = 3$ jer je $(3, 8) = 1$. Spojimo točku 0 s točkom 3, pa tu točku spojimo s točkom $2 \cdot 3 \bmod 8 = 6$, pa nju spojimo s točkom $3 \cdot 3 \bmod 8 = 1$. Zatim točku 1 spojimo s točkom $4 \cdot 3 \bmod 8 = 4$, pa točku 4 spojimo s točkom $5 \cdot 3 \bmod 8 = 7$, točku 7 s točkom $6 \cdot 3 \bmod 8 = 2$, zatim točku 2 s točkom $7 \cdot 3 \bmod 8 = 5$, pa točku 5 s točkom $8 \cdot 3 \bmod 8 = 0$, što je ujedno i početna točka 0.



Slika 1: Zvijezda s 5 i 8 krakova

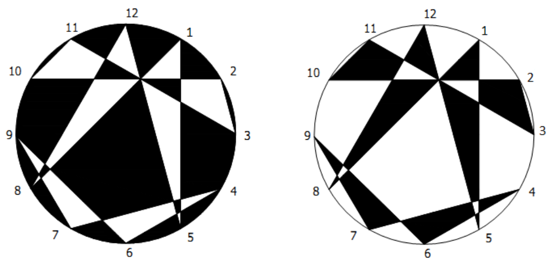
3 (m, n)-uzorak

Da bismo kreirali (m, n)-uzorak, gdje je $1 \leq n \leq m$ i $(m, n) = 1$, na kružnici proizvoljnog radijusa odaberemo $m - 1$ jednako udaljenih točaka i označimo ih s $1, \ldots, m - 1$. Zatim spojimo svaku točku x s točkom nx mod m. Na taj način će područje unutar kružnice biti podijeljeno na više manjih područ ja različitih dimenzija i oblika. Sjenčenjem dobivenih dijelova možemo dobiti različite uzorke.

Pokažimo kako kreirati $(13, 5)$-uzorak. Na kružnici proizvoljnog polumjera odaberimo 12 jednako udaljenih točaka i označimo ih s $1, 2, 3, \ldots$,12. Svaki od ovih brojeva pomnožimo s 5 i odredimo ostatak pri dijeljenju dobivenog umoška s 13. Prikažimo to u tablici.

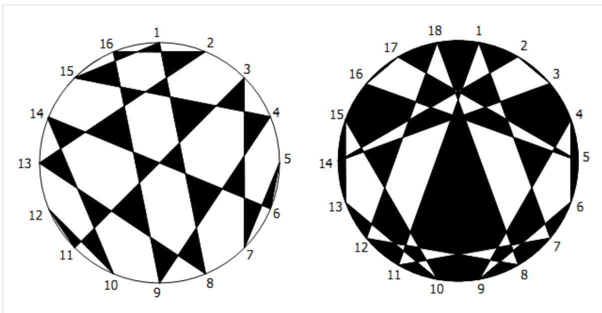
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$nx = 5x$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$5x$ *mod* 13	5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8

Spajanjem točaka 1 i 5, 2 i 10, 3 i 2,. . .,11 i 3, 12 i 8 dobivamo $(13, 5)$-uzorak (slika 2).



Slika 2: (13,5)-uzorak

Na sljedećoj slici su prikazana još dva takva uzorka.



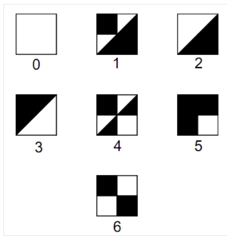
Slika 3: (17,8) i (19,11)-uzorak

4 Uzorak dobiven pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo m

Tablice zbrajanja i množenja modulo m mogu se iskoristiti za kreiranje različitih uzoraka.
Neka je $m = 7$. Pogledajmo tablicu zbrajanja modulo 7.

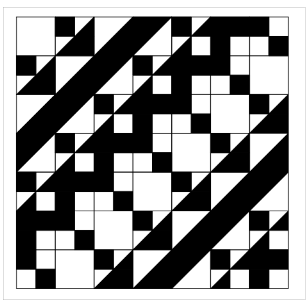
+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Odaberemo 7 uzoraka/šara za reprezentaciju svakog od ovih brojeva, kao naprimjer na slici 4.



