

SIMETRALA DUŽINE U TAXIMETRICI

Matej Buljan, XV. gimnazija, Zagreb



Matka 23 (2014./2015.) br. 91

U prošleme broju moj prijatelj Fran upoznao vas je s jednim posebnim načinom mjerenja udaljenosti koji se zove *taximetrika*. Samo da se prisjetimo, u taximetrici je udaljenost dviju točaka duljina puta od točke A do točke B , pri čemu se krećemo samo usporedno s osima koordinatnog sustava.

Također ste mogli vidjeti kako u taximetrici izgleda kružnica i da je ona različita od kružnica koje mi svakodnevno koristimo. Međutim, tu nije kraj. Budući da se ipak služimo potpuno različitim načinom mjerenja udaljenosti od standardnog, i mnoge će druge stvari izgledati drugačije, a, vjerujte mi, njihov novi izgled vrlo je zanimljiv. Između ostalog, jedna od stvari koje su nam zanimljive u taximetrici je simetrala dužine. Sigurno već svi znate što je simetrala dužine i kako je konstruirati u euklidskoj metrici, tj. u onom sustavu mjerenja kojim se služimo i u kojemu je udaljenost dviju točaka njihova zračna udaljenost. Ono što nam je sada bitno jest općenito svojstvo simetrale da je svaka točka na simetrali jednako udaljena od krajnjih točaka dužine, te smo upravo tim svojstvom i definirali simetralu. Točka pripada simetrali dužine ako je jednako udaljena od krajnjih točaka dužine, pri čemu udaljenost mjerimo u taximetrici.

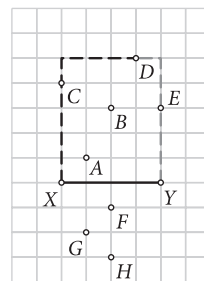


U sljedećim zadacima pomoći ću vam da sami otkrijete kako izgledaju simetrale u taximetrici.

Primjer 1. Promotrimo dužinu \overline{XY} . Izračunajmo udaljenosti na slici istaknutih točaka od X i Y .

Rješenje: Udaljenost točaka X i D je 8 (5 mjesta gore i 3 desno). Udaljenost točaka Y i D je 6 (5 mjesta gore i 1 lijevo). Iz ovoga vidimo da točka D nije jednako udaljena od točaka X i Y pa ona ne pripada simetrali dužine \overline{XY} .

Udaljenost točaka F i X je 3 (1 mjesto dolje i 2 desno). Udaljenost točaka Y i F također je 3 (1 mjesto dolje i 2 lijevo). Iz ovoga vidimo da je točka F jednako udaljena od točaka X i Y pa ona pripada simetrali dužine \overline{XY} .

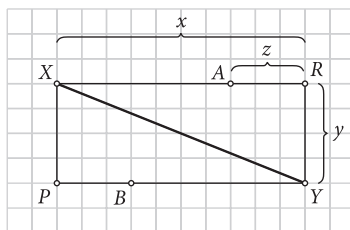


Zadatak 1. Izračunajte udaljenosti preostalih nacrtanih točaka od točaka X i Y . Zaokružite one koje su jednako udaljene od točaka X i Y . Zaokružene točke pripadaju simetrali dužine \overline{XY} . Dodajte još četiri točke koje također pripadaju simetrali dužine \overline{XY} . Uočavate li neku poznatu pravilnost?

Primjer 2. Promotrimo dužinu \overline{XY} i pravokutnik kao na slici. Kako na dužinama \overline{XR} i \overline{PY} pronaći točke A i B koje su jednako udaljene od točaka X i Y ?



Rješenje:



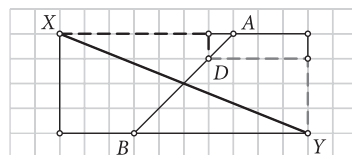
Točka A jednako je udaljena od točaka X i Y pa vrijedi:

$$x - z = y + z$$

$$z = \frac{x - y}{2}, \text{ ako je } x > y$$

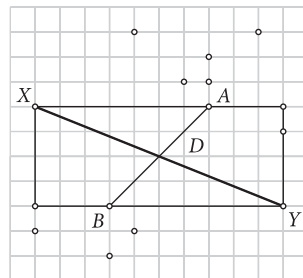
Slično se dobije $z = \frac{y - x}{2}$, ako je $y > x$.

