

Jedna zanimljiva primjena nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

Šefket Arslanagić*

Sažetak

U radu su dani dokazi niza zanimljivih nejednakosti. Dokazi su provedeni korištenjem poznate nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine pozitivnih realnih brojeva.

Ključne riječi: *aritmetička sredina, geometrijska sredina, primjena*

An interesting application of the geometric-arithmetic means inequality

Abstract

This article presents proofs of some interesting inequalities. The proofs are performed by means of the geometric-arithmetic means inequality.

Keywords: *arithmetic mean, geometric mean, inequality*

*Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Odsjek za matematiku, Sarajevo, BiH, asefket@pmf.unsa.ba

1 Primjena nejednakosti

Dokazivanje nejednakosti u matematici predstavlja izuzetno zanimljiv i važan čin za buduće mlade (nadarene) matematičare i nastavnike koji rade s njima. Nejednakosti između brojnih sredina su temelj u tom poslu, osobito nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine koja glasi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, \quad a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ (ubuduće ćemo ovu nejednakost označavati kao AMGM nejednakost). Recimo i to da se u odgovarajućoj matematičkoj literaturi o nejednakostima nalazi veliki broj raznih dokaza ove nejednakosti, npr. u [1] se nalaze tri razna dokaza.

U ovom radu ćemo pokazati kako se razne algebarske nejednakosti mogu uspješno dokazati primjenom nejednakosti (1) za $n = 2$ ili $n = 3$ ukoliko se stvore odgovarajući uvjeti za tu primjenu. To ćemo demonstrirati na više primjera.

Primjer 1. Dokazati da za $a, b, c > 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c \quad (2)$$

Rješenje. Direktnom primjenom AMGM nejednakosti (1) za $n = 3$ imamo:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c^2}{a}} \\ \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} &\geq 3\sqrt[3]{abc} \end{aligned}$$

Ali iz (1) slijedi $3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c$, pa ovakav dokaz ne dolazi u obzir. Što sada? Primjenom AMGM nejednakosti (1) za $n = 2$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right) &\geq \sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b} \\ \frac{a^2}{b} + b &\geq 2a \end{aligned} \quad (3)$$

te analogno

$$\frac{b^2}{c} + c \geq 2b \quad (4)$$

$$\frac{c^2}{a} + a \geq 2c \quad (5)$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (3), (4) i (5), dobivamo nejednakost (2). Dokaz smo proveli zahvaljujući nejednakosti AMGM za $n = 3$ i $n = 2$. Jednakost u (2) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$. ◀

Napomena 1.1. U [2] se može naći i jedan kraći dokaz ove nejednakosti bez korištenja nejednakosti AMGM (1).

Primjer 2. Dokazati da za $a, b, c > 0$ vrijedi nejednakost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \quad (6)$$

Rješenje. Ne bi se puno usrećili ako bismo koristili AMGM nejednakost (1) za $n = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} &\geq \sqrt[3]{a^4 b^4 c^4} \\ a^4 + b^4 + c^4 &\geq 3abc \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

Nakon dijeljenja dane nejednakosti (6) sa $abc > 0$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \quad (7)$$

Sada ćemo dokazati nejednakost (7). Koristeći nejednakost (1) za $n = 3$, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\frac{a^3}{bc} + b + c \right) &\geq \sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c} \\ \frac{a^3}{bc} + b + c &\geq 3a \end{aligned} \quad (8)$$

te analogno

$$\frac{b^3}{ac} + a + c \geq 3b \quad (9)$$

$$\frac{c^3}{ab} + a + b \geq 3c \quad (10)$$

gdje nakon zbrajanja nejednakosti (8), (9) i (10) slijedi

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c \quad (11)$$

Kako zbog AMGM nejednakosti (1) za $n = 2$, slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ a+b &\geq 2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

te analogno,

$$\begin{aligned}b+c &\geq 2\sqrt{bc} \\ c+a &\geq 2\sqrt{ca}.\end{aligned}$$

odakle nakon zbrajanja posljednje tri nejednakosti dobivamo

$$a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \quad (12)$$

Sada iz nejednakosti (11) i (12) slijedi nejednakost (7), odnosno (6). Jednakost u (6) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$. ◀

Sada ćemo prijeći na dokaze nešto složenijih nejednakosti pomoću AMGM nejednakosti (1) za $n = 2$ i $n = 3$.

Primjer 3. Dokazati da za $a, b, c, d \geq 0$, od kojih je suma svaka dva broja različita od nule, takve da je $a + b + c + d = 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2} \quad (13)$$

Rješenje. Na osnovu nejednakosti (1) za $n = 2$, dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \right) &\geq \sqrt{\frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}} \\ \frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} &\geq a\end{aligned}$$

te analogno,

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} &\geq b \\ \frac{c^2}{c+d} + \frac{c+d}{4} &\geq c \\ \frac{d^2}{d+a} + \frac{d+a}{4} &\geq d\end{aligned}$$

Nakon zbrajanja posljednje četiri nejednakosti, imamo:

$$\frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} + \frac{1}{2}(a+b+c+d) \geq a+b+c+d$$

a odavde, zbog $a+b+c+d=1$, slijedi

$$\frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}$$

Jednakost u (13) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=d=\frac{1}{4}$. ◀

Primjer 4. Dokazati da za $a, b, c, d \geq 0$ (tri od ovih veličina nisu istovremeno jednake nuli) takve da je $ab+bc+cd+da=1$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{b+c+d} \geq \frac{1}{3} \quad (14)$$

