Neke generalizacije Rolleovog teorema i Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti

Ljiljana Arambašić[1], Monika Matika[2] i Anđa Valent[3]

Sažetak. U ovome radu bavimo se nekim generalizacijama Rolleovog i Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti. Pokazat ćemo i kako se Taylorov polinom te L'Hospitalovo pravilo mogu dobiti kao posljedice tih generalizacija.

1. Uvod

U članku [1] razmatrali smo Rolleov i Lagrangeov teorem srednje vrijednosti i na nekoliko primjera pokazali kako se različiti tipovi zadataka mogu riješiti korištenjem ovih dvaju teorema. U nastavku nam je cilj potaknuti učenike da nakon usvajanja određenoga gradiva promisle o sljedećim važnim pitanjima:

1. Koju ulogu dobiveni rezultati imaju u daljnjoj teoriji, odnosno koje su njihove neposredne posljedice?
2. Koje su moguće generalizacije tih rezultata i zašto su one važne, odnosno koje su njihove posljedice?

Podsjetimo se najprije iskaza Rolleovog i Lagrangeovog teorema.

Rolleov teorem. *Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je diferencijabilna na (a,b). Ako je $f(a)=f(b)=0$, tada postoji $c\in(a,b)$ tako da je $f'(c)=0$.*

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti. *Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je diferencijabilna na (a,b). Tada postoji $c\in(a,b)$ tako da je*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

---

[1]Ljiljana Arambašić, izvanredni profesor na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu
[2]Monika Matika, studentica diplomskog studija na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu
[3]Anđa Valent, predavač na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu

Podsjetimo se geometrijskih interpretacija ovih teorema. Promatrajmo graf neprekidne i diferencijabilne funkcije *f*. Rolleov teorem kaže da između svake dvije nultočke funkcije *f* postoji točka u kojoj je tangenta horizontalna. Lagrangeov teorem kaže da uvijek možemo naći točku $c \in (a,b)$ tako da je tangenta u *c* paralelna sekanti kroz krajnje točke promatranog intervala. Upravo zbog ovako jednostavnih geometrijskih interpretacija oba su teorema intuitivno sasvim jasna i logična, a opet imaju važne posljedice.

Jedna od prvih primjena derivacija s kojom se učenici upoznaju je kriterij za rast i pad funkcije. Dokaz navodimo samo da bismo ilustrirali koliko lako taj kriterij slijedi iz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti.

Teorem *Neka je funkcija f diferencijabilna na (a,b) i neka je $f'(x)>0$ (odnosno $f'(x)<0$) za sve $x \in (a,b)$. Tada je f strogo rastuća (odnosno strogo padajuća) na (a,b).*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f'(x)>0$ za sve $x \in (a,b)$. Neka su $x_1, x_2 \in (a,b)$ i $x_1 < x_2$. Prema Lagrangeovom teoremu postoji točka $c \in (x_1, x_2)$ takva da je $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Sada iz $f'(c) > 0$ i $x_2 - x_1 > 0$ dobivamo $f(x_1) < f(x_2)$, to jest funkcija *f* je strogo rastuća. □

2. Cauchyjev teorem srednje vrijednosti

Prva generalizacija koju navodimo promatra dvije funkcije, f i g, umjesto jedne funkcije kakav je slučaj bio u prethodnim teoremima.

Teorem 1 (Cauchyjev teorem srednje vrijednosti) *Neka su funkcije $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne i diferencijabilne na (a,b). Pretpostavimo da je $g(a) \neq g(b)$ i $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a,b)$. Tada postoji $c \in (a,b)$ tako da vrijedi*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz. Kako je $g(a) \neq g(b)$, dobro je definirana funkcija $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ formulom

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Funkcija *h* je neprekidna, diferencijabilna na (a,b) i vrijedi $h(a) = h(b) = 0$. Dakle, zadovoljava uvjete Rolleovog teorema. Budući da je

