IZ NASTAVNE PRAKSE

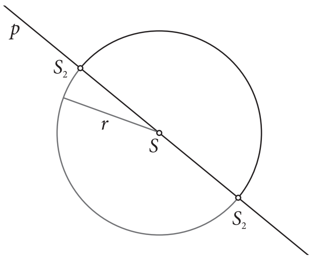
Matematičke konstante – 2. dio

TIHANA STRMEČKI, LUKA MAROHNIĆ, PETRA JAKULJ*

U prvom smo dijelu članka o matematičkim konstantama detaljnije obradili konstante koje su sastavni dijelovi slavnog Eulerovog[1] identiteta – Ludolfovu[2] konstantu π, Eulerov broj e, konstantu 1, konstantu 0 i imaginarnu jedinicu i. U drugom ćemo dijelu predstaviti opću paraboličnu konstantu, zlatni rez i plastičnu konstantu. I ovom prilikom upućujemo na daljnje istraživanje svih pojmova koji se spominju na osnovnoj razini, kako bi se otkrilo puno više zanimljivosti od onih koje će biti predstavljene u ovome članku.

Opća parabolična konstanta

Opća parabolična konstanta jest analogon broja π u slučaju kružnice. Neka je K kružnica polumjera $r > 0$ čije je središte točka S. Nacrta li se točkom S po volji pravac p, on će presjeći kružnicu u točkama S_1 i S_2 (slika 1). Te dvije točke dijele cijelu kružnicu na dvije sukladne polukružnice. Prema definiciji kružnice vrijedi jednakost $|SS_1| = |SS_2| = r$. Omjer duljine bilo koje od dobivenih polukružnica i polumjera kružnice je konstantna vrijednost i ne ovisi niti o izboru kružnice, niti o izboru pravca p. Ta se konstanta označava s π i o njoj smo detaljno pisali u prvom dijelu članka o matematičkim konstantama.



Slika 1. Kružnica

* Tihana Strmečki, Tehničko veleučilište u Zagrebu
Luka Marohnić, Tehničko veleučilište u Zagrebu
Petra Jakulj, studentica PMF-MO Sveučilišta u Zagrebu

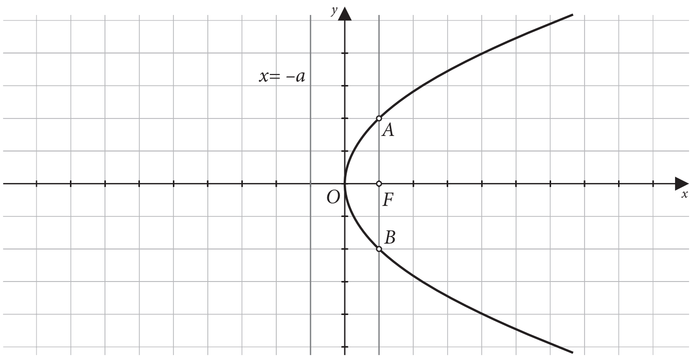
[1] Leonhard Euler (1707. – 1783.), švicarski matematičar i fizičar

[2] Ludolph van Ceulen (1540. – 1610.), njemački matematičar

Promotrit ćemo analogon opisanoga svojstva kružnice koji vrijedi za bilo koju parabolu. Prema definiciji, parabola je geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od čvrste točke F (tzv. žarišta parabole) i čvrstoga pravca r (tzv. ravnalice parabole).

Stoga je svaka parabola jednoznačno određena zadavanjem točke F i pravca r. Parabolni analogon središta kružnice jest žarište parabole, dok je analogon pravca p pravac q koji prolazi žarištem F usporedno s pravcem r. Takav pravac q jedinstven je i siječe parabolu u točno dvije točke: A i B. Dokazano je da je omjer duljine luka parabole $\widehat{AB}$ i udaljenosti žarišta F od pravca r konstantan i da ne ovisi o izboru parabole. Taj se omjer naziva **opća parabolična konstanta**.

