Poučavanje matematike u osnovnoj školi u svjetlu suvremenih istraživanja

Tatjana Hodnik Čadež[1]

Sažetak

U ovom ćemo se članku usredotočiti na odabrane teme iz metodike nastave matematike, opisat ćemo vezu između razumijevanja matematike i prijelaza između različitih reprezentacija matematičkih pojmova, istaknuti različite uloge matematičkih reprezentacija, kao i ulogu učitelja kao istraživača i pokretača promjena u poučavanju i učenju matematike. Čitatelju želimo poručiti da smo svjesni da je izbor suvremenih metoda subjektivan i da ne uključuje sve; pri odabiru smo se vodili aktualnošću njihovih rezultata u poučavanju matematike na našim prostorima.

U matematici je prikazivanje apstraktnih matematičkih pojmova najvažnije. Razlikujemo unutarnje (mentalne slike) i vanjske reprezentacije (okolina). Vanjske su reprezentacije sastavljene od strukturiranih simboličkih elemenata čija je uloga *vanjski, vidljivi* prikaz određene matematičke „stvarnosti". U poučavanju matematike uglavnom koristimo konkretne i grafičke reprezentacije, reprezentacije matematičkim simbolima, a u novije vrijeme naročito ICT reprezentacije. Razumijevanje matematičkog koncepta kod učenika definiramo kao mogućnost prijelaza između različitih vanjskih reprezentacija. U ovom ćemo radu pokazati da je poticanje uspostavljanja veza između različitih reprezentacija matematičkih ideja važnije od prelaženja od „konkretnog prema apstraktnome". Na kraju članka očekujemo da će učitelji preispitati svoju ulogu u uvođenju promjena u nastavi matematike.

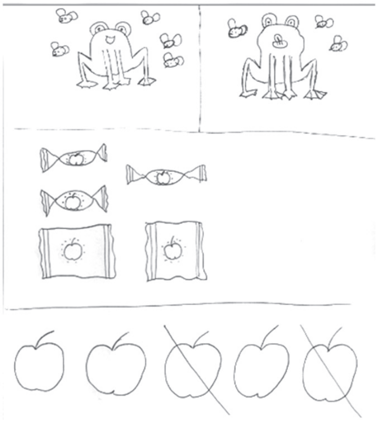
Ključne riječi: reprezentacija: konkretna, grafička, simbolična, matematički pojam, prijelaz između reprezentacija, učitelj – istraživač

1. Reprezentacije u matematici

Reprezentacija je prije svega nešto što stoji umjesto nečega drugog. Za svaku reprezentaciju moramo definirati: (1) reprezentirajući svijet (svijet kojim reprezentiramo) (2) svijet koji reprezentirajući svijet prikazuje, (3) koji su aspekti reprezenti-

[1]Tatjana Hodnik Čadež, Pedagoški fakultet, Sveučilište u Ljubljani

rani, (4) koji aspekti reprezentirajućeg svijeta reprezentiraju i (5) povezanost između svijeta koji se reprezentira i reprezentirajućeg svijeta (Palmer, 1978).



Slika 1. Grafički prikazi računa 5 – 2 = 3

Gornje reprezentacije oduzimanja (slika 1) prikazuju račun oduzimanja 5 – 2 = 3 (moguće su i druge interpretacije, unatoč činjenici da smo uzeli primjere najčešćih reprezentacija oduzimanja do 10 na početku školovanja). Oduzimanje se jednostavno može prikazati na najmanje tri različita načina: prikažemo početno i završno stanje – dvije reprezentacije (prikaz sa žabama na gornjoj slici), konačno stanje – jedna reprezentacija (prikaz s bombonima), početno i završno stanje – jedna reprezentacija (prikaz s jabukama). Za učenika koji prevodi ovaj grafički prikaz vrlo je važno da zna uspostaviti odnose unutar samog grafičkog prikaza i moguće konkretne situacije koja je grafički prikazana. Zadnja reprezentacija na slici 1 (operacija oduzimanja prikazana precrtavanjem objekata) najčešće se koristi u matematici. Za učenika je složena jer on često nije u stanju uspostaviti vezu između precrtavanja objekata i oduzimanja. Često je pogrešno zapisan račun za tu situaciju 3 – 2 jer učenik ne zna povezati konkretnu i grafičku reprezentaciju i nije svjestan da grafička reprezentacija daje rezultat računanja. Kako bi izgledao, na primjer, račun u situaciji gdje je od pet jabuka precrtano njih četiri ako učenik ne zna na matematički način osmisliti reprezentaciju?

Poučavanje matematike koje se temelji na istraživanju različitih reprezentacija određenog matematičkog pojma i potiče učenike da glatko i fleksibilno prelaze iz jedne reprezentacije u drugu učinkovitije je i omogućuje učenicima bolje razumijevanje matematičkih pojmova nego nastava koja to ne omogućava (Duval, 2002.; Griffin Case, 1997.; Kaput, 1989.; Bieda, Nathan, 2009.; Heinze i dr., 2009.). Novija istraživanja pokazuju da je od nizanja reprezentacija (Bruner 1966.): prvo akcijska, zatim slikovna i na kraju simbolična, važnije povezivanje između reprezentacija određenog matematičkog pojma (Chapman, 2010.). U procesu prijelaza između reprezentacija konkretna je reprezentacija „baza", a apstraktna reprezentacija cilj. U procesu uspostavljanja relacija između njih od učenika se očekuje da otkrije sličnost struktura obiju reprezentacija. Relacija između njih najčešće je skrivena (Ding, Li, 2014.). Otkriti relaciju ključno je za učenje matematike s razumijevanjem.

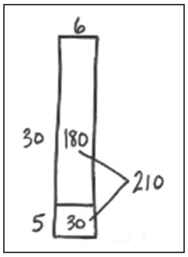
Izložimo dva ključna kriterija za uspostavljanje relacija između reprezentacija:

1. reprezentaciju odabranog pojma treba temeljiti na „strukturnoj sličnosti";
2. u nastavi je potrebno osigurati odgovarajući (postupni) proces uspostavljanja veza između tih reprezentacija (postupno smanjivanje „konkretnoga").

