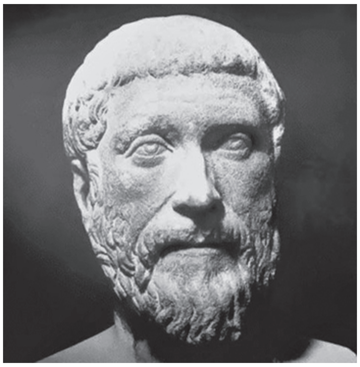
Pitagora i Pitagorin poučak

Antoaneta Klobučar[1], Antun Vidić[2]

Pitagora iz Samosa

Ne može se reći onoliko mudrosti, koliko se može prešutjeti gluposti.

Pitagora



Slika 1. Pitagora

Pitagora iz Samosa često se opisuje kao prvi «pravi" matematičar i premda znamo relativno malo o njegovim matematičkim postignućima, smatra se važnom osobom u povijesti matematike.

Rođen je oko 582. pr. Kr. na grčkom otoku Samosu, kao sin bogatog trgovca. Svoje rane godine proveo je na Samosu, ali je i često putovao s ocem. Na tim se putovanjima mladi Pitagora susreo s mnogim učiteljima i misliocima iz onog vremena koji su ga poučavali filozofiji i znanosti. Jedan od tih učitelja bio je i Tales. Njegova su otkrića utjecala na to da se Pitagora još više zainteresira za matematiku i astronomiju. Pitagora je jedno vrijeme bio u Egiptu gdje se upoznavao s njihovom matematikom, da bi se na kraju nastanio u južnoj Italiji u gradu Krotonu. U njemu je osnovao školu koju danas nazivamo Pitagorejskom školom, a njegove sljedbenike Pitagorejcima.

[1]Antoaneta Klobučar, Ekonomski fakultet, Osijek
[2]Antun Vidić

Društvo se sastojalo od dva kruga: *unutarnji krug* činili su učitelji i matematičari, a *vanjski* učenici. Članovi unutarnjeg kruga, među kojima je bio i sam Pitagora, nisu imali privatnog vlasništva, morali su biti vegetarijanci i živjeti u zajednici. Članovi vanjskog kruga nisu morali biti vegetarijanci, mogli su imati privatno vlasništvo i stanovali su u vlastitim kućama. I muškarci i žene mogli su postati članovi Društva.

U Pitagorejskoj školi naglasak je bio na tajnosti i zajedništvu, tako da je danas teško odgonetnuti što je rad samog Pitagore, a što njegovih učenika. Ono što je sigurno, jest da je njegova škola dala velik doprinos matematici. No, Pitagorejci se nisu bavili matematikom onako kako mi to radimo danas. Nije bilo zadataka koje je trebalo riješiti, nije bilo otvorenih problema s kojima se trebalo uhvatiti u koštac. Pitagorejce je zanimalo i mnogo toga što se danas nama čini toliko poznato da se o tome nema što razmišljati.

Pitagora je vjerovao da se sve oko nas i cijeli svemir može objasniti brojevima. Proučavao je svojstva prirodnih brojeva koja su i dan danas poznata, kao na primjer parni i neparni brojevi, savršeni brojevi itd. Prema njegovu je mišljenju svaki broj imao i svoje osobine: muški i ženski, savršen ili nepotpun, lijep ili ružan. Postojao je i najbolji od svih brojeva, broj 10, koji su prepoznali kao zbroj prvih četiriju prirodnih brojeva ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$).

Poznatije tvrdnje koje su Pitagora i Pitagorejci dokazali su:

1. zbroj kutova u trokutu jednak je kao dva prava kuta,
2. postojanje iracionalnih brojeva,
3. pet pravilnih poliedara,
4. čuveni Pitagorin poučak.