Da bi se mogla izračunati vrijednost parabolične konstante, nužno je znati analitičku jednadžbu parabole. Pravokutni koordinatni sustav u ravnini postavit ćemo tako da tjeme parabole bude u ishodištu, žarište F na osi x, dok je ravnalica r pravac usporedan s osi y. Jednadžba parabole čije je žarište $F = (a, 0)$, $a \in \mathbb{R}^+$, a ravnalica r pravac $x = -a$, glasi $y^2 = 4ax$. Obratno, parabola čija je jednadžba $y^2 = 4ax$ ima žarište u točki $F = (a, 0)$, i ravnalicu $x = -a$. Ukoliko kroz žarište nacrtamo pravac usporedan s ravnalicom r, on siječe parabolu u dvjema točkama $A = (a, 2a)$ i $B = (a, -2a)$. Dužina $\overline{AB}$ obično se naziva latus rectum[3] (slika 2).



Slika 2. Parabola

Omjer duljine luka $\widehat{AOB}$ i udaljenosti žarišta F od pravca r jednak je vrijednosti opće parabolične konstante P_2 i iznosi:

$$P_2 = \frac{l\left(\widehat{AOB}\right)}{d(F,r)} = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1).$$

Njezina približna vrijednost iznosi $P_2 \approx 2.29558715$, te ne ovisi o vrijednosti konstante a, a samim time niti o izboru polazne parabole. Dokazano je da je P_2 **transcendentan** i **iracionalan** broj.

[3]Lat. latus = strana, rectum = ispravan

Napomena 1.

Provede li se analogno razmatranje za elipsu odnosno hiperbolu, dobiva se da pripadni omjeri nisu konstante. Pritom treba napomenuti da elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ i hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ imaju ravnalicu $x=\frac{a^2}{e}$, gdje je e apscisa žarišta elipse odnosno hiperbole. U tim slučajevima spomenuti omjeri ovise o tzv. numeričkom ekscentricitetu (oznaka: ε) elipse odnosno hiperbole definiranom s $\varepsilon=\frac{e}{a}$.

Opća parabolična konstanta javlja se u izračunima površina rotacijskih ploha, te u geometrijskim problemima izračuna prosječnih vrijednosti. Za detaljne izračune pogledati članak [2].

Primjer 1.

Krivulja $y = \cos(x)$, pri čemu je $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, rotira oko osi x. Oplošje nastaloga rotacijskoga tijela iznosi $O=2\pi P_2$.

Primjer 2.

Krivulja $y=e^x$, $x\in\left\langle -\infty,0\right]$, rotira oko osi x. Oplošje dobivenoga rotacijskoga tijela jednako je $O=\pi P_2$.

Primjer 3.

Neka je zadan jedinični kvadrat K čije je središte točka S. Promatra se skup $A = \{|TS| : T \in K\}$. Prosjek vrijednosti svih elemenata skupa A jednak je $\overline{f}=\frac{1}{6}P_2$.

Primjer 4.

Neka je zadan jedinični kvadrat K. Neka je S proizvoljan, ali fiksiran vrh kvadrata. Promatra se skup $B = \{|TS| : T \in K\}$. Prosjek vrijednosti svih elemenata skupa B jednak je $\overline{f}=\frac{1}{3}P_2$.

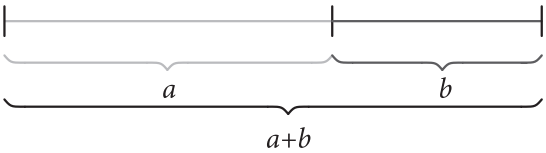
Napomena 2.

Iz rezultata Primjera 3. i Primjera 4. izravno slijedi da će slučajno odabrana točka jediničnoga kvadrata očekivano biti dvostruko bliže središtu kvadrata nego ma kojem njegovu vrhu.

Zlatni rez

Zlatni rez, koji se još naziva zlatni ili božanski omjer, konstanta je poznata iz doba starog Egipta. Smatra se jednom od temeljnih konstanta matematike, čiju nam važnost opisuje i citat slavnog znanstvenika J. Keplera[4]: „Geometrija posjeduje dva blaga: jedno je Pitagorin teorem, a drugo zlatni rez. Prvo se može usporediti s čistim zlatom, a drugo s draguljem neprocjenjive vrijednosti."

Euklid u svom poznatom djelu „Elementi" prvi iznosi definiciju zlatnog reza (koji on naziva *podjelom u krajnjem i srednjem omjeru*): kaže se da je dužina podijeljena u zlatnom omjeru kada je omjer većeg dijela duljine dužine naspram manjeg jednak omjeru cijele duljine dužine naspram većeg (slika 3). Oznaka zlatnog reza je grčko slovo φ („phi") po prvom slovu imena grčkog kipara Pheidiasa[5] (Fidije) koji je navodno svoje kipove unutar Parthenona isklesao u zlatnom omjeru.