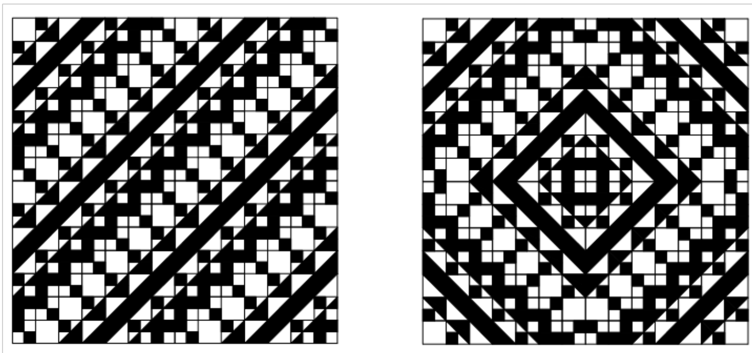
Slika 4.

Ako sada svaki od brojeva $0, 1, 2, 3, 4, 5$ i 6 u tablici (u dijelu gdje se nalaze sume modulo 7) zamijenimo odgovarajućom reprezentacijom dobivamo osnovni uzorak (slika 5).



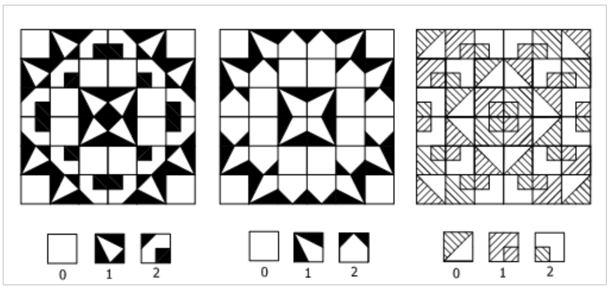
Slika 5.

Ovaj osnovni uzorak sada možemo koristiti za kreiranje novih uzoraka. Možemo ih spajati na različite načine (rotirati, postaviti ih da budu zrcalno simetrični i sl.). Na slici 6 prikazana su dva uzorka dobivena spajanjem osnovnog uzorka sa slike 5.



Slika 6.

Za različite brojeve m dobivamo različite tablice zbrajanja modulo m. Za reprezentaciju brojeva možemo uzimati različite uzorke/šare i tako na osnovu jedne tablice dobiti mnogo različitih uzoraka. Na slici 7 prikazana su tri različita uzorka dobivena koristeći tablicu zbrajanja modulo 3.

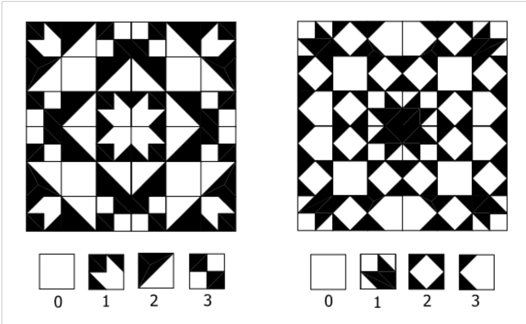


Slika 7.

Također se mogu koristiti i tablice množenja modulo m. Uzmemo li da je $m = 4$, dobivamo sljedeću tablicu.

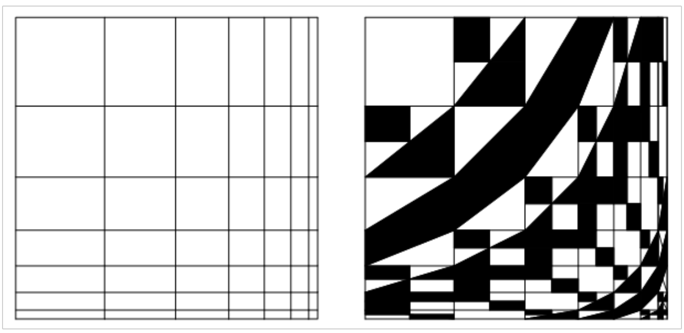
$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Za svaki od brojeva iz tablice odaberemo neku reprezentaciju (uzorak/šaru). Na slici 8 su prikazana dva uzorka dobivena korištenjem ove tablice.