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x),$$

postoji točka $c \in (a,b)$ takva da je $h'(c) = 0$ to jest

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0 .$$

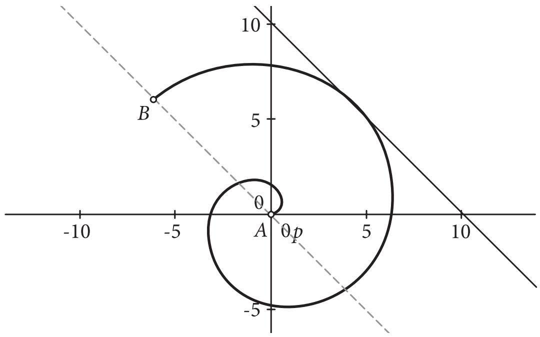
Odavde dijeljenjem s $g'(c) \neq 0$ dobivamo našu tvrdnju. □

Uočimo da Lagrangeov teorem srednje vrijednosti možemo smatrati posebnim slučajem Cauchyjevog teorema kada za funkciju g izaberemo funkciju $g(x) = x$.

Cauchyjev teorem srednje vrijednosti također ima lijepu geometrijsku interpretaciju. Neka su f, g kao u teoremu 1. Skup svih točaka $(x, y) = (g(t), f(t)) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [a,b]$ definira krivulju u $\mathbb{R}^2$. Koeficijent smjera tangente na tu krivulju u točki $x = x(t)$ dan je s

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

pa prema Cauchyjevom teoremu postoji točka na krivulji u kojoj je tangenta paralelna pravcu kroz točke na krivulji $(x_1, y_1) = (g(a), f(a))$ i $(x_2, y_2) = (g(b), f(b))$.



Slika 1. Geometrijska interpretacija Cauchyjevog teorema srednje vrijednosti

Jednostavna, ali vrlo važna i dobro poznata posljedica Cauchyjevog teorema je L'Hospitalovo pravilo. Ovdje ćemo iznijeti dokaz samo jednog slučaja L'Hospitalovog pravila, a ostali se slučajevi dokazuju na sličan način (detalji se mogu naći u [3] i [4]).

Teorem 2 (L' Hospitalovo pravilo) *Neka su funkcije* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidne i diferencijabilne na* (a,b). *Pretpostavimo da je* $f(a) = g(a) = 0$ *i* $g'(x) \neq 0$ *za sve* $x \in (a,b)$. *Ako postoji* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *onda postoji i* $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i vrijedi*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. Primijetimo najprije da je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in (a,b)$. Naime, ako bi postojala točka $x \in (a,b)$ takva da je $g(x) = 0$, onda bi funkcija g na intervalu (a, x) zadovoljavala uvjete Rolleovog teorema, pa bi postojala točka $c \in (a,x)$ takva da je $g'(c) = 0$, što je suprotno pretpostavci teorema.

Neka je točka $x \in (a,b)$ proizvoljno odabrana. Tada funkcije f i g zadovoljavaju uvjete Cauchyjevog teorema na segmentu [a, x] pa postoji točka $c_x \in (a,x)$ takva da vrijedi

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$

odnosno, kako je $f(a) = g(a) = 0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Kada se x približava a s desne strane, iz $c_x \in (a,x)$, slijedi da se i c_x približava a s desne strane, pa prelaskom na limese dobivamo

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c_x\to a+}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

što smo i željeli dokazati.

3. Flettov teorem srednje vrijednosti

Za sljedeću generalizaciju odabrali smo Flettov teorem srednje vrijednosti ([2], [6]). Motivacija za upravo taj odabir bio nam je sljedeći zadatak postavljen 2006. na Rumunjskoj nacionalnoj matematičkoj olimpijadi.

Zadatak. *Neka je* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *neprekidna funkcija za koju je* $\int_0^1 f(x)dx=0$. *Pokažite da postoji* $c\in(0,1)$ *tako da vrijedi* $\int_0^c xf(x)dx=0$.

