Uvođenje eksponencijalne i logaritamske funkcije u srednjoškolskoj nastavi matematike

GORAN TRUPČEVIĆ[1] I ANĐA VALENT[2]

Sažetak. Eksponencijalna i logaritamska funkcija, te konstanta *e* uvode se u drugom razredu srednje škole, a zatim se ponovno razmatraju u četvrtome razredu. Precizno uvođenje ovih pojmova nadilazi srednjoškolsku razinu matematičkog znanja i dotad stečenih vještina, što predstavlja izazov najprije za autore udžbenika, a zatim i za nastavnike. U ovome ćemo radu dati pregled uvođenja navedenih pojmova i njihovih svojstava u udžbenicima namijenjenima prirodoslovno-matematičkim gimnazijama.

1. Uvod

Profesionalno usavršavanje nastavnika može se odvijati unutar škole (suradnja u pripremi nastave, mentorstvo, opažanje nastave, provođenje istraživanja...), te izvan škole (seminari, konferencije, kvalifikacijski programi...). Prema podatcima iz TALIS 2013 istraživanja (TeachingandLearning International Study) kroz samoprocjenu nastavnika ustanovljena je pozitivna veza između usavršavanja unutar škole i utjecaja usavršavanja na vlastitu nastavnu praksu ([12]). Kako udžbenici uvelike utječu na pripremu nastave, smatramo korisnim proučiti strukuture naših udžbenika ([11]) i pristupe različitih autora određenim matematičkim temama. Primjerice, u radu [4] uspoređeni su pristupi uvođenja pojma određenog integrala .

U ovom ćemo radu usporediti uvođenje eksponencijalne i logaritamske funkcije u sljedećim udžbenicima ([7], [1], [5], [6], [8]):

1. J. Gusić, P. Mladinić, B. Pavković: *Matematika 2*: udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, 2014.
2. S. Antoliš, A. Copić: *Matematika 4*: udžbenik za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, 2014.

[1]Goran Trupčević, Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet, docent
[2]Anđa Valent, Tehničko veleučilište u Zagrebu, predavač

3. B. Dakić, N. Elezović: *Matematika 2*: udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Element, 2014.
4. B. Dakić, N. Elezović: *Matematika 4*: udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Element, 2014.
5. H. Kraljević, Z. Šikić: *Matematika IV*: brojevi, funkcije, infinitezimalni račun: udžbenik za IV. razred gimnazija i tehničkih škola, Profil International, 1995.

Na udžbenike za drugi i četvrti razred istoga izdavača gledali smo kao na jednu cjelinu. U svim se navedenim udžbenicima definicija i svojstva eksponencijalnih i logaritamskih funkcija uvode postupno, nadograđujući ranije stečeno znanje. Učenike se upoznaje s nekim svojstvima koja se ne dokazuju u punoj strogoći, već se ta svojstva pokušavaju intuitivno objasniti.

Udžbenici 1–4 imaju vrlo sličan pristup. Iako udžbenik 5 nije namijenjen prirodoslovno-matematičkim gimnazijama, odlučili smo ga analizirati jer se pristup razlikuje od ostalih udžbenika.

2. Udžbenici za drugi razred srednje škole

U oba razmatrana udžbenika poglavlje *Eksponencijalna i logaritamska funkcija* započinju motivacijskim primjerom. Kako su pristupi vrlo slični, nećemo doslovno citirati autore već ćemo ukratko opisati tijek uvođenja pojmova. Eksponencijalna funkcija uvodi se najprije na skupu $\mathbb{N}$, te potom $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$. Za zadanu bazu $a>0$, $a\neq 1$ najprije se definira a^n, $n\in\mathbb{N}$ kao

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n}.$$

Potom se definira

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

i

$$a^0=1,$$

čime je eksponencijalna funkcija definirana na skupu $\mathbb{Z}$. Funkcija se dalje proširuje na skup $\mathbb{Q}$ korištenjem

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

U nastavku autori nastoje objasniti proširenje eksponencijalne funkcije sa skupa $\mathbb{Q}$ na skup $\mathbb{R}$ po neprekidnosti. Naravno da autori ne spominju gustoću skupa $\mathbb{Q}$ u skupu $\mathbb{R}$, ali upravo to intuitivno pokazuju.