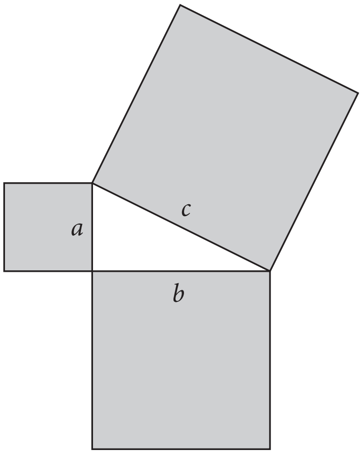
U astronomiji su dokazali da su večernja zvijezda i jutarnja zvijezda Danica isto nebesko tijelo, kao i da je Zemlja kugla. Ipak, Zemlju su krivo zamišljali kao središte svemira.

Premda su indijski matematičari prvi znali za koncept iracionalnih brojeva, prvi dokaz o njihovom postojanju dali su Pitagorejci (i to najvjerojatnije Hipasus iz Metaponta u 5. st. pr. K.). Iracionalni broj koji su otkrili bio je $\sqrt{2} \approx 1.4142...$ Do toga su došli kad su uzalud pokušali omjer dijagonale i stranice kvadrata prikazati kao omjer dvaju prirodnih brojeva. Današnjim riječima, taj omjer nije bio racionalan broj. Ta je spoznaja teško potresla njihova vjerovanja pa su je zato tajili dugo vremena.

Naravno, mi danas Pitagoru poznajemo prema *Pitagorinom poučku*. Iako taj poučak nosi njegovo ime, on je bio poznat u nekom obliku (i vjerojatno bez dokaza) i starim Babiloncima, 1000 godina prije nego što se Pitagora rodio. No, koliko nam je poznato, Pitagora je ovaj poučak prvi dokazao (odnosno on ili neki njegov učenik). Legenda veli da je Pitagora, dokazavši ovaj poučak, bogovima u čast žrtvovao vola jer su ga prosvijetlili.

Pitagorin poučak

Pitagorin poučak jedan je od osnovnih teorema geometrije. Bitno je istaknuti da je Pitagorejcima bio poznat potpun teorem, uključujući i obrat:



Slika 2. Pitagorin poučak

Teorem. U pravokutnom trokutu kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad katetama. Obratno, ako neki trokut ima svojstvo da je zbroj kvadrata nad dvije njegove stranice jednak kvadratu nad trećom, onda se radi o pravokutnom trokutu.

Razni dokazi Pitagorina poučka

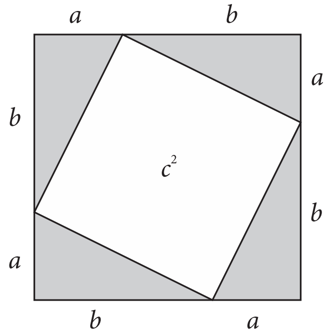
Danas je poznato čak oko 400 raznih dokaza Pitagorinog poučka. Međutim, kad se ti dokazi bolje prouče, uviđa se da se mogu podijeliti u četiri grupe:

1. dokazi koji se zasnivaju na izjednačavanju površina,
2. dokazi pomoću razlaganja površina (tzv. *mozaički dokazi*),
3. dokazi pomoću računanja,
4. dokazi koji se zasnivaju na sličnosti geometrijskih figura.

Slijedi redom po jedan dokaz iz svake ove grupe.

Dokaz 1.

Površina kvadrata čija je stranica duljine $a + b$ iznosi $P = (a + b)^2$, a možemo je izračunati i kao zbroj površina malog kvadrata stranice c i četiri pravokutna trokuta s katetama a, b. Ta su četiri trokuta sukladna pa imaju istu površinu.



Slika 3. Dokaz 1.

$$P = P(malog\ kvadrata) + 4 \cdot P(trokuta)$$

Dakle,

$$P(malog\ kvadrata) = c^2, \quad P(trokuta) = \frac{ab}{2}$$

iz čega slijedi

$$P = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

Nakon izjednačavanja dobivenih površina imamo

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{}$$

iz čega slijedi

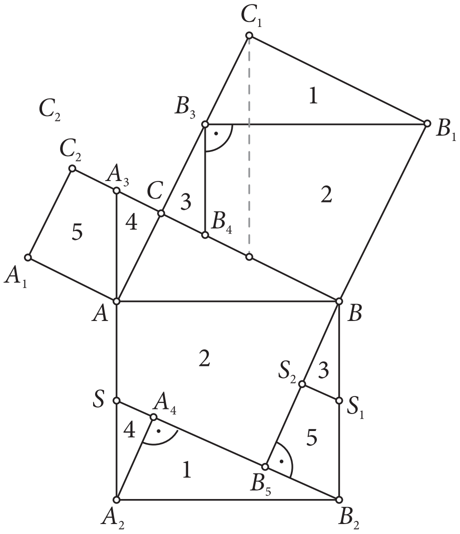
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dokažimo i obrat.