Najprije ćemo iskazati i dokazati spomenuti Flettov teorem, a zatim riješiti zadatak.

Teorem 3 (Flettov teorem srednje vrijednosti) *Neka je funkcija f diferencijabilna na* [a, b] *i neka vrijedi* $f'(a)=f'(b)$. *Tada postoji točka* $c\in(a,b)$ *takva da vrijedi*

$$f(c)-f(a)=f'(c)(c-a).$$

Dokaz. Definirajmo pomoćnu funkciju

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & x\in(a,b],\\[2ex] f'(a) & x=a.\end{cases}$$

Funkcija g je neprekidna na [a, b] i diferencijabilna na (a, b], te vrijedi

$$g'(x)=-\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}+\frac{f'(x)}{x-a}.$$

Ako pronađemo točku $c \in (a,b)$ za koju je $g'(c)=0$, tada iz prethodne formule slijedi tvrdnja teorema. Zato pokažimo da takva točka *c* postoji.

Zbog neprekidnosti, funkcija *g* na segmentu $[a, b]$ dostiže minimum i maksimum. Razlikujemo dva slučaja, ovisno o tome postižu li se ekstremi u krajnjim ili unutrašnjim točkama segmenta $[a, b]$. Prvo, ako se minimum ili maksimum dostiže u nekoj točki $c \in (a,b)$, onda je to ujedno i točka lokalnog ekstrema funkcije *g* pa vrijedi $g'(c)=0$. U drugom slučaju funkcija *g* dostiže minimum i maksimum u rubnim točkama *a* i *b*. Pretpostavimo da se minimum postiže u točki *a*, a maksimum u točki *b* (obrnuti slučaj pokazuje se na isti način). Tada za sve $x \in [a,b]$ vrijedi $g(a) \le g(x) \le g(b)$. Iz toga slijedi da za sve $x \in [a,b]$ vrijedi

$$f(x) \le f(a) + (x-a)g(b),$$

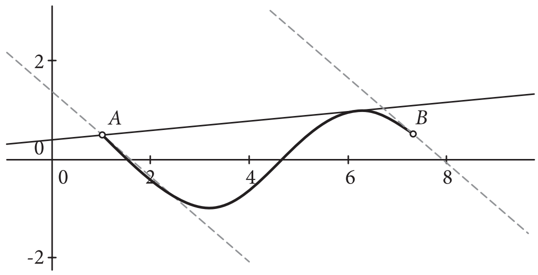
odakle dobivamo

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \ge \frac{f(b)-f(a)-(x-a)g(b)}{b-x} = \frac{f(b)-f(a)-(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{b-x}$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g(b).$$

Prelaskom na limes, kada *x* teži k *b* s lijeve strane, dobivamo $f'(b) \ge g(b)$. Prema pretpostavci teorema i iz definicije funkcije *g* vrijedi $f'(b) = f'(a) = g(a)$, pa je $g(a) \ge g(b)$. Iz toga slijedi da je funkcija *g* konstantna na $[a, b]$ i zato $g'(c)=0$ za sve $c \in (a,b)$. □

Flettov teorem također se lako geometrijski interpretira: ako su tangente na graf funkcije *f* u točkama *a* i *b* paralelne, tada postoji točka $c \in (a,b)$ takva da tangenta na graf funkcije u toj točki prolazi točkom $(a,(f(a))$ s grafa funkcije *f*.



Slika 2. Geometrijska intepretacija Flettovog teorema

Rješenje zadatka. Definirajmo pomoćnu funkciju $h:[0,1] \to \mathbb{R}$ formulom

$$h(t) = t\int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx.$$

Funkcija h je diferencijabilna na $[0,1]$ i vrijedi

$$h'(t)=\int_0^t f(x)dx+t(\int_0^t f(x)dx)'-(\int_0^t xf(x)dx)'=\int_0^t f(x)dx+tf(t)-tf(t)=\int_0^t f(x)dx.$$

Posebno, vrijedi $h'(0)=\int_0^0 f(x)dx=0$, a pretpostavka zadatka daje $h'(1)=\int_0^1 f(x)dx=0$.

