

Mlin

(Prilog nastavi i metodici matematike dječjih igara)

KAJETAN ŠEPER¹

Predgovor

Još u najranijoj mladosti naučili su me igru *mлин*. Igrajući mlin s raznim suigračima svih generacija – rođacima, prijateljima i znancima – isprva sam mnogo puta gubio „partije”, ali ponekad i dobivao, i to baš sa starijim suigračima koji su ili loše igrali ili možda namjerno gubili. No, nakon nekog vremena počeo sam dobivati neovisno o suigračima, bilo da sam bio prvi „na potezu”, tzv. „bijeli” igrač, bilo da sam bio „crni” suigrač.

Kako je to bilo moguće?

Tako da sam tijekom mnogo odigranih partija s raznim suigračima postupno uočavao zakonitosti pobjedničke igre, tzv. *pobjedničku strategiju*, i tako je stalno primjenjivao.

Dakako, to je bila samo moja *praktička strategija*, a ne *matematičko-teorijska* u tančine dokazana, koja možda i ne postoji (vidi sl. 4.).

U nastavku ćemo podrobno opisati način kako se igra *mлин* i s tim u svezi postaviti nekoliko istaknutih vrsta zadataka. U svrhu nastave, zadatci će biti metodički razrađeni primjerima.

1. Potrepštine

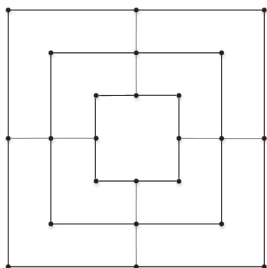
1.1. Mlinska ploča, ležišta i staze

Za igru *mлин* u prvom je redu potreban posebno oblikovan prostor zvan *mlinska ploča* ili *mлинovnica*, a to je ravna ploča s ucrtane tri četvorine smještene jedna u drugu, s međusobno usporednim stranicama. Nazivamo ih *vanjska*, *srednja* i *unutarnja* četvorina.

¹Kajetan Šeper, Slavonski Brod

Na svakom su vrhu i u središtu svake stranice svake četvorine ucrtani kružići zvani *vršna* i *središnja ležišta*.

Osim već nacrtanih *staza* duž stranica četvorina od svakog ležišta do susjednog, još su ucrtane *staze* od svakog središnjeg ležišta do susjednog središnjeg (vidi sl. 1.a). Te staze mogu se zvati *stranične* i *središnje*.



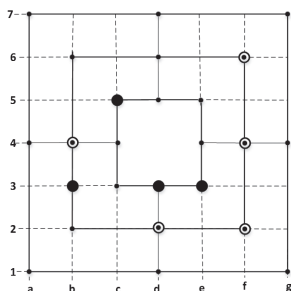
Slika 1.a Prazna osnovna mlinovnica

1.2. Zaliha mlinskih kamečaka

Uz to, još je potrebno u zalihi imati dva puta po devet plosnatih okruglih *mlinskih kamečaka* (*figura*), i to devet *bijelih* i devet *crnih*. (Umjesto kamečaka mogu poslužiti npr. zrna graha i kukuruza ili bijela i crna puceta.)

1.3. Označavanje ležišta

U svrhu zapisivanja tijeka igre ili zadavanja problemske postavbe, ležišta ćemo označiti uređenim parovima slova *a, b...* i brojaka 1, 2... Slova su pridružena *vertikalama*, a brojke *horizontalama* (vidi sl. 1.b).



Slika 1.b Osnovna mlinovnica s označenim ležištima
 B: b4, d2, f2, f4, f6
 C: b2, c5, d3, e3

2. Opća pravila

2.1. Bijeli i crni igrač

Mlin igraju dva igrača jedan protiv drugog. Jedan se igrač koristi bijelim kamečcima, to je *bijeli igrač*, a drugi crnim kamečcima, to je *crni igrač*.

2.2. Koraci

Mlin se igra u *koracima* koje igrači ostvaruju *postupno* i *naizmjenično* tijekom igre, a tijek se određuje pravilima igre.