Pravokutni trokut s katetama a i b prema Pitagorinu poučku ima hipotenuzu $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Proizvoljan trokut sa stranicama a, b i $\sqrt{a^2 + b^2}$ sukladan je tome pravokutnom trokutu (4. poučak o sukladnosti trokuta – sve tri stranice jednake). Dakle, i sam je pravokutan.

Dokaz 2.

Na slici ispod su kvadrati nad katetama i kvadrat nad hipotenuzom rastavljeni na četverokute označene s 2 i 5, te na trokute označene s 1, 3 i 4.



Slika 4. Dokaz 2.

Četverokuti označeni s 2 i četverokuti označeni s 5 sukladni su.

Naime, stranice jednoga paralelne su sa stranicama drugog, što bi značilo sličnost. Ali lako se vidi da su stranice iz jednog takvog para čak jednake ($|AB| = |B_1B_2|$). Stoga su četverokuti sukladni.

Na sličan način dokazujemo i sukladnost svih ostalih parova likova.

Iz navedenog slijedi da je zbroj dijelova koji čine kvadrate nad katetama jednak zbroju dijelova koji čine kvadrat nad hipotenuzom.

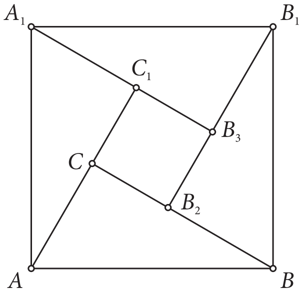
Dokaz 3.

Na slici 5. je nad hipotenuzom $\overline{AB}$ danog pravokutnog trokuta ABC konstruiran kvadrat ABB_1A_1. Zatim je kroz A_1 povučena dužina $\overline{A_1B_3}$ paralelna s $\overline{BC}$ i iz B_1 povučena je dužina $\overline{B_1B_2}$ paralelna s $\overline{AC}$. Kada se $\overline{AC}$ produži do presjeka C_1 s $\overline{A_1B_3}$, tada se kvadrat nad hipotenuzom $\overline{AB}$ rastavlja na kvadrat $CC_1B_3B_2$, čija je duljina stranice jednaka razlici $a - b$ kateta ($a = \overline{BC}$ i $b = \overline{AC} = \overline{BB_2}$) danog pravokutnog trokuta ABC i na četiri sukladna pravokutna trokuta: ABC, AA_1C_1, $A_1B_1B_3$ i BB_1B_2.

Slijedi:

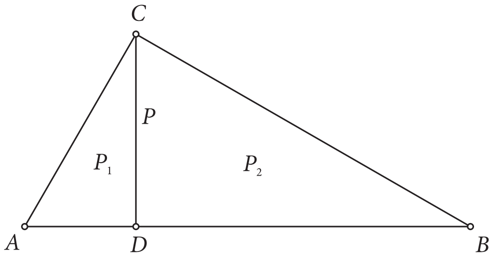
$$c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

tj.



Slika 5. Dokaz 3.

Dokaz 4.



Slika 6. Dokaz 4.

Kad se u pravokutnom trokutu ABC povuče visina $\overline{CD}$ koja odgovara hipotenuzi $\overline{AB}$ (kao što je to napravljeno na slici 6.), tada se dobiju dva nova pravokutna trokuta ACD i BCD koji su slični zadanom trokutom ABC. Naime, svaki od njih ima pravi kut (kao i ABC) i po jedan šiljasti kut zajednički s trokutom ABC. Stoga je i treći kut isti kao u ABC pa su oba mala trokuta slična trokutu ABC.