U udžbeniku 1 autori to objašnjavaju pomoću grafa funkcija 2^x i $(0{,}5)^x$ tako što skiciraju grafove navedenih funkcija najprije s domenom u $\mathbb{N}_0$, te potom s domenom u $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$, te kažu: „Graf se u početku sastoji od „razmaknutih" točaka. Promjenom domene graf se „popunjava" dok ne dobijemo neprekinutu krivulju..."

U udžbeniku 3 autori skiciraju graf funkcije 10^x na temelju tabličnih vrijednosti s domenom u $\mathbb{Q}$. Potom objašnjavaju kako bismo mogli izračunati $10^{\sqrt{2}}$ tako što iracionalni broj $\sqrt{2}$ ukliještimo između dva racionalna broja. Korištenjem

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

dobivamo aproksimaciju

$$10^{1.41} = \sqrt[100]{10^{141}} \approx 25.7039.. < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1.42} = \sqrt[100]{10^{142}} \approx 26.3026\ldots$$

Postupnim profinjenjem vrijednosti konačno pokazuju da iz

$$10^{1.41} = \sqrt[100]{10^{141}} \approx 25.7039.. < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1.42} = \sqrt[100]{10^{142}} \approx 26.3026\ldots$$

možemo aproksimirati

$$10^{\sqrt{2}} \approx 25.95455352$$

U nastavku autori obaju udžbenika navode da za eksponencijalnu funkciju vrijede sljedeća svojstva:

E1 Domena funkcije a^x je skup $\mathbb{R}$, a slika funkcije je skup $(0, +\infty)$.

E2 Funkcija je strogo rastuća za $a > 1$ i strogo padajuća za $0 < a < 1$.

E3 Funkcija je injektivna.

E4 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

E5 $(a^x)^y = a^{xy}$

E6 $a^0 = 1$

Svojstva E1-E3 objašnjavaju se pomoću grafa funkcije, te se promatra asimptotsko ponašanje funkcije u $\pm\infty$ i uspoređuju grafovi eksponencijalnih funkcija s različitim bazama.

Naglašava se da je od posebne važnosti funkcija s bazom e pri čemu se e uvodi kao konstanta čija je približna vrijednost 2,71... Navodi se da je e iracionalan, pa čak i transcendentan broj.

Logaritamska funkcija uvodi se kao funkcija inverzna eksponencijalnoj funkciji. Objašnjava se da se graf logaritamske funkcije dobiva zrcaljenjem grafa odgovarajuće eksponencijalne funkcije s obzirom na pravac $y = x$, te da iz svojstva E1 – E6 eksponencijalne funkcije slijede svojstva logaritamske funkcije:

L1 Domena funkcije $\log_a(x)$ je skup $(0, +\infty)$, a slika funkcije je skup $\mathbb{R}$.

L2 Funkcija je strogo rastuća za $a > 1$ i strogo padajuća $0 < a < 1$.

L3 Funkcija je injektivna.

L4 $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $x, y > 0$.

L5 $\log_a(x^y) = y\log_a(x)$, $x > 0$.

L6 $\log_a(1) = 0$.

3. Udžbenici za četvrti razred srednje škole: udžbenici 2 i 4

U udžbenicima za drugi razred srednje škole, broj e uvodi se jednostavno kao konstanta i daje se njezina približna vrijednost. U udžbenicima za četvrti razred autori se ponovno vraćaju na definiciju broja e u poglavlju posvećenom nizovima. Tijek izlaganja isti je u oba udžbenika, s više dubine u dokazima u udžbeniku 4, a opisan je u sljedećim koracima:

1. Svaki monoton i omeđen niz je konvergentan.
2. Promatraju se tablične vrijednosti niza
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
iz kojih je vidljivo da se niz približava konstanti e.
3. Promatrani niz x_n omeđen je i monoton, te je stoga konvergentan. Konstantu e možemo definirati kao limes toga niza.

Prvi se korak u udžbeniku 4 dokazuje, a u udžbeniku 1 daje se skica dokaza. Isto tako, treći se korak u udžbeniku 4 dokazuje uz pomoć Bernoullijeve nejednadžbe koja je ranije u poglavlju o matematičkoj indukciji dokazana u specijalnom slučaju (drukčiji dokazi mogu se naći npr. u [9],[2]).

Autori se eksponencijalnoj funkciji ponovno vraćaju nakon što se uvede i objasni limes funkcije navodeći da vrijedi
$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
i
$$\lim_{x\to 0}\left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Korištenjem ovog limesa, u poglavlju posvećenom derivacijama u oba se udžbenika iz definicije derivacije pokazuje da vrijedi
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Derivacija funkcije e^x izvodi se iz derivacije funkcije $\ln x$ pomoću formule za derivaciju inverzne funkcije.