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1.618... = \varphi$$

Slika 3. Zlatni rez

Označimo $\varphi = \dfrac{a}{b}$. Iz prve jednakosti sa slike 3 dobiva se jednadžba $a^2 - ab - b^2 = 0$ iz koje dijeljenjem s b^2 i uvažavanjem navedene zamjene dobijemo jednadžbu $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Odatle slijedi $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875...$ Broj φ je **iracionalan**, zbog čega postoji nekoliko njegovih zanimljivih zapisa. Jedan od njih je i zapis preko beskonačnog niza verižnih razlomaka:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}} = ...$$

[4]Johannes Kepler (1571. – 1630.), njemački matematičar, astronom i astrolog

[5]Pheidias (4. st. pr. Kr.), grčki kipar

Iz jednakosti $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$ slijede i ovi zapisi:

$$\frac{1}{\varphi}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} \quad \text{i} \quad \varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}\,.$$

Promatranjem niza potencija broja φ nailazi se na dva zanimljiva svojstva: svaka se potencija broja φ može zapisati kao zbroj dviju prethodnih, $\varphi^n=\varphi^{n-1}+\varphi^{n-2}$, i svaka se potencija može zapisati kao linearna funkcija varijable φ odnosno oblika $a\varphi+b$, pri čemu su $a,b\in\mathbb{Z}$.

Zlatni je rez usko povezan i s poznatim Fibonaccijevim[6] brojevima koji su definirani rekurzivnom formulom $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, uz početne uvjete $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Prvih nekoliko brojeva su: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Ako se svaki Fibonaccijev broj podijeli svojim prethodnikom, dobije se niz Fibonaccijevih razlomaka. Izračunavanjem takvih razlomaka lako se uoči da je omjer dvaju uzastopnih Fibonaccijevih brojeva približno jednak zlatnom rezu (ukoliko se izuzme prvih nekoliko vrijednosti). R. Simpson[7] pokazao je da vrijedi $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$, a Kepler dokazao da vrijedi $\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{1}{\varphi}$. Ako se Fibonaccijevi brojevi promatraju kao geometrijski niz (zbog relativno konstantnog omjera) i pretpostavi se $F_n = cx^n$, $(c, x \in \mathbb{R})$, uvrštavanjem u rekurzivnu formulu dobiva se sljedeća jednakost:

$$cx^{n-2}(x^2-x-1)=0.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$ i $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pri čemu vrijedi $F_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n$. Rješavanjem rekurzije drugog reda s konstantnim koeficijentima te uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo finalno rješenje:

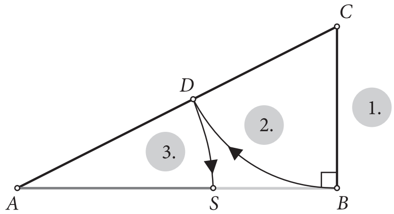
$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Slijedi prikaz jedne od mnogih konstrukcija zlatnog reza. Konstruira se pravokutni trokut ABC (slika 4) takav da je $|BC|=\frac{|AB|}{2}$. Kada se šestarom dužina $\overline{BC}$ pre-

[6]Leonardo da Pisa (oko 1170. – oko 1250.), poznat kao Fibonacci, talijanski matematičar

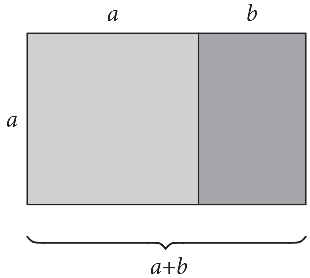
[7]Robert Simpson (1687. – 1768.), škotski matematičar

nese na dužinu $\overline{AC}$, dobiva se točka D. Zatim se dužina $\overline{AD}$ prenese na dužinu $\overline{AB}$, čime se određuje točka S koja dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru.



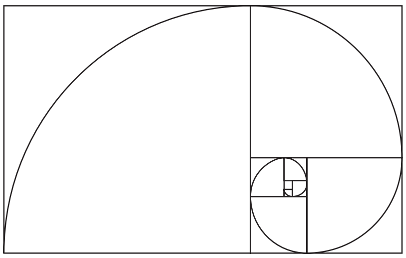
Slika 4. Konstrukcija zlatnog reza

Zlatni pravokutnik (slika 5) primjer je primjene zlatnog reza u geometriji. Definira se kao pravokutnik čije su dužine stranica u zlatnom omjeru. Kada se zlatnom pravokutniku odsječe kvadrat nad manjom stranicom, preostali pravokutnik opet je zlatan. Kako se upravo takav pravokutnik smatra najskladnijim, mnoga slikarska platna tog su oblika.