Prvi kriterij znači da za odabrani pojam moramo birati takve reprezentacije kod kojih postoje relacije, odnosno lako se mogu uspostaviti. Drugi kriterij naglašava ulogu učitelja koji mora potaknuti učenike na osmišljavanje tih veza. Prilično velik izazov u ovom području na našim prostorima predstavlja računanje: od učenika očekujemo spretno baratanje simboličkim i konkretnim računom, čak i na grafičkoj razini, a veze između reprezentacija nisu očite ili se ne podržavaju. Postupak s konkretnim računom u većini slučajeva ne podupire postupak sa simboličkim računom, iako su oba prisutna, npr. objašnjavanju učitelja (uglavnom zbog didaktičkog naputka od „konkretnoga prema apstraktnome", a ne zbog potrebe povezivanja reprezentacija). O tome će više biti napisano u nastavku.

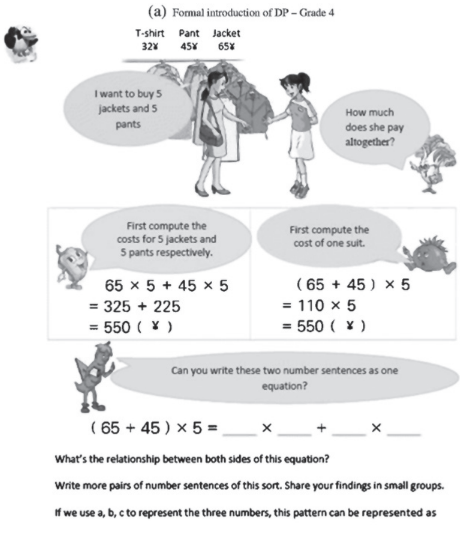
Izbor reprezentacije ne ovisi samo o matematičkom kontekstu, nego i o pojedincu koji rješava određeni matematički zadatak ili problem (Nistal i dr., 2009.). Studija Bieda i Nathan (2009.) pokazuje da je fluentno korištenje reprezentacija – spretna uporaba pojedinih reprezentacija i prijelazi između reprezentacija kada je to potrebno, učinkovitije od fokusiranja na reprezentaciju koja nema utemeljene veze s matematičkim pojmom.

Pogledajmo primjere povezivanja reprezentacija zakona distribucije navedene u nekim istraživanjima. U kontekstu realistične matematike (RME), specifičnom didaktičkom pristupu koji se temelji na učenikovom aktivnom povezivanju matematičkih ideja, a razvijen je u Nizozemskoj, već su predstavljene brojne ideje za poučavanje matematike; uspostava veza između reprezentacija važnija je od vrste reprezentacije. Fosnot i Dolk (2001.) su, na primjer, predstavili uvođenje zakona distribucije kroz takozvane „mini jedinice" („mini lessons"), gdje učitelj pravilnim redoslijedom zadataka potiče željeni način razmišljanja kod učenika. Jedan od primjera uvođenja zakona distribucije je slijed računa: 5×6, 30×6, 35×6; 2×7, 40×7, 42×7... gdje učitelj potiče učenike da pronađu veze među rezultatima. Sljedeća mogućnost uvođenja ovog zakona je razmišljanje o površini pravokutnika koja može biti zbroj površina dvaju manjih odgovarajućih pravokutnika (slika 2). Ovi autori ne predlažu konkretnu ilustraciju zakona, već pretpostavljaju da učenici imaju razvijene numeričke prikaze i da konkretna slika odabranog algebarskog zakona može biti vrlo složena i učenicima ne pomaže u razumijevanju samoga pojma.



Slika 2. 35 × 6 = 30 × 6 + 5 × 6

Predstavimo još jedno veliko istraživanje o povezivanju reprezentacija zakona distribucije, koje su proveli Ding i Li (2014.). Njihov model predstavlja 319 različitih reprezentacija zakona distribucije (uključuje tekstualne zadatke, grafičke i simboličke reprezentacije) koje se koriste u različitim udžbenicima u Kini. Osnovno je istraživačko pitanje bilo koje reprezentacije potiču prijelaz od konkretnih (pojam konkretna reprezentacija autorima predstavlja reprezentaciju koja nije simbolička) na apstraktne? Donja slika (Slika 3) prikazuje jedan od slučajeva u kojima se uspostavlja veza između grafičke reprezentacije (koja je povezana sa situacijom koja se obično ne događa u svakodnevnom životu) i simboličke reprezentacije (simbolički zapis zakona distribucije).



Slika 3. Prikaz uvođenja zakona distribucije (Ding, Li, 2014).

Rezultati istraživanja Ding, Li (2014.) su sljedeći:

- Zaključili su da je potrebno razmisliti o značenju zadataka s tekstom, odnosno o njihovoj ulozi u poučavanju. Ako su smisleni, pomažu učenicima pri usvajanju apstraktnih matematičkih ideja (Gerofsky, 2009.; Palm 2008. u Ding, Li, 2014.). Učenici mogu situaciju zapisanu tekstom prevesti u reprezentaciju iz koje lako izvode određene zakonitosti.

- Posebnu ulogu u razumijevanju ideje imaju oni zadatci s tekstom kojima se izravno cilja matematička ideja, bez nepotrebnih odnosno suvišnih uvjeta u zadatku koji bi učenike mogli dovesti u tzv. kognitivne probleme.
- Autori istraživanja zaključili su i da je kod uvođenja algebarskih zakona važno uspoređivanje rezultata koji su u danom primjeru dobiveni na razne načine, jer to uspoređivanje predstavlja pomoć u „reprezentacijskoj tranziciji". U gornjem primjeru (Slika 3) treba uočiti da je na dva različita načina računanja dobiven isti rezultat (u oba slučaja rezultat je 550, što znači da možemo izjednačiti i postupak računanja za ovaj slučaj i tako pokazati zakon računanja).

