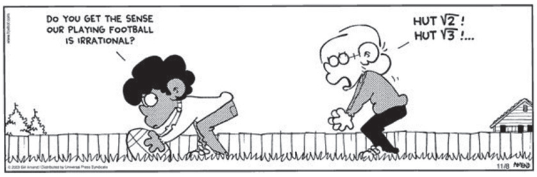
IRACIONALNI BROJEVI I KONSTRUKCIJE

Nikol Radović, Sisak

U rječniku stranih riječi /http://onlinerjecnik.com/rjecnik/strane-rijeci/ (13.10.2014.) iracionalno (lat. *irrationalis*) se tumači kao: *nerazumno, koje nije obdareno razumom; nerazložano, nepametano, koje je „iznad razuma", suprotno razumu.*

Imajući na umu prethodno objašnjenje, možemo se pitati zašto se brojevi *koji baš i nisu svoji* posebno uče? Što ih čini tako važnima? Između ostaloga, možemo ih naći u arhitekturi, glazbi, likovnoj umjetnosti...

U nastavi matematike 8. razreda osnovne škole susrećemo se s brojevima imena *iracionalni*. Prisjetimo se definicije. Brojeve koji se ne mogu prikazati u obliku razlomka nazivamo *iracionalnim brojevima*. Možemo reći da su iracionalni brojevi oni brojevi koji nisu racionalni. Situacija sa sljedeće slike u svakidašnjem životu baš i nije uobičajena, zar ne?



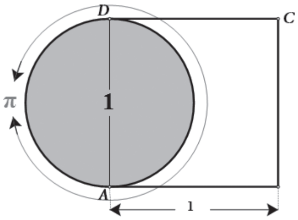
Izvornik: http://www.mrnorton.com/Chemistry/cartoons.htm/ (13.10.2014.)

Jedan primjer ***beskonačnog neperiodičnog*** decimalnog broja upoznali smo u 7. razredu: to je broj π, **omjer opsega i promjera kruga**.

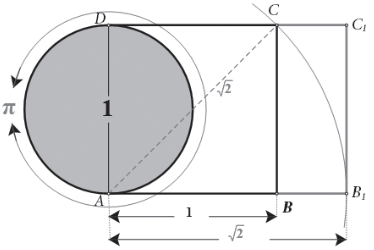
Na sljedećim je slikama prikazana konstrukcija dužina kojima su duljine redom $\sqrt{2}, \sqrt{3}$... mjernih jedinica.

- Nacrtajmo krug duljine promjera 1 mjerne jedinice.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat *ABCD* kojemu je duljina stranice jednaka duljini promjera kruga, slika 1.
- Kvadratu *ABCD* nacrtajmo dijagonalu $\overline{AC}$. Duljina dijagonale kvadrata jednaka je $\sqrt{2}$ mjernih jedinica, slika 2. $k\left(A, \left|AC\right|\right) \cap \overrightarrow{AB} = \left\{B_1\right\}$.

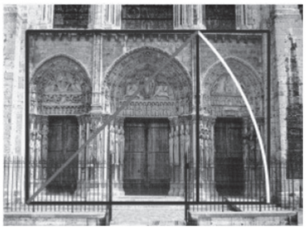
Dužina $\overline{AB_1}$ je duljine $\sqrt{2}$ mjernih jedinica. Kostruirani pravokutnik AB_1C_1D još se naziva i „$\sqrt{2}$ – pravokutnik”.



Slika 1.

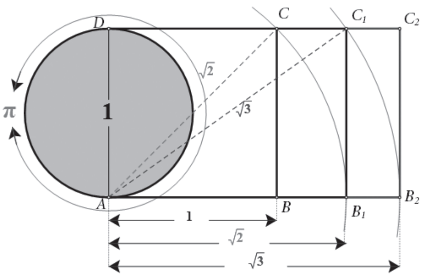


Slika 2.