2.3. Tri razvojna razdoblja u tijeku igre. Skok i potez.

- a) Prvo, u početnom razdoblju, dok još ima kamečaka u zalihi, igrači *postavljaju* svoje kamečke iz zalihe na prazna ležišta mlinovnice. Korak postavljanja može se nazvati *vanjski skok iz zalihe na mlinovnicu*.
- b) Drugo, u srednjem razdoblju, kada više nema kamečaka u zalihi, igrači *potežu* bilo koji svoj kamečak do susjednog praznog ležišta mlinovnice. Korak potezanja zove se *potez*.
- c) Treće, u završnom razdoblju, kada je igrač ostao samo s tri svoja posljednja kamečka, skače na bilo koje prazno ležište mlinovnice. Ovaj se korak skakanja može nazvati *unutarnji skok s mlinovnice na mlinovnicu*.

2.4. Postave

Svaki raspored bijelih i crnih kamečaka po ležištima mlinovnice pri svakom koraku u tijeku igre, uz poštivanje pravila igre, naziva se *pravilna (zakonita, legalna) postava (pozicija, konfiguracija)*.

Postava se u svakom koraku mijenja ovisno o skoku ili potezu bijelog ili crnog igrača, a odvija se naizmjenično, počevši od prvog postavljanja – skoka bijelog igrača. (Tko je bijeli igrač odlučuje se dogovorno.)

Postave koje ne mogu nastati tijekom igre po unaprijed zadanim pravilima, nazivaju se *nepravilne (nezakonite, nelegalne)*. Te su postave problemski zanimljive.

Ako igrač koji je na redu ne može načiniti sljedeći korak, takva se postava naziva *pat-postava*.

Ovako određene postave bez naznake broja kamečaka u zalihi i broja izbačenih kamečaka u spremištu svakog igrača – bijelog z_b, s_b odnosno crnog z_c, s_c – nazivaju se *postave u užem smislu*. Postave u užem smislu zajedno s pridruženim brojevima z_b, s_b, z_c i s_c nazivaju se *postave u širem smislu* (vidi sl.1.).

To razlikovanje je važno pri rješavanju nekih primjera, zadataka i problema, jer se rješenja mogu razlikovati, ovisno o tome radi li se o postavi u užem ili širem smislu.

3. Posebna pravila

3.1. Pravilo izbacivanja protivničkog kamečka s mlinovnice

Kažemo da je igrač *napravio mlin* ako svojim kamečcima ispuni tri susjedna ležišta bilo koje stranice ili srednjice. U tom slučaju igrač *može izbaciti* (kažemo i „pojести”) bilo koji protivnički kamečak s mlinovnice ako želi, ali samo pod uvjetom da taj kamečak *nije u mlinu*, i to izbacivanje *mora* učiniti *odmah* jer inače gubi to pravo. (Bez zahtjeva da igrač izbacivanje *mora* učiniti *odmah*, igrač ne bi ipak, zbog cilja igre, odustao od izbacivanja suigračevog kamečka odmah kada napravi mlin.)

3.2. Pravilo pobjede

Onaj igrač koji izbací protivnički kamečak od njegova preostala samo tri – *pobjeđuje*. Igra (kaže se i „partija”) može u svakom koraku završiti *predajom* jednog igrača tako da drugi igrač pobjeđuje.

3.3. Pravila neodlučnog završetka

- a) Ako bilo koji igrač napravi *pat-postavu*, igra završava *neodlučno*, kaže se *remijem*. (Igrač koji želi pobijediti ne smije načiniti *pat-postavu*, dok je igrač koji želi izbjeći poraz treba napraviti, ako je to moguće.)
- b) Igra može u svakom koraku završiti neodlučno *po zajedničkom dogovoru*.
- c) Igra može završiti neodlučno poslije određenog broja koraka i onda ako je njezin tijekom *previše dug* i bez značajnog razvoja ili zbog *ponavljanja* istih postava određeni broj puta. (To je pravilo samo teorijski važno, a pri tome treba točno odrediti spomenuti broj koraka odnosno broj ponavljanja.)

4. Osnovni problem

4.1. Strategija dobitka

Kao i u šahu, i u *mlinu* se postavlja teorijski osnovni problem: Ima li bijeli igrač koji započinje igru prednost u smislu dobitka pred crnim suigračem? Što to znači? *To znači da postoji takav konačan niz koraka bijelog igrača od početka igre, bez obzira na naizmjenične korake crnog igrača i ovisno o njima, da taj niz završava pobjedom bijelog igrača.*

Taj se niz, ako postoji, naziva *strategija dobitka bijelog igrača*.