2. Uloga reprezentacije u nastavi matematike

Reprezentacije matematičkih pojmova igraju ključnu ulogu u matematičkom obrazovanju. Chapman (2010.) je te uloge definirao na sljedeći način:

- kao način razmišljanja (interpretacija reprezentiranoga),
- kao način zapisivanja, predstavljanja ideja (reprezentacija razmišljanja),
- kao sredstvo komunikacije (npr. kod tumačenja).

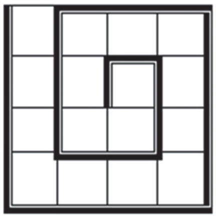
Ilustrirajmo svaku od uloga odgovarajućim primjerom.

1. Reprezentacija kao način razmišljanja

Reprezentaciju kao način razmišljanja, odnosno interpretaciju reprezentiranoga definiramo kao unutarnju reprezentaciju, kao unutarnji svijet iskustva. Unutarnje reprezentacije, poznate kao kognitivne reprezentacije (Palmer, 1978.), shvaćamo kao mentalne slike koje se obično temelje na vanjskim reprezentacijama. Kognitivni razvoj temelji se na dinamičnom procesu ispreplitanja mentalnih slika i okoline (Karmiloff-Smith, 1992.). O učinkovitosti (u smislu razumijevanja matematičkih pojmova) učenikovih unutarnjih reprezentacija možemo zaključiti na temelju njegova baratanja vanjskim reprezentacijama kojima pokazuje napredovanje u razumijevanju matematičkih pojmova.

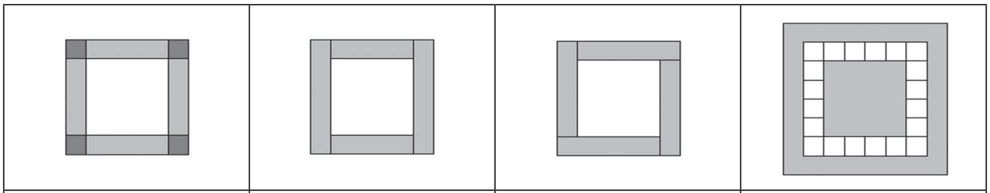
2. Reprezentacija kao način predstavljanja ideja

Reprezentaciju kao način predstavljanja ideja prikazat ćemo na primjeru rješavanja problema „Spirala" i „Popločavanje oko bazena" (Hodnik Čadež, Manfreda Kolar, 2013.). U problemu „Spirala" učenike smo pitali koliko je dugačka linija koja tvori spiralu u određenoj kvadratnoj mreži kao na slici 4, na primjer u mreži dimenzija 4×4.



Slika 4. Problem "Spirala"

Zatim smo im ponudili izazov da pokušaju naći formulu za duljinu linije u općenitom slučaju, u mreži dimenzije $n \times n$. Detaljni rezultati i primjeri reprezentacije njihovih ideja prikazani su u radu Hodnik Čadež, Manfreda Kolar (2013.); mi ćemo ovdje dati samo nekoliko generalizacija koje su učenici osnovne škole prikazali simbolima: $(n + 1)^2 - 1$; $n(n + 2)$; $n^2 + 2n$; $3n + 2(n - 1) - 2(n - 2) \ldots + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1$; $4n + n(n - 2)$. Iz tih zapisa možemo zaključiti da su neki učenici razmišljali o spirali i duljinu generalizirali proučavajući duljine spirala u svakom pojedinom kvadratu (npr. zapis $3n + 2(n - 1) - 2(n - 2) \ldots + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1$), dok su drugi ispisivali duljine pojedinih spirala i tražili zakonitosti među njima (npr. zapis $n(n + 2)$, jer je duljina spirale u 3×3 mreži jednaka 15, u 4×4 mreži je 24..., što je jednako 3×5, odnosno 4×6..., što dovodi do zapisane generalizacije). Drugi primjer reprezentacije razmišljanja pokazat ćemo na primjeru „Popločavanje oko bazena" u kojoj su učenici određivali kako popločiti područje oko proizvoljnog pravokutnika dimenzija $n \times m$. Opet ćemo pokazati nekoliko primjera razmišljanja učenika pri rješavanju problema; više o strategijama i proširenju problema dano je u gore spomenutom radu. Na slici 5. vidimo samo nekoliko primjera strategija popločavanja oko bazena kvadratnog oblika.



$4a + 4$	$2(a + 2) + 2a$	$4(a + 1)$	$(a + 2)^2 - a^2$

Slika 5. Različiti načini popločavanja oko bazena
(Hodnik Čadež, Manfreda Kolar, 2013.)

Možemo vidjeti da su učenici izabrali različite strategije, odnosno situaciju su proučavali s različitih gledišta. U zadnjem je slučaju generalizacija povezana s površinom iako se na prvi pogled radi o opsegu. Zanimljiva se rješenja pojavljuju kada je bazen u obliku kvadrata, a ne u obliku pravokutnika. Rješenja tako općenitoga problema predstavljena su u radu Hodnik Čadež, Manfreda Kolar (2013.) i u diplomskome radu Mojce Berus (2013.) koja je ovo istraživanje provela s učenicima petog razreda osnovne škole.

Naravno, učenici prilikom učenja matematike reprezentiraju svoje razmišljanje na različite načine: u radu s konkretnim materijalom, kod grafičkog prikazivanja ideja (npr. dijelova cjeline, šiljastog kuta, pravca...), kod objašnjavanja i tumačenja, simboličkog predstavljanja ideja.