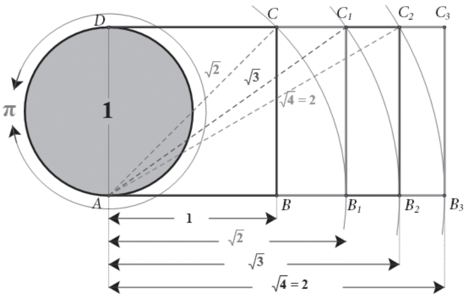


Slika 3. „$\sqrt{2}$ – pravokutnik” na ulazu u Chartes Cathedral

- Dijagonala $\overline{AC_1}$ pravokutnika AB_1C_1D je duljine $\sqrt{3}$ mjernih jedinica, slika 4.
- Pravokutnik AB_2C_2D je „$\sqrt{3}$ – pravokutnik”, slika 3., sa stranicama duljina 1 i $\sqrt{3}$ mjernih jedinica.

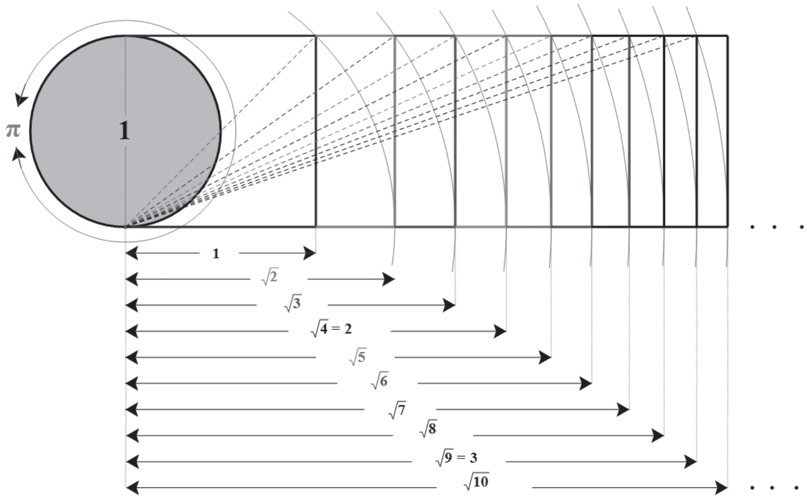


Slika 4.



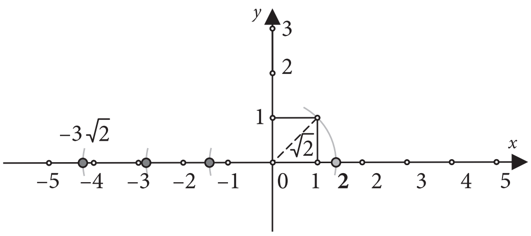
Slika 5.

- Na sličan način crtamo/konstruiramo i „2 – pravokutnik”, „$\sqrt{5}$ – pravokutnik”... slika 6.

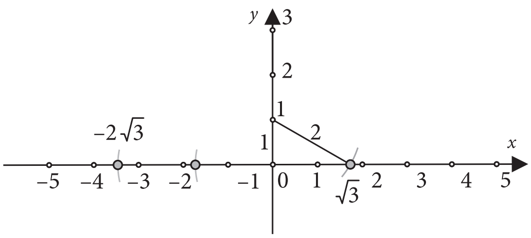


Slika 6.

Iracionalni brojevi mogu se prikazati i na brojevnome pravcu. Dužinu duljine $\sqrt{2}$ mjernih jedinica crtamo/konstruiramo kao dijagonalu kvadrata konstruiranog nad jediničnom dužinom. Tu duljinu prenosimo duž brojevnoga pravca potreban broj puta, slika 7. Dužinu duljine $\sqrt{3}$ mjernih jedinica crtamo/konstruiramo kao katetu pravokutnog trokuta kojemu je duljina druge katete jednaka jediničnoj dužini, a duljina hipotenuze jednaka je 2|01|. Tu duljinu dužine prenosimo od ishodišta duž brojevnoga pravca potreban broj puta, slika 8.

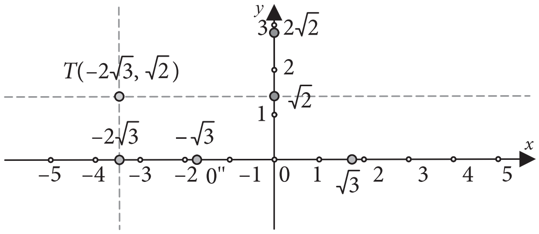


Slika 7.