Time smo provjerili da funkcija h zadovoljava uvjete Flettovog teorema. Stoga postoji $c\in(0,1)$ tako da je $h(c)-h(0)=h'(c)(c-0)$ to jest,

$$c\int_0^c f(x)dx-\int_0^c xf(x)dx-0=c\int_0^c f(x)dx,$$

što je ekvivalentno jednakosti $\int_0^c f(x)dx=0$ koju je i trebalo dokazati. □

4. Teoremi srednje vrijednosti za derivacije višeg reda

Dosad smo promatrali diferencijabilnu funkciju *f*. S ciljem generaliziranja teorema, pitanje koje se prirodno nameće je možemo li dobiti „jači" rezultat ako za funkciju pretpostavimo da ima i neka dodatna svojstva, npr. da ima derivacije višega reda. Najprije ćemo generalizirati Rolleov teorem.

Propozicija 1 *Neka je funkcija* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *diferencijabilna, te neka je takva i njezina derivacija* f'. *Pretpostavimo da vrijedi* $f(a)=f(b)=0$ *i* $f'(a)=0$. *Tada postoji točka* $c\in(a,b)$ *takva da vrijedi* $f''(c)=0$.

Dokaz. Kako je $f(a)=f(b)=0$, na funkciju *f* možemo primijeniti Rolleov teorem. Tako dobijemo točku $c_1\in(a,b)$ za koju je $f'(c_1)=0$. Kako prema pretpostavci vrijedi i $f'(a)=0$, ponovno možemo primijeniti Rolleov teorem, ovaj put na funkciju promatranu na $[a,c_1]$. Tako nalazimo točku $c_2\in(a,c_1)\subseteq(a,b)$ takvu da je $f''(c_2)=0$ što smo i htjeli dokazati. □

Na isti način prethodnu propoziciju možemo poopćiti na funkciju koja je $(n+1)$-puta diferencijabilna. Dokaz u potpunosti slijedi dokaz propozicije 1, pa ga ostavljamo za vježbu.

Teorem 3 *Neka je funkcija* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *diferencijabilna, te neka isto vrijedi i za njene derivacije* $f',f'',\dots,f^{(n)}$. *Pretpostavimo da je* $f(a)=f(b)=0$, *te* $f'(a)=f''(a)=\dots=f^{(n)}(a)=0$. *Tada postoji točka* $c\in(a,b)$ *takva da vrijedi* $f^{(n+1)}(c)=0$.

Time smo dobili svojevrsnu generalizaciju Rolleovog teorema. Kako je Lagrangeov teorem direktna posljedica Rolleovog teorema, prirodno se nameće pitanje možemo li iz ove generalizacije Rolleovog teorema dobiti neku generalizaciju Lagrangeovog teorema.

Propozicija 2 *Neka je funkcija* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *diferencijabilna, te neka je takva i njena derivacija* f'. *Neka je* $t(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$. *Tada postoji* $c\in(a,b)$ *tako da vrijedi*

$$f''(c)=2\frac{f(b)-t(b)}{(b-a)^2}.$$

Dokaz. Nađimo polinom p_2 drugog stupnja takav da vrijedi $p_2(a)=f(a)$, $p_2'(a)=f'(a)$ i $p_2(b)=f(b)$. Ideja je da ćemo tada na funkciju $g(x)=f(x)-p_2(x)$ moći primijeniti propoziciju 1. (Sjetimo se da se Lagrangeov teorem može dokazati tako da se nađe polinom prvog stupnja p_1 sa svojstvima $p_1(a)=f(a)$ i $p_1(b)=f(b)$, a onda se primijeni Rolleov teorem na funkciju $g(x)=f(x)-p_1(x)$).