Navedeni su primjeri odabrani kako bismo potaknuli učitelje da s učenicima istraže različite načine razmišljanja pri rješavanju matematičkih problema. Rješavanje problema posebno je zanimljivo za darovite učenike (Wieczerkowski, Cropley, Prado, 2002.; Zimmerman, 1992.). S druge strane, to je izazov za sve ostale. Učenik pri rješavanju problema pokazuje sposobnost povezivanja brojeva, pronalaženja zakonitosti, generalizacije, povezivanja različitih matematičkih pojmova... Prije svega to mu može predstavljati i zabavnu matematičku aktivnost pri kojoj nije opterećen s „točno – netočno” i ima mogućnost kreativnog izražavanja, objašnjavanja i diskutiranja o problemu i rješenju. Misaoni proces postaje transparentan kada je aktivnost pojačana verbalizacijom; aktivnost je pretvorena u misaoni proces i na taj način internalizirana, čime se pojačava učenikovo razmišljanje (ako učenik svoje baratanje vanjskom reprezentacijom mora glasno objašnjavati njegovo baratanje reprezentacijom postaje više usmjereno na matematički pojam) (Markovac, 1990.).

3. Reprezentacija kao sredstvo komunikacije

Uloga reprezentacije u objašnjavanju vrlo je opsežna jer praktički pokriva cijelo područje didaktike u nastavi matematike. Na ovom ćemo mjestu istaknuti one uloge u objašnjavanju na koje želimo upozoriti sa stajališta poučavanja matematike kod nas i potaknuti na razmišljanje o primjerenosti pojedinih interpretacija. Prvo nešto o konkretnom materijalu.

3.1 Konkretan materijal pri poučavanju

Konkretan materijal pri poučavanju matematike može biti strukturiran ili nestrukturiran. Najpriznatiji strukturirani konkretan materijal kod nas su tzv. Dienesove ploče, odnosno modeli stotica, desetica, jedinica. Uz njihovu se pomoć učenici poučavaju o dekadskom sustavu (naravno, mislimo i na sve moguće varijante Dienesovih ploča, kao što su povezivanje 10 slamki u snopove, nizanje 10 kuglica na nit...) i računskim operacijama. Istraživanja o uporabi tog materijala pri učenju aritmetičkih sadržaja nisu jedinstvena. Temeljena su na određivanju količine matematičkog znanja koje učenik mora imati da bi mu rad s tim modelima uopće bio koristan (Labinowicz, 1985.; Fuson, Briars 1990.; Thompson, 1992.; Resnick, Omanson, 1987.; Gravemeijer, 1991.). Na neki su način htjeli doznati je li korištenje određenih pomagala ili reprezentacija u matematici složenije od samoga pojma (ako situaciju malo karikiramo). Pri tome možemo primijetiti da su ova istraživanja provođena posljednjih 20 godina prošlog stoljeća; danas se uloga Dienesovih ploča u matematici ne istražuje tako često.

Resnick i Omanson (1987.) su na primjer otkrili da su studenti koji su uspješno baratali Dienesovim pločama bili neuspješni u pisanom zbrajanju. Također, učenici koji su pokazali najbolje rezultate u oduzimanju koristeći Dienesove ploče najlošije su rješavali zadatke pisanog oduzimanja. To bi se moglo objasniti činjenicom da između algoritma za pisano oduzimanje s prijelazom i baratanja Dienesovim pločama praktično nema nikakve korelacije. Pisani algoritam gdje računamo s prijelazom temelji se na pravilu razlike, dok kod računanja Dienesovim pločama dijelimo desetice na manje jedinice, da bismo oduzimanje uopće mogli prikazati (mogući su naravno i drugi načini – dopunjavanje umanjitelja do umanjenika, ako modelima prikažemo oba broja, što nije uobičajena strategija korištenja ovog materijala i ne potiče se u učionici).

Po pitanju uporabe Dienesovih ploča, a na temelju didaktičkih načela već spomenute realne matematike (RME), u Nizozemskoj su odlučili da na početku školovanja (najmanje prve tri godine) broj tretiraju kao cjelinu, a ne dijele na jedinice. Novija istraživanja (Anghileri, 2001.) pokazuju učinkovitost tzv. holističkog pristupa učenju o računskim algoritmima. Spomenuta znanstvenica ustanovila je da je učenicima primjerenije sagledavanje broja kao cjeline, a ne odvojeno po jedinicama. To bi kod operacije dijeljenja predstavljao pristup koji prikazujemo na primjeru dijeljenja 165 : 12. Učenik najprije zabilježi neke višekratnike broja 12 : 5 · 12 = 60, 10 · 12 = 100, 2 · 12 = 24...), a onda te višekratnike oduzima od djeljenika. Zapis takvog računanja jest sljedeći:

165 : 12 = 13	
-120	10
45	
-24	2
21	
-12	1
9 ost	

Ovo dijeljenje praktično ilustrira primjer dijeljenja u kojemu se pitamo o broju jednakobrojnih skupova. Vezu između konkretne i simboličke reprezentacije možemo pokazati i na primjeru dijeljenja u kojemu tražimo broj elemenata u jednakobrojnim skupovima:

72 : 3 = 24

20 + 20 + 20 = 60

4 + 4 + 4 = 12

(60 + 12 = 72)

3.2 Reprezentacije i mentalni napor

Baratanje s materijalom treba se odraziti na mentalnoj aktivnosti koja je potrebna za razumijevanje apstraktnoga matematičkog pojma. Ako vanjske reprezentacije ne predviđaju određeni mentalni napor, didaktički su neadekvatne; učenici trebaju koristiti didaktički materijal dok god im je to potrebno, odnosno tako dugo dok nisu u stanju riješiti zadatak bez uporabe tog materijala (Markovac, 1990.). Kada to postignu, konkretni materijal učenicima više nije potreban. Učenici obično neće sami odlučiti odbaciti konkretni materijal, tako da je uloga učitelja da potiče rješavanje problema bez upotrebe didaktičkog materijala i time provjerava učenikovu zrelosti za rad bez materijala. Ne treba inzistirati na tome ako učenik nije „zreo", odnosno ako mu korištenje konkretnog materijala omogućuje manipuliranje odabranim matematičkim pojmom, postupkom ili algoritmom. Didaktički materijal ima ulogu posrednika između ciljeva učenja i učenika koji te ciljeve treba postići. Jesu li učenici svjesni didaktičke vrijednosti materijala, koriste li ga na način koji se od njih očekuje, odnosno vodi li materijal do ostvarenja odabranih matematičkih ciljeva? To su ključna pitanja koja si učitelj treba postaviti prilikom odluke o korištenju materijala. Još važnije pitanje je na temelju čega učitelj donosi određenu odluku. Zato što tako piše u udžbenicima, zato što zna za istraživanja u tom području, zato što sam istražuje u razredu, na temelju vlastite prakse, rada s učenicima...? Prvi gore spomenuti razlog je najproblematičniji i, nažalost, prečest u tim odlukama.