Slika 8.

Tako bismo mogli prikazivati i točke u ravnini, primjerice točku T($-2\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$), slika 9.



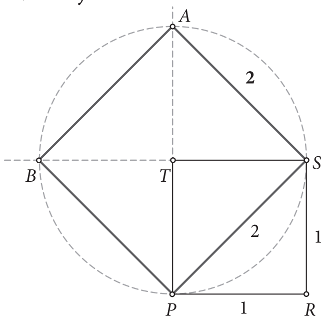
Slika 9.

Nas će zanimati konstrukcije u kojima su prikriveni iracionalni brojevi, pa tako i Pitagorin poučak. Sve konstrukcije u idućim primjerima mogu se crtati klasično (trokut/ravnalo i šestar) ili primjenom nekog od programa dinamične geometrije. Krenimo!

Primjer 1.

Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat *ABCD* kojemu je duljina stranice $\sqrt{2}$ mjernih jedinica.

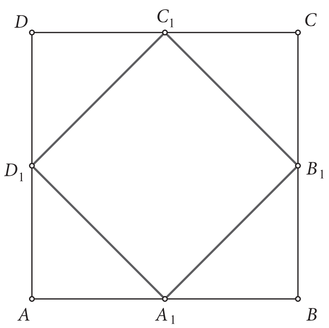
- Nacrtajmo/konstruirajmo bilo koji kvadrat *PRST*, stranica duljine 1 mjernih jedinica.
- Nacrtajmo/konstruirajmo dijagonalu $\overline{PS}$ kvadrata *PRST*. Njezina duljina jednaka je $\sqrt{2}$ mjernih jedinica.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat *PSAB* kojemu je duljina stranice jednaka duljini dijagonale kvadrata *PRST*, slika 10.



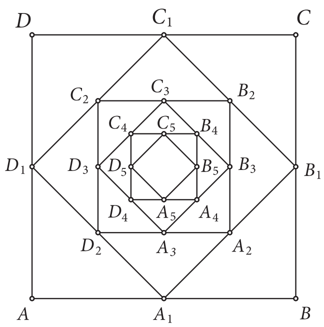
Slika 10.

Primjer 2.

Na slici 11. nacrtan/konstruiran je kvadrat *ABCD* stranice duljine 1 mjernu jedinicu. Svakoj stranici kvadrata nacrtano je polovište. Polovišta su vrhovi kvadrata $A_1B_1C_1D_1$ koji je upisan u kvadrat *ABCD*.



Slika 11.



Slika 12.

Prema **Primjeru 1**. duljina stranice kvadrata $A_1B_1C_1D_1$ iznosi $\sqrt{2}$ mjernih jedinica.

Nastavimo crtanje/konstruiranje novih kvadrata. Svaki od nacrtanih kvadrata imat će duljinu stranice povezanu s $\sqrt{2}$. Provjerite računom!

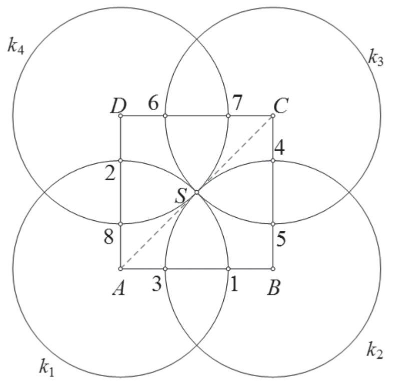
Nacrtani/konstruirani kvadrati na slici 12. tvore ***geometrijski red***. Mi smo geometrijski red, tj. članove reda (kvadrat u kvadratu) nacrtali/konstruirali.

Prema legendi, jednog olujnog dana godine 520 pr. Kr. odvijala se drama u moru uz obale Grčke. Čovjek je „pao" u more preko ruba čamca. Bio je to i Hippasus od Metapontuma. Njegov zločin? Usudio se svijetu reći matematičku tajnu o opasnom broju $\sqrt{2}$. Pretpostavlja se da je opasni broj „otkrio" uspoređujući duljine stranica kvadrata na slici 12. Naime, prema pitagorejcima, sve su veličine (geometrijskih figura iz ljudskog okruženja) sumjerljive, odnosno prikazive u obliku omjera prirodnih brojeva, tj. postoje samo racionalni brojevi!