Rješenje. Napišimo da je

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{b+c+d} = \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{b+a+d} + \frac{d^3}{b+c+a}$$

Koristeći AMGM nejednakost (1) za $n=3$, dobivamo

$$\frac{1}{3} \left(\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{18} + \frac{1}{12} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{a^3}{b+c+d} \cdot \frac{b+c+d}{18} \cdot \frac{1}{12}}$$

odakle slijedi

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{18} + \frac{1}{12} \geq \frac{a}{2}$$

i analogno

$$\begin{aligned} \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{a+c+d}{18} + \frac{1}{12} &\geq \frac{b}{2} \\ \frac{c^3}{b+a+d} + \frac{b+a+d}{18} + \frac{1}{12} &\geq \frac{c}{2} \\ \frac{d^3}{b+c+a} + \frac{b+c+a}{18} + \frac{1}{12} &\geq \frac{d}{2} \end{aligned}$$

Nakon zbrajanja četiri posljednje nejednakosti, dobivamo

$$\sum_{\text{ciklično}} \left(\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{18} + \frac{1}{12} \right) \geq \frac{a+b+c+d}{2}$$

što dalje daje

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{b+c+d} \geq \frac{1}{3}(a+b+c+d-1). \quad (15)$$

Primjenjujući AMGM nejednakosti (1) za $n = 2$ dobivamo

$$\frac{a+c+b+d}{2} \geq \sqrt{(a+c)(b+d)}$$

što je ekvivalentno nejednakosti $(a+b+c+d)^2 \geq 4(ab+bc+cd+da)$ odnosno zbog danog uvjeta $ab+bc+cd+da = 1$ imamo

$$a+b+c+d \geq 2 \quad (16)$$

Sada iz nejednakosti (15) i (16) dobivamo nejednakost (14). Jednakost u (14) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = d = \frac{1}{2}$. ◀

Primjer 5. Dokazati da za $a, b, c > 0$ takve da je $a + b + c = 2$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(a+c)} > 2 \quad (17)$$

Rješenje. Koristeći AMGM nejednakost (1) za $n = 3$ imamo:

$$\frac{a}{b(a+b)} + (a+b)a + ab \geq 3a \quad (18)$$

$$\frac{b}{c(b+c)} + (b+c)b + cb \geq 3b \quad (19)$$

$$\frac{c}{a(a+c)} + (a+c)c + ac \geq 3c \quad (20)$$

a odavde nakon zbrajanja nejednakosti (18), (19) i (20):

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(a+c)} \geq 3(a+b+c) - (a+b+c)^2$$

odnosno zbog uvjeta $a + b + c = 2$:

$$\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(a+c)} \geq 2.$$

Ovdje vrijedi stroga nejednakost jer npr. u nejednakosti (18) vrijedi jednakost ako je

$$(a+b)a = ab \left(= \frac{a}{b(a+b)} \right) \Rightarrow a = 0$$

što ne može biti zbog uvjeta da su $a, b, c > 0$.

Primjer 6. Dokazati da za $a, b, c > 0$ takve da je $abc = 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4} \quad (21)$$

Rješenje. Na osnovu AMGM nejednakosti (1) za $n = 3$, imamo:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} &\geq \frac{3a}{4}, \\ \frac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+c}{8} &\geq \frac{3b}{4}, \\ \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} &\geq \frac{3c}{4}, \end{aligned}$$

a odavde nakon zbrajanja gornjih nejednakosti

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{3+a+b+c}{4} \geq \frac{3}{4}(a+b+c)$$

odnosno,

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c) - \frac{3}{4} \quad (22)$$

Kako je na osnovu AMGM nejednakosti za $n = 2$ i danog uvjeta $abc = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{abc}, \text{ tj.} \\ a+b+c &\geq 3 \end{aligned} \quad (23)$$

to dobivamo iz nejednakosti (22) i (23):

$$\sum_{\text{ciklično}} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \geq \frac{3}{4}.$$

Vrijedi jednakost u (21) ako i samo ako je $a = b = c = 1$. ◀

Primjer 7. Dokazati da za $a, b \geq 0$ tako da je $a + b = 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} \geq \frac{1}{3} \quad (24)$$

Rješenje. Na osnovu AMGM nejednakosti za $n = 2$, imamo:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+1} + \frac{b+1}{9} &\geq \frac{2a}{3} \\ \frac{b^2}{a+1} + \frac{a+1}{9} &\geq \frac{2b}{3} \end{aligned}$$

gdje nakon zbrajanja gornjih nejednakosti dobivamo

$$\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} + \frac{a+b+2}{9} \geq \frac{2}{3}(a+b)$$

Odnosno, zbog uvjeta $a + b = 1$, slijedi

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} + \frac{1}{3} &\geq \frac{2}{3}, \text{ tj.} \\ \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vrijedi jednakost u (24) ako i samo ako je $a = b = \frac{1}{2}$.

2 Zaključak

Sve dokazane nejednakosti se mogu dokazati i na neki drugi način. Preporučio bih budućim čitateljima ovog rada da pokušaju provesti te dokaze. No, siguran sam da će ti dokazi biti teži i složeniji nego dokazi navedeni u ovom radu. Ovim želim istaknuti značenje navedene metode pomoću nejednakosti koju smo koristili u ovom radu.

Literatura

- [1] Š. ARSLANAGIĆ, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
- [2] Z. CVETKOVSKI, *Inequalities – Theorems Techniques and Selected Problems*, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 2012.