3.3 Didaktička vrijednost interpretativnih prikaza

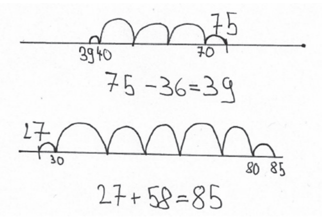
Kako procijeniti didaktičku vrijednost određenog materijala? Koristimo odabrane materijale tako da njihovu uporabu prilagođavamo našem poučavanju ili poučavanje prilagođavamo materijalu ili kombiniramo oboje. Istraživanje Hodnik Čadež, Manfreda Kolar (2010.) koje se bavilo ovim pitanjem pokazalo je sljedeće: većina učitelja (56.58 %, uzorak od 170 učitelja) slaže se s tvrdnjom da konkretni materijal nema utjecaja na njihov način poučavanja. Rezultati ovog istraživanja u skladu su s rezultatima istraživanja Gellert (2004.) koji je zaključio da učitelji prilagođavaju nastavni materijal svojemu načinu poučavanja pa potencijal materijala ostane neiskorišten, npr. za rješavanje problema. Geoploča je jedan takav materijal koji sam po sebi nudi oblikovanje različitih likova, ali ga se može upotrijebiti na mnogo više znatno različitih načina. Nabrojit ćemo samo neke od mogućih problemskih situacija na geoploči: traženje nesukladnih trokuta na 3×3 geoploči, traženje svih kvadrata na 3×3, 4×4... geoploči, formiranje simetričnih likova (os simetrije koju na geoploči označimo elastičnom trakom može biti horizontalna, vertikalna, kosa), dijelovi cjeline (jedan učenik trakom označi četvrtinu, drugi učenik cjelinu i obratno...), traženje odnosa površina, broj točaka na stranici lika i unutrašnjosti lika (Pickov teorem) za darovite učenike petog razreda i učenike viših razreda. Isto tako možemo razmišljati o Link kockama, o modelima geometrijskih tijela i ostalim didaktičkim materijalima – u pogledu njihove mogućnosti korištenja, kako ih na različite načine uključiti u naše poučavanje, pri čemu samo mijenjamo oblik reprezentacije određenog matematičkog pojma (npr. brojeve prikazujemo Link kockama umjesto kamenčićima), a ne iskorištavamo potencijal materijala.

3.4 Podupire li aktivnost tumačenja s vanjskom reprezentacijom mentalnu aktivnost?

Ključno pitanje koje si je postavio Gravemeijer (1991.) u svome istraživanju je: Podudara li se fizička aktivnost s materijalom s mentalnom aktivnošću? Pogledajmo primjer računanja na brojevnom pravcu koji učenicima predstavlja znatnu poteškoću. S jedne strane broj je predstavljen kao točka na pravcu, a s druge strane, broj predstavlja broj koraka po brojevnome pravcu – „jedan" na brojevnom pravcu odgovara razmaku između dva uzastopna prirodna broja, odnosno predstavlja korak i nema veze s brojem 1, koji se pojavljuje na brojevnom pravcu.

Učenik pri računanju na primjer 5 + 3 pomoću brojevnog pravca počinje kod broja 5, broji „jedan, dva, tri" od broja 5 i završava na broju 8, što je traženi rezultat. Ova se metoda računanja razlikuje od računanja u glavi; učenik obično računa tako da broji od 5 nadalje, „šest, sedam, osam". Učenik koji može računati na ovaj drugi način očito ne treba brojevni pravac za računanje npr. zbrojeva do 10. Naravno, moguće je koristiti brojevni pravac na način koji podržava misaoni proces pri računanju. To je „prazni brojevni pravac" koji omogućuje preslikavanje misaonog procesa računanja na prazan brojevni pravac koji u ovom slučaju služi kao potpora računu – vizualizacija i misaoni proces se nadopunjuju.

„Prazni brojevni pravac" u Nizozemskoj su razvili kao odgovor na iskustva učitelja koja su pokazala da učenici predugo koriste konkretan materijal kao što su Linke kocke, Dienesove ploče i reprezentacije na brojevnom pravcu, odnosno da su pri računanju nekako pasivni; samo očitavaju rezultate koje nude reprezentacije. „Prazan brojevni pravac" omogućuje učenicima slobodno kretanje po pravcu, predstavljanje brojeva na vlastiti način i razvoj vlastite strategije računanja (Anghileri, 2001.).



Slika 6. „Prazan brojevni pravac" (primjeri računa učenika osnovne škole Jaroša)

Pri računanju do 100 s pomoću kvadrata 10 × 10 (tablice množenja) nastaje slična situacija: pomagalo ne podupire proces računanja koji bi učenik trebao provesti bez uporabe toga pomagala. Učenik nauči koristiti kvadrat 10 × 10 tako da se prilikom zbrajanja i oduzimanja kreće po njemu. Kvadrat 10 × 10 primjerena je ilustracija brojeva do 100, njihovog položaja u odabranom stupcu, redu, kao pomoć pri brojenju, ali sigurno ne za računanje do 100. Pored konkretnih zornih prikaza osobito je koristan brojevni pravac, gdje zbrajanje znači pomak udesno, a oduzimanje pomak ulijevo.