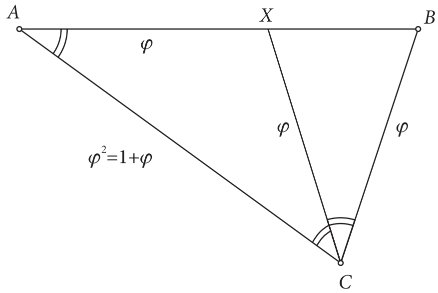
Slika 5. Zlatni pravokutnik

Pomoću zlatnog pravokutnika može se dobiti i *zlatna spirala* (slika 6) konstruirajući lukove kao na slici.



Slika 6. Zlatna spirala

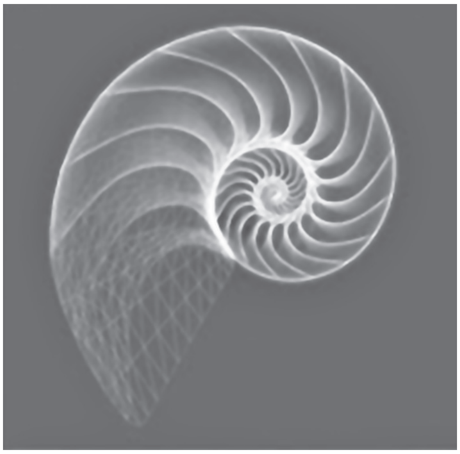
Zlatni trokut (slika 7) jednakokračan je trokut čiji je omjer kraka i osnovice jednak φ, te čija simetrala kuta uz osnovicu dijeli nasuprotnu katetu u zlatnom omjeru.



Slika 7. Zlatni trokut

Dijagonale *pravilnog peterokuta* sijeku se u omjeru φ, koliko iznosi i omjer njegove dijagonale i osnovice.

Mnogo je različitih tvrdnji o sveprisutnosti zlatnog reza u umjetnosti, arhitekturi, kiparstvu, slikarstvu, glazbi, prirodi... Navest ćemo najvažnije primjere koji su i danas predmet rasprava, istraživanja i mjerenja, ne bi li se pokazalo prisustvo zlatnog reza. Takvi slučajevi iz prirode su školjka nautilus (slika 8), cvijet jabuke, raspored grana na drvetu po deblu, položaj kostura i živaca u živim bićima, te ljudski DNK.



Slika 8. Školjka nautilus

Najpoznatija djela starih Grka i Rimljana za koje neki povjesničari tvrde da su primjeri zlatnog reza su Parthenon u Ateni (slika 9), Taj Mahal u Agri (slika 10), te Michelangelov[8] David (slika 11). Mnogi analitičari pokušali su pronaći zlatni omjer i u poznatim kompozicijama P. Mondriana[9] (slika 12), što je i sam umjetnik ismijao.

[8]Michelangelo Buonarroti (1475. – 1564.), talijanski slikar i kipar
[9]Pieter C. Mondrian (1872. – 1944.), nizozemski slikar

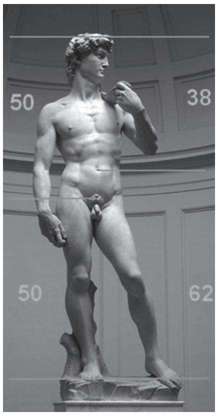
Mnogo je zabluda vezanih uz primjere zlatnog reza, koje se održavaju kao mitovi bez obzira na dokaze suprotnoga. Keopsova piramida u Egiptu jedan je od onih u kojemu je nemoguće znati je li se zlatni rez koristio pri konstrukciji ili ne. Zagovornici te teorije pronalaze ga u omjerima nekih dužina piramide (npr. omjer visine bočne plohe piramide i pola dužine stranice baze), dok protivnici smatraju kako znanstvenici pronalaze ono što žele pronaći. Jedan od njihovih argumenata je i nemogućnost pravilnog mjerenja piramide zbog vidnog oštećenja kroz vrijeme. Postoje i teorije koje smatraju da se proporcije piramide temelje na duljini luka kružnice koja ima opseg jednak opsegu baze piramide, a ne na zlatnom rezu.