Možemo primijetiti da su i sve točke dužine \overline{AB} jednako udaljene od točaka X i Y pa pripadaju simetrali.

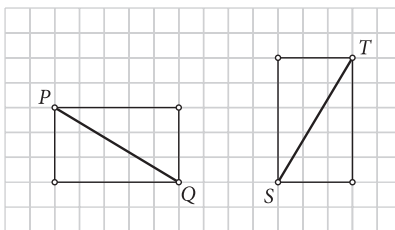


Promotrimo, na primjer, točku D. Ona je i od točke X i točke Y udaljena za 7, pa smo time provjerili da se nalazi na simetrali. Analogno se provjeri za bilo koju drugu točku na dužini \overline{AB} . Provjerite!

Zadatak 2. Odredite udaljenosti nacrtanih točaka od točaka X i Y. Istaknite točke koje su jednako udaljene od X i Y. Nacrtajte još šest točaka koje su također jednako udaljene od točaka X i Y. Možete li si sada predočiti kako u ovom slučaju izgleda simetrala?

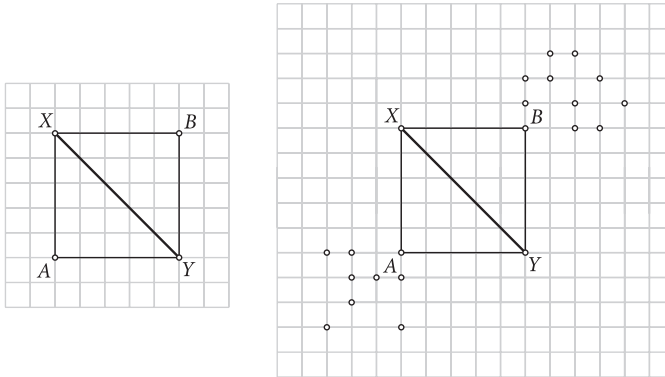


Zadatak 3. Nacrtajte simetrale dužina \overline{PQ} i \overline{ST} .

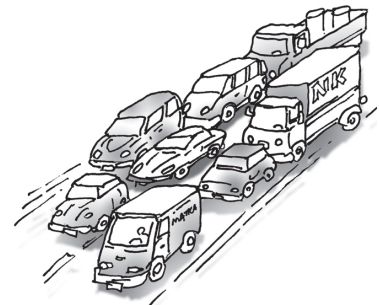
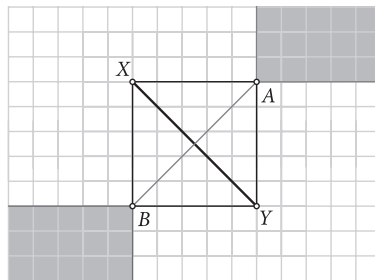


Primjer 3. Pogledajmo sada ovaj specifični slučaj: dužina \overline{XY} , čiju simetralu određujemo, s koordinatnim osima zatvara kut od 45° .

Rješenje: Prvo odredimo točke A i B kao u primjeru 2. Te se točke nalaze u vrhovima kvadrata. Provjerite da su sve točke nacrtane na slici desno jednako udaljene od točaka X i Y .



Možemo uočiti da su sve točke unutar obojenog područja jednako udaljene od točaka X i Y .



To znači da se u ovom slučaju simetrala dužine \overline{XY} sastoji od dužine \overline{AB} i od svih točaka unutar obojenih područja.

Dakle, u taximetriji postoje tri tipa simetrala dužine \overline{XY} , ovisno o međusobnom položaju točaka X i Y u koordinatnom sustavu. Prvi je slučaj kad je pravac točkama X i Y paralelan jednoj koordinatnoj osi, drugi kad pravac točkama X i Y s koordinatnim osima zatvara kut od 45° , a treći kad taj pravac s koordinatnim osima zatvara bilo koji drugi kut različit od 0° , 90° i 45° .