Ako su P, P_1 P_2 i površine trokuta ABC, ACD i BCD, onda vrijedi:

$$P : P_1 : P_2 = |AB|^2 : |AC|^2 : |BC|^2,$$

odnosno

$$P : P_1 : P_2 = c^2 : b^2 : a^2.$$

Odatle slijedi:

$$P = kc^2,\ P_1 = kb^2,\ P_2 = ka^2,$$

gdje je k faktor proporcionalnosti različit od nule. Kako je $P = P_1 + P_2$, slijedi:

$$kc^2 = kb^2 + ka^2,$$

odnosno

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Pitagorin poučak slijedi i iz kosinusova poučka

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\varphi$$

jer za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dobivamo $c^2 = a^2 + b^2$.

Generalizacije Pitagorinog poučka

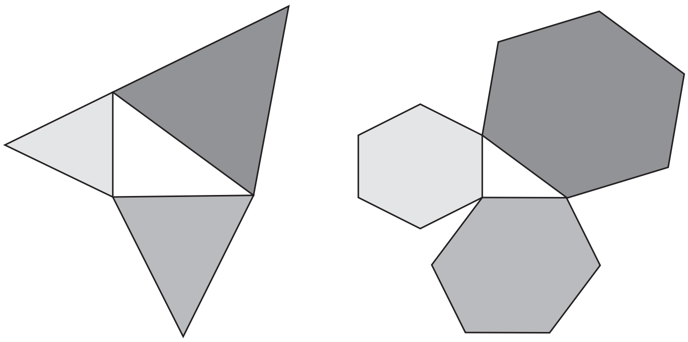
Zapravo, poučak vrijedi za bilo kakav lik nad stranicama pravokutnog trokuta. Uzmimo npr. jednakostraničan trokut. Poučak bi tada glasio:

Površina jednakokračnog trokuta nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina jednakostraničnih trokuta nad katetama. Dokažimo to.

Površina jednakostraničnog trokuta stranice duljine a jednaka je $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. U pravokutnom trokutu, uz standardne oznake, vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$. Množenjem s $\frac{\sqrt{3}}{4}$ dobivamo

$$a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + b^2\frac{\sqrt{3}}{4} = c^2\frac{\sqrt{3}}{4},$$

kao što smo i tvrdili.



Slika 7. Pitagorin poučak za trokute i šesterokute

Na sličan način možemo dokazati i poučak za pravilne šesterokute. Površina pravilnog šesterokuta stranice a jednaka je $3a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ pa slijedi jednakost

$$3a^2\frac{\sqrt{3}}{2} + 3b^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 3c^2\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zapravo, lik koji stavljamo nad hipotenuzu i nad katete može biti proizvoljan jer Pitagorin poučak vrijedi čak i u tom slučaju. Obrazložimo to.

Ako su dva geometrijska lika (pravilna ili nepravilna) slična, tj. sve stranice prvoga su λ puta veće od odgovarajućih stranica drugoga, onda je površina prvoga λ^2 puta veća od površine drugoga. Zamislimo sada da neki lik konstruiran iznad jedinične dužine ima površinu P. Zatim takav lik konstruirajmo i iznad stranica a, b i c pravokutnog trokuta. Dobit ćemo tri varijante toga lika, a površine će im biti a^2P, b^2P i c^2P.

Pitagorinu jednakost $a^2 + b^2 = c^2$ množimo s P i dobivamo $a^2P + b^2P = c^2P$,

a to je upravo „Pitagorin poučak" za tu vrstu likova!

Pitagorine trojke

Iako poučak vrijedi za bilo koje realne brojeve a i b (i odgovarajući c), ipak su pažnju ljudi oduvijek najviše privlačili slučajevi kad su a, b i c prirodni brojevi. Takva 3 broja nazivamo Pitagorinom trojkom. Najpoznatiji primjer je trojka (3, 4, 5). Dakle, ako su katete dugačke 3 i 4 neke mjerne jedinice, onda je hipotenuza dugačka 5 istih tih mjernih jedinica. Sljedeća zanimljiva trojka su brojevi (5, 12, 13). Ali zapravo za svaki neparni broj na mjestu manje katete postoje na mjestu veće katete i hipotenuze dva broja koji se međusobno razlikuju za 1. To su: (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61) itd. Njihov opći oblik je $(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2})$ Osim toga, i svi višekratnici proizvoljne Pitagorine trojke i sami su jedna trojka. Tako od primitivne (neskrative) Pitagorine trojke (3, 4, 5) dobivamo višekratnike (6, 8, 10), (9, 12, 15), (30, 40, 50) itd.