3.5 Prikazuje li reprezentacija ono što vidim?

Što grafička reprezentacija uopće prikazuje? Prikazuje li ono što vidimo (npr. pravi kut u trokutu) ili to može biti bilo koji kut. U kojem slučaju možemo reprezentaciji potpuno vjerovati, u kojem nam slučaju služi samo kao pomoć za nešto što na slici nije moguće neposredno prepoznati? Važno je usvojiti odnosno odrediti pravila grafičkog prikaza matematičkih ideja s obzirom na matematički sadržaj i poticati raspravu s učenicima u kojima dolazi do različitih tumačenja. Na primjer, površinu stola koja ima oblik pravokutnika grafički prikazujemo kao pravokutnik, a ne paralelogram kao u kosoj projekciji. Neka su pravila za interpretacije grafičkih reprezentacija u nastavi besmislena. U prvome je razredu posve nebitno kako učenik tumači sliku na kojoj su s lijeva na desno nacrtane 3 crvene i 2 zelene jabuke; potpuno je svejedno je li zapis 3 + 2 = 5 ili 2 + 3 = 5. Inzistiranje na jedinom zapisu koji „odgovara" slici je besmisleno. To je besmisleno iz dva razloga: prvo jer interpretacija nacrtanih jabuka ne mora nužno ići s lijeva na desno, a drugo jer se u prvome razredu uči i zakon o zamjeni pribrojnika. Važno je razmišljati o tome gdje ćemo dopustiti fleksibilnost i pri tome ostati u području matematičke korektnosti, a kada to više neće biti slučaj ako je interpretacija proizvoljna.

3.6 Grafičke reprezentacije kao most između konkretnih reprezentacija i simbola

Već smo prije spomenuli da su prijelazi između reprezentacija nužan uvjet za učenje s razumijevanjem. Heedens (1986.) dijeli grafičke reprezentacije na polukonkretne i poluapstraktne. Važno je biti svjestan da su neke grafičke reprezentacije bliže iskustvenom svijeta učenika, a druge su bliže simboličkom. Učeniku je mnogo lakše povezati konkretnu reprezentaciju s grafičkom ako se služi modelima koji su kasnije i nacrtani, a određenu operaciju prikaže još i grafički. Ovdje je potrebno napomenuti da je u puno različitih udžbenika u kojima prevladavaju grafičke reprezentacije mnogo nestručnosti, odnosno pogrešaka koje ćemo istaknuti na drugome mjestu. Sigurni smo da je učitelj kao stručnjak sposoban procijeniti didaktičku i stručnu prikladnost ponuđenih grafičkih prikaza matematičkih ideja.

3.7 Matematički simboli

Učenici u prvim godinama školovanja upoznaju znamenke od 0 do 9, znakove za operacije (+, –, :, ·) i simbole za relacije (<, >, =). Broj znakova je mali, ali postoji beskonačan broj kombinacija simbola i pravila koji učenicima uzrokuju puno poteškoća u služenju matematičkim simbolima. U procesu ranog učenja matematike manipulacija simbolima usko je povezana s konkretnim i grafičkim reprezentacijama. Hiebert (1988.) definira matematičke simbole kao reprezentacijski sustav; definira pet razina koje učenik treba svladati da bi se mogao uspješno služiti simbolima. Navest ćemo samo prvu razinu, „osiguravanje odnosa među simbolima i referencama za simbole". To znači da u procesu učenja i poučavanja učenicima moramo omogućiti služenje konkretnim i grafičkim materijalom te uspostaviti odnose između tih reprezentacija i simbola (simbol + tako se poveže s operacijom udruživanja objekata, kako konkretno tako i grafički prikazanih). Uspostavljanje odnosa nije jednostavno jer za svaki simbol u matematici ne postoji samo jedna veza „simbol – referenca za simbol". Uzmimo na primjer matematički simbol za znak jednakosti. Problemi s razumijevanjem jednakosti na različitim stupnjevima obrazovanja navedeni su u različitim studijama (npr Knuth i dr., 2006.; McNeil, Alibali, 2005.). One potvrđuju da su poteškoće u razumijevanju jednakosti povezane s iskustvima učenika na početku školovanja. Simbol za jednakost učenicima se na početku školovanja pokazuje kao relacijski simbol (npr. već u prvom razredu uspoređuju brojeve po veličini), ali ga učenici u aritmetičkim operacijama, koje dolaze nakon korištenja jednakosti kao relacije, shvaćaju kao znak za operaciju koja znači „je rezultat" (Cross i dr., 2009.). To je s jedne strane i logično jer kod demonstracije primjerice zbrajanja učenici udružuju dva skupa elemenata i dobivaju novi, veći skup, što implicira da provedba procesa udruživanja rezultira većim skupom, odnosno da udruživanje izjednačavamo s oznakom „+", a rezultat s oznakom „=" (i jezik koji koristimo izravno dovodi do neke vrste razumijevanja simbola). Problem krivoga odnosno neadekvatnog razumijevanja jednakosti najočitiji je u situacijama kada učenici traže zbroj koji je kao nepoznanica zapisan na lijevoj strani jednakosti. S druge strane, ideja jednakosti u matematici tako je složena da je gotovo nemoguće očekivati od prvašića da jednakost shvate kao podudarnost lijeve i desne strane. Kod rješavanja jednadžbi jednakost dobiva za učenike novo značenje. Razumijevanje jednakosti provjerili smo kod djece predškolske dobi u našem istraživanju u koje je bilo uključeno 172 djece, 85 djevojčica i 87 dječaka, u dobi od 5 do 6 godina (Hodnik Čadež, Mastnak, Manfreda Kolar, 2014.). Djeci su odgajateljice postavile problem s vagom tako da su pitale (na za njih primjeren način i s dovoljno prethodnog iskustva rukovanja vagom) što moraju učiniti da vaga bude u ravnoteži ako je s jedne strane 6, a s druge strane 4 kuglice (sve jednake težine). Rješenja koja su djeca dala bila su iznenađujuća jer su djeca koja su uspješno riješila problem koristila strategiju prebacivanja jedne kuglice iz posude sa šest kuglica u posudu s četiri kuglice. Ovu smo strategiju nazvali „uvid, + i –". Slijedilo je dodavanje dviju kuglica u posudu s četiri kuglice („uvid, +"), zatim uzimanje dviju kuglica iz posude sa šest kuglica („uvid, –") (Tablica 1). Između ostaloga, pokazalo se da vaga omogućava djeci da dodavanjem i oduzimanjem kuglica (dinamička operacija) stvore situaciju jednakosti među brojevima. Na neki način djeca tako mogu lako povezati značenje jednakosti kao operacije sa značenjem jednakosti kao relacije. Vaga im daje trenutačnu povratnu informaciju o jednakosti, odnosno potiče ih da ustraju u traženju jednakosti (Hodnik Čadež, Mastnak, Manfreda Kolar, 2014.).