4.2. Primjedba

Za šah taj izvanredno teški čisto teorijski problem do danas nije nitko riješio, a za mlin nisam siguran da ga je itko pokušao riješiti. Ipak, treba istaknuti da teorijsko rješenje ne bi poništilo zanimljivost ni šaha ni mlina.

4.3. Strategija neodlučnog ishoda

Osim strategije dobitka, može se govoriti i o *strategiji neodlučnog ishoda*.

4.4. Primjedba

U oba slučaja može se govoriti općenitije o *strategiji polazeći od ostvarene postave u tijeku igre*

4.5. Problem I

Bijeli igrač NEMA strategiju pobjede.

4.6. Problem II

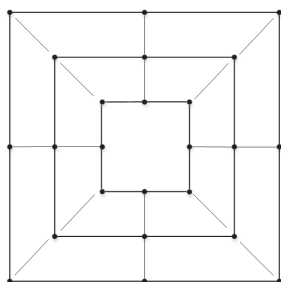
Bijeli igrač IMA strategiju neodlučnog ishoda.

5. Inačice

Ovdje ćemo istaknuti samo tri vrste „proširenih” inačica osnovne igre mlina, i to zadržavajući osnovnu ideju mlinovnice i pravila igre.

5.1. Inačica s tri četvorine i dijagonalnim stazama mlinovnice

U njoj se mlinovnica dopunjuje *dijagonalnim stazama* koje spajaju svaki vrh četvorine sa susjednim vrhom susjedne četvorine. Inače je tijek igre određen istim pravilima kao za osnovnu izvedbu, osim što još postoji i mogućnost ostvarenja mlina na dijagonalni, tzv. *dijagonalnog mlina* (vidi sl.2.).



Slika 2. Prazna osnovna inačica s dijagonalnim stazama

5.2. Inačica s četiri četvorine na mlinovnici

U njoj se mlinovnicu dopunjuje četvrtom najvećom četvorinom, a zaliha kamečaka svakog igrača povećava se na *dvanaest*. Osim običnog „analog” mlina na stranici s tri kamečka, sada postoji mogućnost ostvarivanja „velikog” mlina *na središnjici s četiri kamečka*, a igrač koji ga napravi može izbaciti s mlinovnice ne samo jedan nego *dva protivnička kamečka* koji nisu u mlinu. Ako to ne učini odmah, gubi to pravo.

5.3. Inačica s četiri četvorine i dijagonalnim stazama na mlinovnici

Tijek igre određen je pravilima kao za prethodnu inačicu, jedino što još postoji i mogućnost ostvarivanja *dijagonalnog mlina s četiri kamečka na dijagonali* te, u tom slučaju, mogućnost izbacivanja, kao i prethodno, dvaju protivničkih kamečaka koji nisu u mlinu.

6. Studijske inačice

Navedimo još dvije studijske „sužene” inačice s manjim brojem četvorina na mlinovnici i s manjim brojem kamečaka u zalihi. One služe za vježbu i bolji uvid u srž mlinskih problema.

6.1. Ako mlinovnica ima samo *dvije četvorine*, tada zaliha svakog igrača treba imati samo šest kamečaka.

6.2. Ako mlinovnica ima samo *jednu četvorinu*, tada zaliha svakog igrača treba imati samo *tri kamečka*.

U oba slučaja, napravi li igrač stranični mlin, *može izbaciti*, pod uvjetom kao i do sada, protivnički kamečak s mlinovnice.

7. Studijski primjeri i zadatci

7.1. Neke brojčane značajke mlinovnica

- a) ZADATAK. Koliko ima ležišta, a koliko staza mlinovnica s četiri četvorine?
- b) ZADATAK. Označi ležišta mlinovnice s četiri četvorine (slovima i brojkama).
- c) ZADATAK. Ispuni i provjeri Tablicu 1, gdje je n broj četvorina na mlinovnici, $L(n)$ broj ležišta i $K(n)$ broj bijelih i crnih kamečaka zajedno u zalih i početku igre.
- d) Ako bi se brojevi u 2. i 3. stupcu Tablice 1 vladali po zakonu aritmetičkog niza i za $n > 4$, tada bi u 4. stupcu u svakom retku stajao broj 6,25%.