Naravno da postoje umjetnici poput arhitekta Le Corbusiera[10] ili skladatelja Josepha Schillingera[11] koji su koristili zlatni omjer u svome radu, i time služe kao pravi primjeri korištenja ove intrigante konstante.

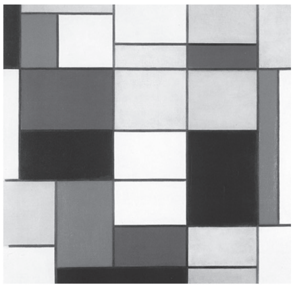
Količina mitova i primjera u kojima se nalazi zlatni rez samo pokazuje važnost ove konstante koja jednako intrigira i znanstvenike i umjetnike, zbog čega je iznimno važan dio ljudske povijesti (vidi [7]).

Slika 9. Parthenon

Slika 10. Taj Mahal



Slika 11. Michelangelo



Slika 12. P. Mondrian

[10]Charles-Édouard Jeanneret-Gris (1887. – 1965.), poznat kao Le Corbusier, francuski arhitekt
[11]Joseph Moiseyevich Schillinger (1895. – 1943.), ruski kompozitor

Plastična konstanta

Definicija zlatnoga reza može se generalizirati kako bi se definirale nove konstante. Postoji više poznatih načina da se to učini. Budući da je zlatni rez φ rješenje jednadžbe

$$x^2 = x + 1, \tag{1}$$

njegova generalizacija može se jednostavno definirati kao realno rješenje jednadžbe

$$x^n = x + 1, \tag{2}$$

gdje je n neki prirodan broj veći od 2. Može se pokazati da u tom slučaju jednadžba (2) ima jedinstveno rješenje i da to rješenje pripada intervalu (1, 2).

Najvažniju generalizaciju zlatnoga reza dobivamo kao jedinstveno realno rješenje jednadžbe

$$x^3 = x + 1 \tag{3}$$

koja je poseban slučaj jednadžbe (2). To rješenje nazivamo **plastična konstanta** i označavamo grčkim slovom ψ. Plastičnu konstantu najjednostavnije možemo izračunati primjenom Cardanove[12] formule. Točnije, vrijedi jednakost

$$\psi = \frac{\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108-12\sqrt{69}}}{6} \approx 1.324717957244746...$$

Uz jednadžbu (2) vezujemo niz prirodnih brojeva čijih je prvih n članova jednako 1, a svaki se daljnji član dobiva kao zbroj člana koji se nalazi n mjesta ranije u nizu i njegovoga sljedbenika. Može se pokazati da je pozitivna realna nultočka jednadžbe (2) jednaka limesu kvocijenta uzastopnih članova toga niza. U slučaju kada je n jednak 2, radi se o ranije spomenutom Fibonaccijevom nizu, a za $n = 3$ govorimo o *Padovanovu[13] nizu* $(P_k)_{k\geq 1}$ koji je definiran rekurzivnom relacijom

$$P_k = P_{k-2} + P_{k-3} \text{ za } k \geq 4,$$
$$P_1 = P_2 = P_3 = 1.$$

Evo prvih 20 članova toga niza:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151...

Prema ranije rečenom vrijedi tvrdnja analogna onoj koja povezuje Fibonaccijeve brojeve i zlatni rez:

$$\lim_k \frac{P_{k+1}}{P_k} = \psi .$$

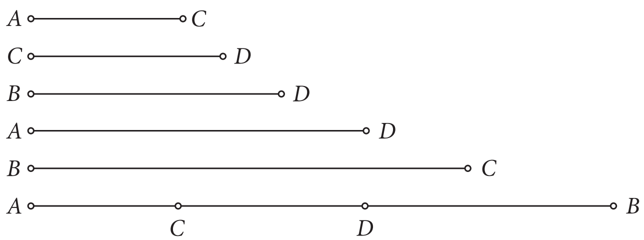
[12] Girolamo Cardano (1501. – 1576.), talijanski matematičar, fizičar, filozof i astrolog