Zapišemo li traženi polinom p_2 u obliku $p_2(x)=A+B(x-a)+C(x-a)^2$, odmah dobivamo da je $p_2(a)=A$, $p_2'(a)=B$, a zatim iz uvjeta $p_2(b)=f(b)$ lako vidimo da traženi polinom ima jednadžbu

$$p_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}(x-a)^2.$$

Uvedemo li oznaku $t(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$, dobivamo

$$p_2(x)=t(x)+\frac{f(b)-t(b)}{(b-a)^2}(x-a)^2.$$

Primjenom propozicije 1 na funkciju $g(x)=f(x)-p_2(x)$ dobivamo točku $c\in(a,b)$ za koju vrijedi $g''(c)=0$, to jest $f''(c)=p_2''(c)=2\dfrac{f(b)-t(b)}{(b-a)^2}$. □

Na sljedećem primjeru pokažimo kako nam propozicija 2 može poslužiti za ocjenu greške u aproksimaciji. Primijetimo da je *t* jednadžba tangente na graf funkcije *f* u točki $(a,f(a))$, a tangenta je pravac koji u blizini točke *a* dobro aproksimira funkciju *f*.

Primjer Pogledajmo funkciju $f(x)=\ln x$. Uzmimo $a=1$ i $b=1.1$. Tada je $f(a)=f(1)=0$. Kako je $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, jednadžba tangente u točki $a=1$ glasi $t(x)=x-1$. Htjeli bismo znati koliko će točno vrijednost $f(1.1)=\ln(1.1)$ biti aproksimirana s vrijednošću $t(1.1)=0.1$. Prema propoziciji 2, postoji $c\in(a,b)$ tako da vrijedi

$$f(b)-t(b)=\frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2.$$

Kako je $f''(c)=-\dfrac{1}{c^2}$, te $c>1$, dobivamo

$$\left|\ln(1.1)-0.1\right|=\frac{0.01}{2c^2}<\frac{0.01}{2}=0.005.$$

Računajući kalkulatorom vidimo da je $\ln(1.1)=0.09531...\approx 0.1$, pa je pogreška $0.004689...<0.005$. □

Korištenjem prpozicije 1 (koja generalizira Rolleov teorem), dokazali smo propoziciju 2 (koja generalizira Lagrangeov teorem). Slično bi se uz pomoć teorema 3 dodatno generalizirao Lagrangeov teorem. Tada bi se u iskazu umjesto tangente t pojavio polinom n-tog stupnja, a on bi bolje od tangente aproksimirao početnu funkciju. Takav polinom je dobro poznat, zove se Taylorov polinom n-tog stupnja funkcije f, a ocjena pogreške koju on daje pri aproksimaciji funkcije slijedi iz generalizacije Lagrangeovog teorema. Više o Taylorovom polinomu može se naći u [3] i [4].

Napomenimo za kraj da smo ovdje naveli samo neke najpoznatije generalizacije Rolleovog i Lagrangeovog teorema. Brojne druge generalizacije mogu se naći u [6] i [8].

Literatura

1. Lj. Arambašić, A. Valent, *Neke primjene Rolleovog teorema i Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti,* Poučak 14 (2013.), 55, 47-56.
2. T. M. Flett, *A mean value theorem*, Math. Gazette, 42 (1958.), 38-39.
3. B. Guljaš, *Matematička analiza I i II, predavanja*, http://web.math.pmf.unizg.hr/guljas/skripte/MATANALuR.pdf
4. S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga 1997, Zagreb.
5. C. Lupu, T. Lupu, *Problem 11290*, American Math. Monthly 114 (2007.), 359.
6. C. Lupu, *Qualitative Analysis on Some Classes of Nonlinear Problems,* http://lupu-cezar.files.wordpress.com/2010/04/teza-doctorat-craiova-2013-cezar-lupu.pdf
7. M. Matika, *Neke generalizacije Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti*, diplomski rad, PMF-Matematički odsjek (2015.)
8. P. K. Sahoo, T. Riedel *Mean Value Theorems and Functional Equations*, World Scientific, 1998.