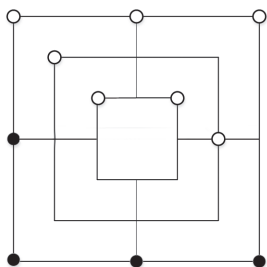
n	L	K	$(L - K) / L$
1			6,25%
2			6,25%
3			6,25%
4			6,25%

studijske inačice {
osnovna igra
osnovna inačica

Tablica 1

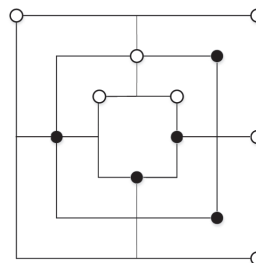
7.2. Strategije u konačnici

- a) ZADATAK. Na sl. 1.b zadana je postava na osnovnoj mlinovnici. Bijeli je igrač na potezu. Nastavi igru. Ima li bijeli igrač strategiju
 - a.a. pobjede? a.b. neodlučnog ishoda?
- b) PRIMJER. Na sl. 3. zadana je postava na osnovnoj mlinovnici. U 3. koraku bijeli igrač ostvaruje pobjedu. Vidi slijed igre desno od slike.



Slika 3.

B
 1 $f4 \rightarrow f5$
 2 $d7 \rightarrow d6$
 3 $d6 \rightarrow d7$ ili $d5$!

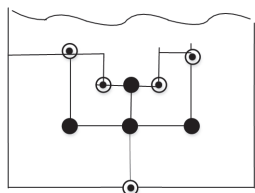


Slika 4.

- c) ZADATAK. Na sl. 4. zadana je postava na osnovnoj mlinovnici. Bijeli pobjeđuje u 3. koraku. Kako?

7.3. Pat postave

- a) PRIMJER. Na sl. 5. predočena je pat-postava na osnovnoj mlinovnici, načinjena bijelim igračem. Desno je ta postava označena slovima i brojkama.



B: $d1, c3, e3, b4, f4$
C: $b2, d2, f2, c3$

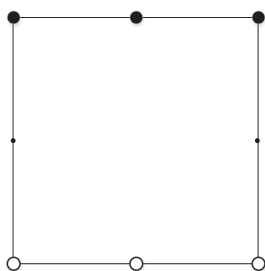
Slika 5.

- b) ZADATAK. Postoji li pat-postava načinjena bijelim igračem sa samo četiri bijela kamečka na osnovnoj mlinovnici?

7.4. Nepravilne postave

Za samu igru prihvatljivije je šire značenje izbacivanja određeno u 3.1, ali za studijske primjere i zadatke, posebice u ovom paragrafu, prihvatit ćemo *uže značenje izbacivanja* po kojemu igrač, kada napravi mlin, mora izbaciti po volji odabrani protivnički kamečak pod istim uvjetom da taj kamečak nije u mlinu, ako takav postoji, a inače se igra nastavlja bez izbacivanja u svom koraku.

- a) PRIMJER. Na sl. 6. ucrtana je nepravilna postava na mlinovnici samo s jednom četvoriном. Desno je ta postava označena slovima i brojkama.

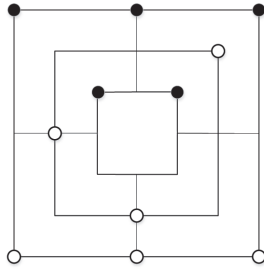


B: $a1, b1, c1$
C: $a3, b3, c3$

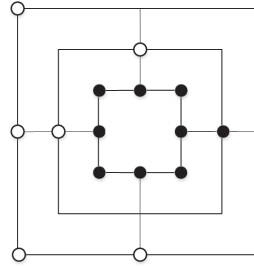
Slika 6.

Ako je u tijeku igre u nekom koraku bijeli igrač prvi napravio mlin, dok ga crni igrač još nema, bijeli igrač izbacuje jedan crni kamečak. Zato crni igrač ne može imati svoja tri kamečka na mlinovnici. Na isti se način zaključuje ako crni igrač prvi napravi mlin.