[13] Richard Padovan (1935.), engleski arhitekt i prevoditelj

Zlatni rez i plastična konstanta povezani su na više načina. U 20. stoljeću nastala su dva značajna djela u području teorije arhitekture: *Modulor* francuskoga arhitekta Le Corbusiera i *Arhitektonski prostor* nizozemskoga arhitekta Hansa van der Laana[14]. U prvome se djelu izlaže teorija proporcija u arhitekturi temeljena na zlatnome rezu i veličini ljudskoga tijela, dok se u drugome objašnjavaju međusobni odnosi veličina trodimenzijskih tijela s obzirom na plastični broj. Djelo Hansa van der Laana manje je poznato, ali nesumnjivo originalnije, budući da je plastična konstanta autorovo vlastito otkriće (Hans van der Laan pronašao ju je 1928. godine kao 24-godišnjak), a teorija temeljena na njoj i dan danas predstavlja jedinu značajnu opoziciju u dva tisućljeća uvriježenom konceptu zlatnoga reza. Hans van der Laan tvrdi da je pogrešno smatrati zlatni rez osnovnim omjerom, te odbacuje od 19. stoljeća prisutnu težnju da se estetske norme u umjetnosti kroje po tome načelu. Prema njegovu zaključivanju, zlatni rez bio bi osnovni omjer kada bi prostor koji nas okružuje bio dvodimenzijski. Kako je on ipak trodimenzijski, tu ulogu preuzima plastična konstanta.

Zanimljiva je i činjenica da je plastičnu konstantu 1924. godine nezavisno otkrio i francuski inženjer Gerard Cordonnier[15], u dobi od 17 godina. Međutim, tek je 1958. godine odlučio dati u javnost detalje svojih istraživanja o svojstvima toga broja u smislu niza javnih predavanja (u sklopu kojih su se nalazile i analize postojećih građevina) i knjige *Au-delà du nombre d'or: le nombre radiant*, čiji naslov u slobodnom prijevodu glasi: *Onkraj zlatnoga reza: blistav broj* (Cordonnier je plastičnu konstantu nazvao „blistavim brojem”). Knjigu nažalost nije uspio dovršiti, te ona nikada nije objavljena. Neki detalji toga teksta izloženi su u članku istoga naslova.

Gerard Cordonnier otkrio je da se zadana dužina AB može podijeliti u tri dijela dvjema točkama C i D te dužine tako da duljine ukupno 6 dužina s krajevima u skupu $\{A,B,C,D\}$, poredane po veličini (slika 13), predstavljaju 6 uzastopnih članova geometrijskoga niza. Omjer toga niza upravo je plastična konstanta.



Slika 13.

Unatoč tome što je Cordonnier plastičnu konstantu otkrio četiri godine prije Hansa van der Laana, potonji se smatra njezinim pravim izumiteljem budući da ju je učinio temeljem originalne i značajne teorije arhitekture. Naziv „plastična konstanta” koji danas koristimo uveo je upravo Hans van der Laan, a upućuje na *plastičnost* oblika, dakle na trodimenzionalnost. Time plastična konstanta postaje svojevrstan

[14]Dom Hans van der Laan (1904. – 1991.), nizozemski benediktinac i arhitekt

[15]Gérard Cordonnier (1907. – 1977.), francuski inženjer

„regulator" veličine trodimenzijskoga tijela u odnosu na druga tijela u njegovu susjedstvu. Hans van der Laan dodatno naglašava da bit plastičnoga broja nije u tome da uspostavi **estetske** norme arhitekture (što se često pripisuje zlatnome rezu), nego da osigura **jasnoću** percepcije.

Plastična konstanta ima mnoga zanimljiva matematička svojstva. Na primjer, osim jednadžbe (3), ona zadovoljava i jednadžbu

$$x^{-4} = x - 1. \tag{4}$$

Prema tome, ψ je jedan od brojeva x za koji postoje prirodni brojevi p i q takvi da vrijedi

$$x + 1 = x^p \text{ i } x - 1 = x^{-q}$$

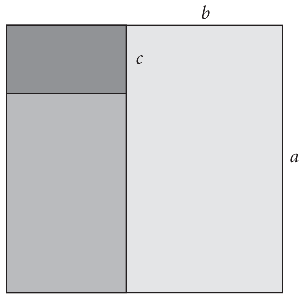
Realni brojevi veći od 1 koji imaju ovo svojstvo nazivaju se **morfni brojevi**. Može se dokazati da su zlatni rez i plastična konstanta jedini morfni brojevi.