Kao što je ranije rečeno, linija izlaganja jednaka je u oba udžbenika. Koraci koji su matematički zahtjevniji, kao što je na primjer prelazak s limesa niza na limes funkcije, u udžbeniku 2 samo se navode, dok se u udžbeniku 4 dokazuju ili daju ideje dokaza uz upute autora da bi neke tvrdnje trebalo dodatno opravdati.

4. Udžbenici za četvrti razred srednje škole: udžbenik 5

Iako ovaj udžbenik nije namijenjen prirodoslovno-matematičkim gimnazijama, odlučili smo ga uvrstiti u ovaj pregled jer se pristup bitno razlikuje od pristupa u ostalim udžbenicima.

U poglavlju o nizovima dokazuje se da je monotoni niz konvergentan ako i samo ako je omeđen. Korištenjem ove tvrdnje pokazuje se konvergencija niza parcijalnih suma reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

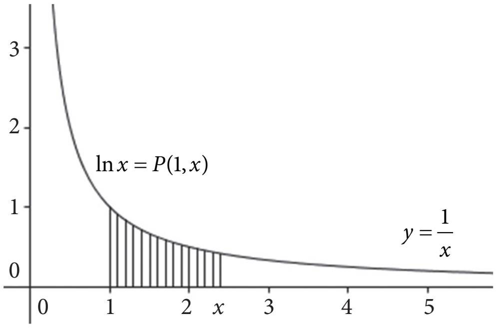
i broj e definira se kao suma reda. Navodi se da je broj e iracionalan, da vrijedi

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

te da je broj e upravo baza prirodnog logaritma koji se uvodi kasnije.

U poglavlju o funkcijama uvodi se eksponencijalna funkcija ponovno definirana na skupu racionalnih brojeva i navodi se da je ta funkcija s domenom u $\mathbb{Q}$ restrikcija jedinstvene monotone funkcije na $\mathbb{R}$. Objašnjavaju se svojstva eksponencijalne funkcije i uvodi se logaritamska funkcija kao inverz eksponencijalne. Autori napominju da je proširenje domene ovih funkcija sa $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ opisano u poglavlju *Površina i integral*.

U nastavku ćemo u osnovnim crtama opisati spomenutu definiciju funkcije $\ln x$. Ukratko, autori definiraju funkciju $\ln x$ kao površinu između grafa hiperbole $y=\frac{1}{x}$ i osi apscise s granicama od 1 do x kako je prikazano na slici 1.



Slika 1. Definicija logaritamske funkcije kao površine ispod grafa hiperbole

Za pozitivne realne brojeve $a < b$ uvodi se oznaka $P(a, b)$ za površinu omeđenu grafom hiperbole $y = \frac{1}{x}$, osi x i pravcima $x = a$ i $x = b$ i navodi da „takve površine imaju važno svojstvo koje ih čini zanimljivijima od svih ranije razmatranih površina", a to je da za svaki $c > 0$ vrijedi

$$P(a, b) = P(ca, cb).$$

Ova se činjenica argumentira svojstvom hiperbole $y = \frac{1}{x}$ koja rastezanjem c puta u smjeru x osi i c^{-1} puta u smjeru osi y prelazi u samu sebe, a segment $[a, b]$ u segment $[ca, cb]$.

Nadalje, za $0 < a < b < c$ očito vrijedi

$$P(a, c) = P(a, b) + P(b, c).$$

Dodatnim uvođenjem

$$P(b, a) = -P(a, b)$$

dobivamo da vrijedi

$$P(a, a) = 0.$$

Logaritamska funkcija $\ln x$ definira se za pozitivne realne brojeve kao

$$\ln x = P(1, x).$$

Korištenjem ranijih svojstava površine dobivamo da vrijedi

$$P(1, ab) = P(1, a) + P(a, ab) = P(1, a) + P(1, b),$$

odakle slijedi svojstvo

(l1) $\quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$

I ostala ranije navedena svojstva L5 i L6 logaritamske funkcije slijede iz opisanih svojstava površine.

Autori nadalje definiraju opću logaritamsku funkciju kao bilo koju neprekidnu funkcija za koju vrijedi svojstvo *(l1)* i navode da su ostala poznata svojstva logaritamskih funkcija automatski zadovoljena.