Primjer 3. *Sveti rez*

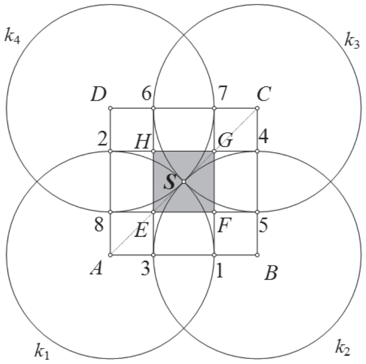
Talijanski renesansni arhitekt Sebastian Sirlio prikazao je konstrukciju tzv. *svetog reza* kao jednu od metoda konstruiranja osmerokuta. Veliki broj poznatih građevina izgrađen je u omjeru *svetog reza*.

- Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat $ABCD$.
- Kvadratu $ABCD$ nacrtajmo dijagonalu $\overline{AC}$.
- Neka je S polovište dijagonale $\overline{AC}$.
- Nacrtajmo kružnice: $k_1\left(A,|AS|\right)$, $k_2\left(B,|AS|\right)$, $k_3\left(C,|AS|\right)$ i $k_4\left(D,|AS|\right)$.
- Kružnica k_1 siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki 1, a stranicu $\overline{DA}$ u točki 2.
- Kružnica k_2 siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki 3, a stranicu $\overline{BC}$ u točki 4.
- Kružnica k_3 siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki 5, a stranicu $\overline{CD}$ u točki 6.
- Kružnica k_4 siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki 7, a stranicu $\overline{DA}$ u točki 8, slika 13.

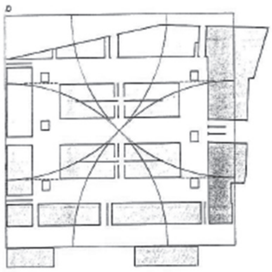


Slika 13.

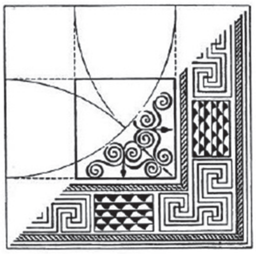
- Nacrtajmo dužine $\overline{17}$, $\overline{36}$, $\overline{24}$ i $\overline{85}$.
- Dužine $\overline{17}$ i $\overline{85}$ sijeku se u točki *F*, $\overline{17}$ i $\overline{24}$ sijeku se u točki *G*, $\overline{36}$ i $\overline{85}$ sijeku se u točki *E*, $\overline{36}$ i $\overline{24}$ sijeku se u točki *H*.
- Kvadrat *EFGH* je kvadrat konstruiran *svetim rezom*, slika 14.



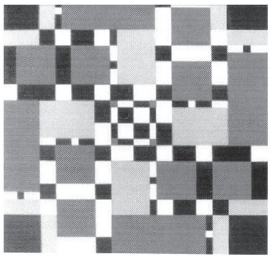
Slika 14.



Slika 15. Sveti rez tlocrta Garden Houses of Ostia



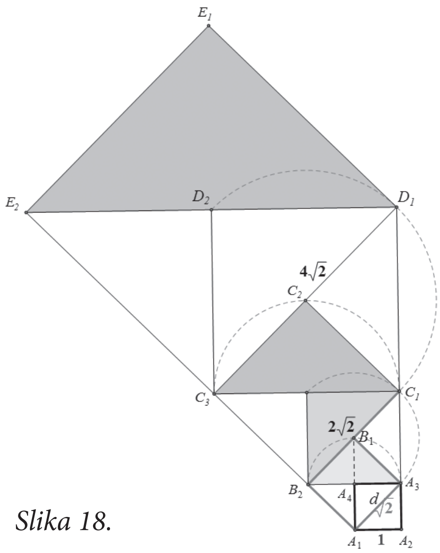
Slika 16. Sveti rez mozaika Garden Houses of Ostia



Slika 17. Sveti rez na grafici Marka Baka

Primjer 4.