Strategija	Frekvencija [*f*]	Postotak [*f* %]
Uvid, + i –	42	24
Uvid, +	29	17
Uvid, –	24	14
Koraci, + i –	34	20
Koraci, +	27	16
Koraci, –	11	6
Ostalo	4	2
Bez odgovora	1	1
Ukupno	172	100.0

Tablica 1. Strategije traženja jednakosti uz pomoć vage kod djece predškolske dobi (Hodnik Čadež, Mastnak, Manfreda Kolar, 2014.).

Posebno mjesto u geometriji imaju simboli. S njima se učenici sreću u prve dvije-tri godine osnovne škole. Neki simboli u uskoj su vezi s matematičkom idejom koju predstavljaju (sličnog su izgleda), na primjer simbol za paralelnost, okomitost, kut..., a kod nekih te neposredne veze s referencom, odnosno grafičkim prikazom nema. Tu spadaju oznaka za presjek, vrh, oznaka za pravac, polupravac... Pri promatranju jedne situacije u razredu bilo je moguće utvrditi kako učenici mogu razumjeti vezu između istih simbola u različitim ulogama: slova abecede i slova koja označuju vrhove. Neki učenici došli su do zaključka da može biti najviše 25 presjeka pravaca, baš kao i slova abecede (učiteljica je naime istaknula da ako na slici ima više sjecišta, onda ih označimo različitim slovima abecede). Možemo uočiti da je učenicima teško koristiti iste simbole za različite ideje (referentni svijet za velika slova u matematici posve je drukčiji nego kod jezika).

4. Zaključak

Primarna svrha ovoga rada je poticanje učitelja na promišljanje o predstavljanju matematičkih ideja i ulozi učenika u tome procesu. Kao što su neka istraživanja pokazala, poučavanje matematike kod učitelja češće proizlazi iz udžbenika i drugih materijala, nego iz znanja matematike i vlastitog matematičkog obrazovanja (Brown, Borko, 1992.). Stoga nam se čini jako važnim problematizirati školsku matematiku na način da se pomogne učiteljima da promisle o svojim matematičko-didaktičkim spoznajama i o osnovama na kojima se temelji njihovo poučavanje (Llinares, Krainer 2006.; Herbel-Eisenmann, Phillips 2008.; Feiman-Nemser, Buchman, 1985.). U ovome smo radu nabrojili neke ključne aspekte nastave matematike o kojima vrijedi promisliti i kritički vrednovati svoje odluke u organizaciji i izvođenju nastave matematike. Učiteljeva refleksija rada u razredu nužna je komponenta učenja i poučavanja, što vodi do kvalitativnih promjena stavova i znanja o poučavanju i učenju (Llinares, Krainer, 2006.).

Refleksija našega rada je, kao što znamo, po kvaliteti vrlo različita. Dimenzija pojma kvalitete je ogromna: od razmišljanja o dojmovima o izvođenju nastave (što se praktički ne može nazvati refleksijom), do reflektiranja na temelju istraživanja učitelja. Uloga učitelja kao istraživača u nekim je obrazovnim sustavima jako naglašena (npr. u Finskoj, Jakku Sihvonen, Niemi, 2006.) jer učitelj istraživanjem može dobiti uvid u svoje poučavanje i učenikovo razumijevanje na temelju empirijskih podataka, što mu omogućava suvereno zastupanje svojih gledišta u pogledu učenja i poučavanja, kompetentno sudjelovanje u raznim stručnim raspravama, te je aktivni sudionik promjena za višu kvalitetu nastave (matematike). Prema takvom tipu učitelja usmjeren je magistarski studijski program na Pedagoškom fakultetu Sveučilišta u Ljubljani (koji je u slovenskom prostoru nastao kao rezultat reformi – jedna od njih svakako je bolonjski proces) za obrazovanje učitelja koji među kompetencijama jasno definira ulogu učitelja kao istraživača. Težimo promjenama i u stalnoj smo potrazi za boljim načinima poučavanja u školi koji će se prvenstveno temeljiti na učitelju, razmišljajućem praktičaru, osobi koja će voditi nastavu tako da učenici postižu najviše, kako u pogledu osobnog razvoja i rasta, tako i u području znanja.

Literatura

1. Anghileri, J. (2001.). Contrasting Approaches that Challenge Tradition. V: Anghileri, J. (Ur.) *Principles and Practices in Arithmetic Teaching.* Buckingham: Open University Press.
2. Berus, M. (2013.) *Posploševanje pri reševanju problema iz obsega*. Diplomsko delo. Lubljana: PeF UL.
3. Bieda, K. N., Nathan, M. J. (2009.). Representational Disfluency in Algebra: Evidence from Student Gestures and Speech. *ZDM—The International Journal of Mathematics Education 41.*
4. Brown, C. A., Borko, H. (1992.). Becoming a Mathematics Teacher. V: Grouws, D. A. (Ur.) *Handbook on Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Mac Millan Publishing Company. Str. 209-239.
5. Bruner, J. S. (1966.). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, MA: Belkapp Press.
6. Chapman, J. O. (2001.). Teachers' Self-representations in Teaching Mathematics. *Mathematics Teacher Education 13*. Str. 289–294
7. Cross, C. T., Woods, T. A., Schweingruber, H. (2009.). *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths toward Excellence and Equity*. National academic press: Washington. Str. 162-187.