Baš kao i u slučaju zlatnoga reza, apsolutna vrijednost razlike cjelobrojne potencije plastične konstante i najbližega cijeloga broja teži nuli kako vrijednost eksponenta teži beskonačnosti. Ovo svojstvo karakterizira tzv. *Pisot*[16] – *Vijayaraghavanove*[17] (PV) brojeve. PV broj je svaki realan broj $x > 1$ takav da postoji polinom p s cjelobrojnim koeficijentima za koji vrijedi $p(x) = 0$ i čije su sve (kompleksne) nultočke, različite od x, po apsolutnoj vrijednosti manje od 1. Plastična konstanta je najmanji PV broj. Zlatni rez također je PV broj, a ujedno i najmanje gomilište PV brojeva.

Plastična konstanta zadovoljava sljedeći približni identitet koji uključuje najpoznatije matematičke konstante, brojeve π i e:

$$e^{\pi\sqrt{23}} \approx 2^{12}\psi^{24} - 24.$$

Apsolutna vrijednost razlike lijeve i desne strane gornje jednadžbe iznosi približno $7.9 \cdot 10^{-5}$.



Slika 14. Rastav kvadrata

Na koncu spomenimo jednu zanimljivu geometrijsku interpretaciju plastične konstante. Rastavimo li proizvoljan kvadrat na tri slična pravokutnika (slika 14), u svakome od njih dulja će se stranica odnositi prema manjoj u omjeru ψ^2.

[16] Charles Pisot (1910. – 1984.), francuski matematičar

[17] Tirukkannapuram Vijayaraghavan (1902. – 1955.), indijski matematičar

Dokažimo ovu tvrdnju. Slovom a na slici 14 označena je dulja stranica žutoga (najvećega) pravokutnika, slovom b njegova kraća stranica, a slovom c kraća stranica plavoga (najmanjega) pravokutnika. Prema tome, dulja stranica plavoga i kraća stranica crvenoga pravokutnika jednake su $a–b$, a dulja stranica crvenoga pravokutnika jednaka je $a - c$. Budući da žuti, crveni i plavi pravokutnik prema pretpostavci moraju biti slični, vrijedi

$$\frac{a}{b}=\frac{a-c}{a-b}=\frac{a-b}{c}=r \tag{5}$$

za neki pozitivan realan broj r. Iz posljednje dvije jednakosti u (5) dobivamo

$$r=\frac{a-b}{c}=\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{a-b}-\frac{c}{a-b}=\frac{a}{a-b}-\frac{1}{r}. \tag{6}$$

Međutim, iz (5) također slijedi

$$\frac{a}{a-b}=\left(\frac{a-b}{a}\right)^{-1}=\left(1-\frac{b}{a}\right)^{-1}=\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Uvrštavanjem jednakosti (7) u jednakost (6) dobivamo

$$r=\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1}-\frac{1}{r}\Rightarrow r=\frac{r}{r-1}-\frac{1}{r}\Rightarrow r^3-2r^2+r-1=0.$$

Direktnim uvrštavanjem, uz primjenu jednakosti (3) i (4), lako se provjerava da je rješenje dobivene jednadžbe upravo $r = \psi^2$. Može se pokazati da je to ujedno i njezino jedino realno rješenje.

Literatura:

1. S. R. Finch: *Mathematical constants,* Cambridge University Press, 2003.
2. B. Kovačić, I. Božić, T. Strmečki: *O općoj paraboličkoj konstanti*, Osječki matematički list 13, 2013.
3. S. Reese, J. Sondow: *Universal Parabolic Constant*, MathWorld - A Wolfram Web Resource
4. http://mathworld.wolfram.com/UniversalParabolicConstant.html
5. A. Baker: *Transcendental Number Theory,* Cambridge University Press, 1975.
6. M. Rodić: Diplomski rad *Zlatni rez, matematika od prirode do umjetnosti*, PMFMO, Zagreb, 2001.
7. Z. Šikić: *Istine i laži o zlatnom rezu*, Poučak 15, 2003.
8. T. Strmečki, B. Kovačić: *Matematičke konstante – 1. dio*, Poučak 15, 2014.
9. I. Nakić: predavanja iz kolegija *Diskretna matematika*, Zagreb, 2011. (http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf)
10. www.mathsisfun.com/numbers/golden-ratio.html
11. www.goldennumber.net/golden-ratio/
12. www.goldennumber.net/golden-ratio-myth/
13. http://www.cdlmadrid.org/cdl/htdocs/universidaddeotono/unioto/matematicas/markowsky.pdf