Iz danog grafa logaritamske funkcije vidi se da je funkcija injektivna, te se definira eksponencijalna funkcija kao njoj inverzna funkcija. Svojstva eksponencijalne funkcije slijede iz svojstva logaritamske funkcije.

S grafa funkcije $\ln x$ vidi se da postoji realni broj $e < 0$ takav da je $\ln(e) = 1$. Navodi se da je broj e iracionalan te daje njegova približna vrijednost.

Napomenimo da u jednom novijem udžbeniku [10] nalazimo povijesnu crticu koja dodatno pojašnjava ovakvu definiciju logaritamske funkcije (ovaj udžbenik nismo sustavnije prezentirali jer nije namijenjen prirodoslovno-matematičkim gimnazijama):

„Logaritme su prvi otkrili i u tablicama popisali Bürgi i Napier iz potrebe da se lakše računa s velikim brojevima. Ta potreba stvorila se zbog značajnog razvoja astronomije u 16. stoljeću. Logaritamske tablice omogućavale su da se množenje velikih brojeva svede na zbrajanje logaritama tih brojeva. No oni nisu pojmili logaritam kao neprekidnu funkciju. Tek je Sarasa u 17. stoljeću, čitajući djelo *Opus Geometricum* Gregoryja St. Vincenta, spoznao da je prirodni logaritam broja zapravo površina ispod grafa krivulje

$$y = 1/x.\text{"}$$

U nastavku autori objašnjavaju kako se to saznanje može iskoristiti da bi se odredila derivacija funkcije $y = \ln x$.

U istom udžbeniku navodi se da za konstantu e vrijedi $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ali i

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

U udžbenicima 2 i 4 ne spominje se posljednje svojstvo. Pozadina ovakve definicije konstante e naravno leži u dobro poznatom razvoju funkcije e^x u Taylorov red i može se iskoristiti za približni račun broja e ili npr. vrijednosti prirodnog logaritma u odabranim točkama ([9],[3]).

5. Zaključak

Kao zajedničku crtu pristupa svih autora primjećujemo da se pojmovi i svojstva logaritamskih i eksponencijalnih funkcija uvode postupno, sukladno dotadašnjem matematičkom znanju i vještinama učenika. Materija koja nadilazi okvire srednjoškolskog znanja ne dokazuje se nego navodi, ili se daju skice dokaza i intuitivna objašnjenja. Napomenimo da se i u literaturi za visokoškolsku nastavu matematike ([9]) ovi pojmovi uvode u više koraka.

U svim su udžbenicima dani primjeri kojima se motivira uvođenje ovih funkcija, te je naglašena njihova važnost u primjenama.

Literatura

1. S. Antoliš, A. Copić: *Matematika 4:* udžbenik za 4. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, 2014.
2. Lj. Arambašić, A. Valent: *Neke primjene Rolleovog i Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti*, Poučak 2013(55)
3. Lj. Arambašić, M. Matika, A. Valent: *Neke generalizacije Rolleovog i Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti*, Poučak 2015(61)
4. I. Božić, T. Šikić: *Uvođenje pojma određenog integrala u srednjoškolskoj nastavi*, Poučak, 2012.(48).
5. B. Dakić, N. Elezović: *Matematika 2:* udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Element, 2014.
6. B. Dakić, N. Elezović: *Matematika 4:* udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Element, 2014.
7. J. Gusić, P. Mladinić, B. Pavković: *Matematika 2:* udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred za prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, 2014.
8. H. Kraljević, Z. Šikić: *Matematika IV: brojevi, funkcije, infinitezimalni račun:* udžbenik za IV. razred gimnazija i tehničkih škola, Profil International, 1995.
9. S. Kurepa: *Matematička analiza*, Školska knjiga, 1997.
10. Z. Šikić, M. Ćulav Markičević, P. Vranjković: *Udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za četvrti razred gimnazije i tehničke škole*, Profil International, 2014.
11. G. Trupčević, A. Valent: *The Structures of Croatian Mathematics Textbooks*, The Fifth International Scientific Colloquium Mathematics and Children (Teaching and Learning mathematics), 2015., prihvaćeno za objavljivanje
12. A. Valent, G. Trupčević: *Možemo li otvoriti vrata svojih učionica*, MiŠ, 2015., prihvaćeno za objavljivanje