Postoji formula kojom generiramo Pitagorine trojke. Ona potječe još od Euklida i kaže da možemo uzeti bilo koja 2 prirodna broja m i n uz uvjet $m > n$ i uvrstiti ih u formule: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$. Tada ćemo dobiti Pitagorinu trojku a, b, c. Tako možemo dobiti sve primitivne trojke, a i dio onih koje se mogu pokratiti zajedničkom mjerom. Ako dodamo i treći parametar k, onda pomoću $a = k\,(m^2 - n^2)$, $b = k \cdot 2mn$, $c = k\,(m^2 + n^2)$ dobivamo baš sve trojke (premda neke od njih na više načina).

Primitivne trojke imaju brojna zanimljiva svojstva. Pogledajmo neka od njih. Broj c uvijek je neparan, baš kao i točno jedan od brojeva a i b. Uvijek je jedan i samo jedan od brojeva a i b djeljiv brojem 3, odnosno brojem 4 (može biti i isti). Točno jedan od brojeva a, b i c bit će djeljiv brojem 5. Postoji beskonačno mnogo trojki gdje se hipotenuza i veća kateta razlikuju za 1 (i sve su one očigledno primitivne). Nikada hipotenuza i jedna kateta ne mogu biti katetama za neku drugu, veću Pitagorinu trojku. Površina Pitagorina trokuta $\frac{a \cdot b}{2}$ nikada ne može biti kvadrat prirodnog broja. Nikada se hipotenuza i jedna kateta ne mogu razlikovati za prost broj veći od 2. Dokazi nisu teški pa ih ostavljamo čitatelju.

Zaključak

Pitagorin poučak ima bezbroj primjena u geometriji. Neke su sasvim jednostavne, kao npr. računanje dijagonale pravokutnika ili prostorne dijagonale kocke ili modula kompleksnog broja. Druge su zamršenije, npr. dokazivanje Heronove formule za površinu trokuta kada su poznate stranice. Njime se dokazuju i neke trigonometrijske jednakosti, od kojih je najpoznatija $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. U analitičkoj geometriji udaljenost između 2 točke računamo direktno ovim poučkom itd.

Osim navedenih dokaza Pitagorina poučka postoje i brojni drugi. Vjerojatno je najmjerodavnija u tome smislu knjiga *The Pythagorean Proposition* koju je napisao američki matematičar i inženjer Elisha Scott Loomis (1852.–1940.). U njoj se spominje čak 367 dokaza! Knjigu je ponovo izdala 1968. američka udruga NCTM (National Council od Teachers of Mathematics). Od tada do danas i broj dokaza vjerojatno je porastao.

Nekoliko dokaza i generalizacija Pitagorina poučka imamo u [4].

Bilo bi dobro kada bi se kod obrade Pitagorinog poučka u školama pokazalo barem 2–3 različita dokaza, a naprednijim učenicima i više. Time bi se učenike poticalo na kreativan pristup matematici.

Literatura

1. F. M. Bruckler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku, Osijek, 2007.
2. G. Isakovič Gleizer, *Povijest matematike za školu*, Školske novine i HMD, Zagreb, 2003.
3. D. Klobučar, *Matematika naša svagdašnja*, Element, Zagreb, 2012.
4. D. Veljan, *Pitagorin poučak – 2500 godina poslije*, Poučak, Zagreb, 1/2000 5-25.
5. Herodot, *Povijest*, prijevod Dubravko Škiljan, Zagreb, Matica hrvatska, 2000.
6. http://www.halapa.com/pravipdf/vagazad.pdf
7. http://www.lugram.net/pdf/Pitagorina_teorema.pdf