- b) ZADATAK. Na sl. 7. ucrtana je postava na osnovnoj mlinovnici. Je li ona pravilna?
c) ZADATAK. Je li postava (B, C) ucrtana na osnovnoj mlinovnici na sl. 8. nepravilna?



Slika 7.



B: a1, d1, a4, b4, d6, a7

C: c3, d3, e3, c4, e4, f4, c5, d5, e5

Slika 8.

Pogovor

Igre su poznate od davnine i dio su obiteljskog i opće društvenog života svakog plemenskog i visoko civiliziranog naroda. Vrlo rano igre postaju dio robno-novčanog gospodarstva i kao takve ostaju do danas.

Igre proučavaju povjesničari igara i drugi znanstvenici s obzirom na njihovo podrijetlo, razvoj, međusobni utjecaj jedne igre na drugu i usporedbu jedne igre s drugom, a posebice ih proučavaju pedagozi, psiholozi, sociolozi i metodičari nastave i odgoja, matematičari i filozofi, a igrama se također bave državne financije i privatna poduzeća, te sportske udruge sve do međunarodne organizacije olimpijskih igara.

Spomenimo da matematičari već imaju izgrađenu opću teoriju igara koja se primjenjuje u vojnoj strategiji obrane i napada, te gospodarstvu države i velikih gospodarskih sustava u tzv. makroekonomiji.

Spomenimo ipak još i to da neki logičari žele izravno, bez poziva na upitne i nejasne pretpostavke, zasnovati logiku na ideji igre tako da logika bude oslobođena od sadašnje neuklonjive mane neizravnog i kružnog zasnivanja – treba samo gledati kako drugi neku (logičku ili drugu) igru igraju, treba vježbati igrati igru, učiti iz igranja, te konačno naučiti (moguće uz neznatnu pomoć) i zapamtiti, a zatim i poučiti druge tu igru.

Ima mnogo različitih pojedinačnih, posebnih i općih igara: sportske igre, političke, ratne, kartaške, kockarske, na pločama raznih izvedbi i s kamečcima itd. Gotovo *ad infinitum*. Neki mislioci smatraju da matematika nije samo *osnovna znanost* nego je i *umjetnost* i *igra*, i to VELIKA IGRA.

Smatram da je osnovna podjela igara na pametne i glupe. Dakako, ta podjela nije stroga jer ima i djelomično pametnih igara, dok potpuno glupih nema jer bi to proturječilo pojmu igre.

Pametne su sve one igre koje omogućavaju igračima da djelotvorno i učinkovito, duševno ili tjelesno, doprinesu pobjedi ili da se barem odbrane od poraza. Postoji stupnjevanje igara na visoko pametne i značajne u svakom pogledu, na sve manje i manje pametne i značajne, sve lakše i lakše, i tako dalje, tome nema kraja.

ŠAH I NOGOMET dvije su vrhunske igre; prva pojedinačnog (individualnog) uvježbanog i visoko organiziranog uma, a druga zajedničkog (kolektivnog) događanja. Mlin je po mnogočemu sličan šahu, iako je njegov opis jednostavniji.

Svaka igra zahtijeva točan i potpun opis potrepština i pravila igre koja upravljaju igrom na unaprijed zadan mogući način. Iskustvena je činjenica da mnogi takvi pisani materijali o pravilima igre nisu dovoljni da se u svakoj prilici zna kako se može igrati u nastavku. Zato je poučno za opću nastavu i metodiku matematike i pismenosti barem jedanput riješiti sljedeći zadatak.

ZADATAK. Pokušaj točno opisati način kako se igra jedna tebi poznata lakša igra tako da opis svatko može razumjeti i igru zaigrati bez dodatnih obavijesti izvan tvog opisa.

PRIMJEDBA. U Piatnikovoj brošuri „50 igara” u točki 11. spominje se inačica pod nazivom „ugaoni mlin”. To je bliža izvedba opisane inačice s dijagonalnim stazama, samo bez svih strana ili s mogućnošću vršnih mlinova. Smatram da ta inačica gubi osnovnu ideju mlinovnice.

Inačica opisana u točki 10., zvana „mlin s kockom”, industrijska je zloraba izvorne ideje mlina.

Jedino se u točki 12. spominje i opisuje vrlo zanimljiva igra „hajka”. Igra se na standardnoj mlinovnici, dok su cilj i pravila igre različiti od mlina.