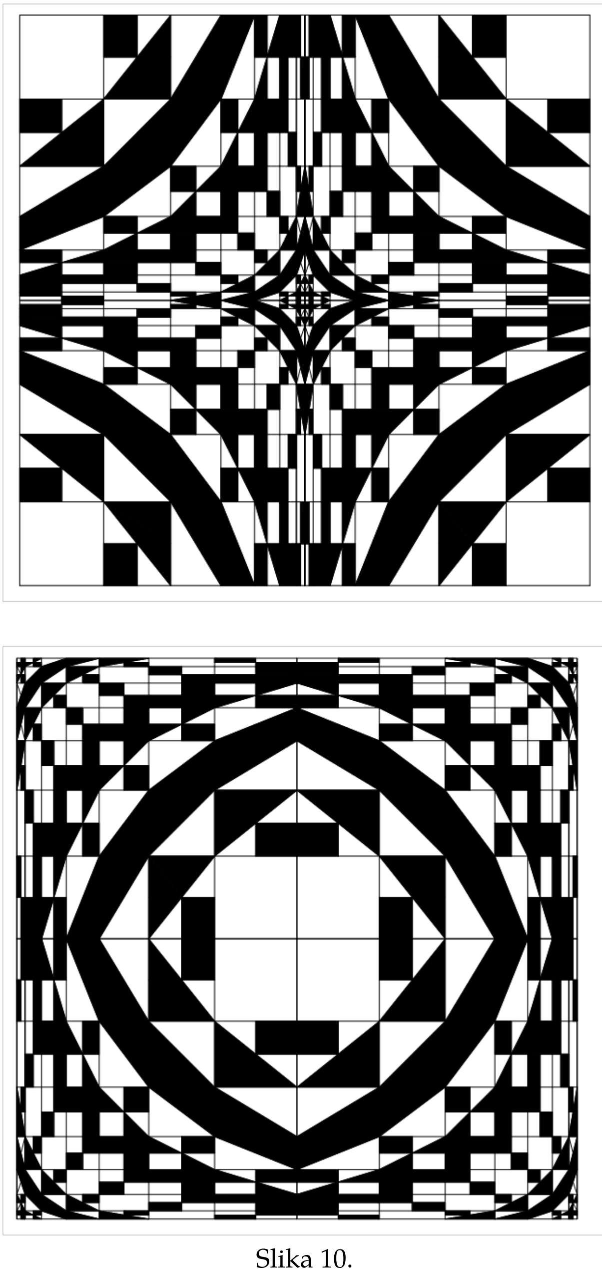
Slika 8.

Kao što možemo primijetiti, za kreiranje osnovnog uzorka koristili smo mrežu u obliku kvadrata gdje su sva polja također u obliku kvadrata. Međutim, mogu se koristiti mreže različitih dimenzija i oblika. Na primjer, kvadrate možemo zamijeniti pravokutnicima različitih dimenzija. Na slici 9 je prikazana mreža i osnovni uzorak dobiven koristeći tu mrežu i tablicu zbrajanja modulo 7. Reprezentacije brojeva $0, 1, 2, 3, 4, 5$ i 6 su iste kao na slici 4.



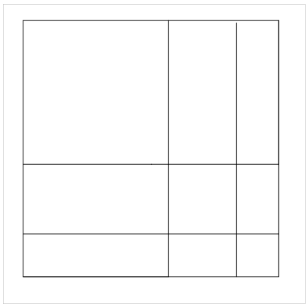
Slika 9.

Spajanjem ovog osnovnog uzorka možemo dobiti različite uzorke. Na slici 10 su prikazana dva takva uzorka, s tim da smo pri kreiranju drugog uzorka prvo zarotirali osnovni uzorak.

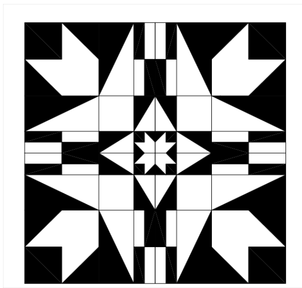


Slika 10.

Ako uzmemo mrežu oblika

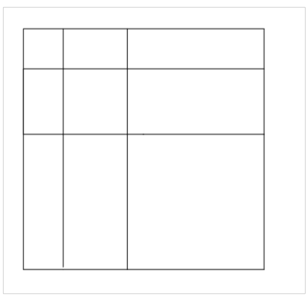


onda prvi uzorak sa slike 8 ima oblik

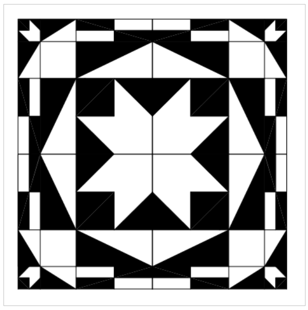


Slika 11.

a ako uzmemo mrežu oblika



onda taj isti uzorak ima oblik



Slika 12.

Dakle, koristeći tablice zbrajanja i množenja modulo m možemo dobiti različite osnovne uzorke koje dalje možemo na različite načine spajati i dobivati uzorke različitih dimenzija i oblika.

Literatura

[1] T. Koshy, *Elementary Number Theory with Applications*, Second Edition, Academic Press, 2007.

[2] T. Cooper, T. Forbes, *Mathematics and Modulo art*, Queensland University of Technology, YuMi Deadly Maths Past Project Resourece, Electronic edition, 2013.

[3] `http://britton.disted.camosun.bc.ca/modart/jbmodart.htm`