8. Ding, M., Li, X. (2014.). Transition from concrete to abstract representations: the distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics*, 87, pp 103-121.
9. Duval, R. (2002.). The Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education 1(2)*. Str. 1–16.
10. Feiman-Nemser, S., Buchman, M. (1985.). Pitfalls of Experience in Teacher Preparation. *Teachers College Record 87(1)*. Str. 53–65.
11. Fosnot, C. T., Dolk, M. (2001.). *Young mathematicians at work. Constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann.
12. Fuson, K. C., Briars, D. J. (1990.). Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First and Second Grade Place Value and Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education 21*. Str. 180-206.
13. Gellert, U. (2004.). Didactic Material Confronted with the Concept of Mathematical Literacy. *Educational Studies in mathematics 55*. Str. 163 – 179.
14. Gravemeijer, K. P. E. (1991.). An Instruction – Theoretical Reflection on the Use of Manipulatives. In: Streefland, L., (Ur.) *Realistic Mathematics Education in Primary School*, On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute.
15. Griffin, S., Case, R. (1997.). Re-thinking the Primary School Math Curriculum: An Approach Based on Cognitive Science. *Issues in Education 3*. Str. 1–49.
16. Heddens, J. W. (1986.). Bridging the Gap between the Concrete and the Abstract. *Arithmetic Teacher 33(6)*. Str. 14-17.
17. Heinze, A., Star, J. R., Verschaffel, L. (2009.). Flexible and Adaptive Use of Strategies and Representations in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education 41*. Str. 535–540.
18. Herbel-Eisenmann, B., Phillips, E. D. (2008.). Analyzing Students' Work: A context for Connecting and Extending Algebraic Knowledge for Teaching. V: Greenes, C. E., Rubenstein, R. (Ur.) *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth yearbook*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. Str. 295-311
19. Hiebert, J. (1988.). A Theory od Developing Competence with Written Mathematical Symbols. *Educational Studies in Mathematics 19*. Str. 333-355.
20. Hodnik Čadež, T., Mastnak, A., Manfreda Kolar, V. (2014.). Assessing preschool children's understanding of mathematical equivalence through problem solving. V: Pytlak, M. (ur.) *Communication in the mathematics classroom*. Rzeszov: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
21. Jakku Sihvonen, R., Niemi, H. (2006.). *Research-based teacher education in Finland – Reflections by Finnish teacher educators*. Turku: Finnish Educational Research Association.
22. Kaput, J. J. (1989.). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. V. Wagner, S., Kieran, C. (Ur.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Hillsdale, NY: Erlbaum. Str. 167–194.
23. Karmiloff-Smith, A. (1992.). *Beyond Modularity: A Developmental Perspective on Cognitive Science*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

24. Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. and Alibali, M. (2006.). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations, *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 297-312.
25. Manfreda Kolar, V., Hodnik Čadež, T. (2010.). Didactic material as a mediator between physical manipulation and thought processes in learning mathematics. V: MAJ, Božena (ur.), SWOBODA, Ewa (ur.), TATSIS, Konstantinos (ur.). *Motivation via natural differentiation in mathematics*. Rzseszów: Wydawnicteo Uniwersytetu, cop. Str. 342-353.
26. Labinowicz, E. (1985.). *Learning from Children: New Biginnings for Teaching Numerical Thinking*. California: Addison-Wesley Publishing Co.
27. Llinares, S., Krainer, K. (2006.). Mathematics (student) Teachers and Teacher Educators as Learners. V: Gutie´rrez, A., Boero, P. (Ur.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present, and Future*. Rotterdam: Sense Publishers. Str. 429-459.
28. Manfreda Kolar, V., Hodnik Čadež, T. (2013.). Dependence of the problem solving strategies on the problem context, V: M. Pavleković, M. Kolar-Boegović, R. Kolar-Šuper (ur.) *Mathematics Teaching for the future* (str. 162 – 172). Zagreb: Element.
29. Markovac, J. (1990.). *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
30. McNeil, N. M. and Alibali, M. (2005.). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations, *Child Development*, 6, 883-899.
31. Nistal, A. A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., Verschaffel, L. (2009.). Conceptualising, Investigating, and Stimulating Representational Flexibility in Mathematical Problem-solving and Learning: A Critical Review. *ZDM—The International Journal of Mathematics Education 41*.
32. Palmer, S. E. (1978.). Fundamental Aspects of Cognitive Representation. V: Rosch, E., Lloyd, B. B. (Ur.) *Cognition and categorization*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. Str. 259-303.
33. Resnick, L., Omanson, S. (1987.). Learning to Undrestand Arithmetic. V: Glaser, R. (Ur.) *Advances in Instructional Psychology 3*. Hillsdale, N.Y.: Lawrence Erlbaum Assocciates. Str. 41-95.
34. Thompson, P. W. (1992.). Notations, Conventions, and Constraints: Contributions to Effective Uses of Concrete Materials in Elementary Schools. *Journal for Research in Mathematics Education* 25. Str. 297-303.
35. Wieczerkowski, W., Cropley, A. J., Prado, T. M. (2002.). Nurturing talents/gifts in mathematics. V: K. A. Heller, F. J. Monks, R. J. Sternberg, R. F. Subotnik (Ur.) *International handbook of giftedness and talent*. Oxford: Elsevier Science Ltd.
36. Zimmerman, B. (1992.). Profile mathematischer Begabung. Fallstudien aus einem Projekt für mathematisch talentierte Schüler sowie aus der Geschichte der Mathematik. (Types of mathematical Giftedness. Case Studies from a Project with talented Pupils and from History of Mathematics.). *Der Mathematikunterricht* 1, 19 - 41.