Konstrukciju iz **Primjera 1**. ponovimo 4 puta. Pogledajmo rezultat konstrukcije!



Slika 18.

- Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat $A_1A_2A_3A_4$ duljine stranice 1 mjernu jedinicu.
- Duljina dijagonale $\overline{A_1A_3}$ kvadrata $A_1A_2A_3A_4$ je $d=\sqrt{2}$ mjernih jedinica.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat $A_1A_3B_1B_2$ kojemu je duljina stranice $\overline{A_1B_1}$ jednaka duljini dijagonale d kvadrata $A_1A_2A_3A_4$.
- Udvostručena duljina dužina $\overline{B_1B_2}$ je duljina stranice kvadrata $B_2C_1C_2C_3$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat $C_3D_1E_1E_2$.
- Pogledajmo kako se odnose duljine stranica kvadrata i duljine dijagonala kvadrata $A_1A_2A_3A_4$ i $A_1A_3B_1B_2$ (duljina stranice kvadrata $A_1A_2A_3A_4$ označena je a, dok je duljina njegove dijagonale d; duljina stranice kvadrata $A_1A_3B_1B_2$ označena je a_1, dok je duljina njegove dijagonale d_1).
- Vrijedi: $d_1 = 2a = 2, \quad a_1 = d = \sqrt{2}$.
- Nadalje:

$$\frac{a}{d}:\frac{a_1}{d_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a}{a_1}:\frac{d}{d_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a}{d}:\frac{d_1}{a_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Omjeri duljine stranice i duljine dijagonale svakoga od nacrtanih/konstruiranih kvadrata (pri čemu je početni kvadrat $A_1A_2A_3A_4$), kao i omjeri duljina stranica i dijagonala manjih u odnosu na veće kvadrate, može se zapisati:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{2}{2\sqrt{2}}:\frac{2\sqrt{2}}{4}:\frac{4}{4\sqrt{2}}:\frac{4\sqrt{2}}{8}:\cdots$$

Odnosno, iako u svakom koraku konstrukcije povećavamo duljine stranica i dijagonala kvadrata, omjeri duljina stranica i dijagonala ostaju *nepromijenjeni*.

Zadatak 1.

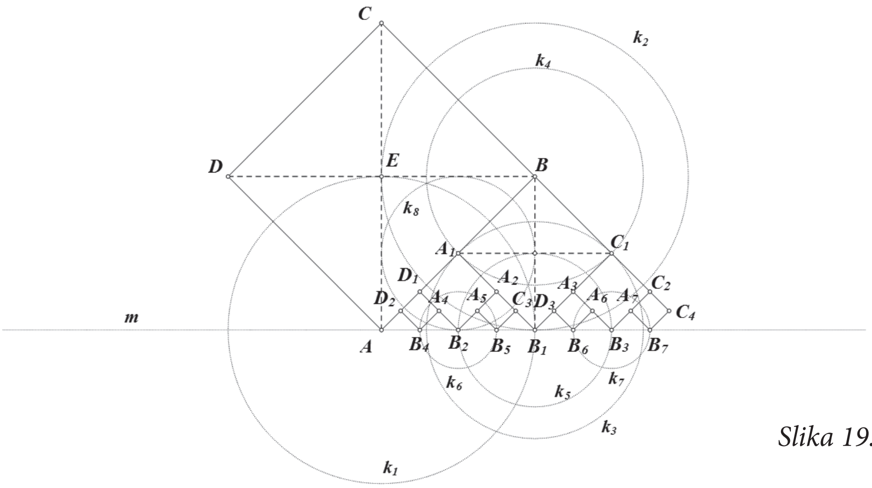
Izračunajte površine nacrtanih/konstruiranih kvadrata iz **Primjera 4**. Usporedite izračunate površine. Zaključak?

Primjer 5.

U **Primjeru 4.** crtali/konstruirali smo kvadrate od manjih k većima, a sada ćemo konstrukciju provoditi obrnuto.

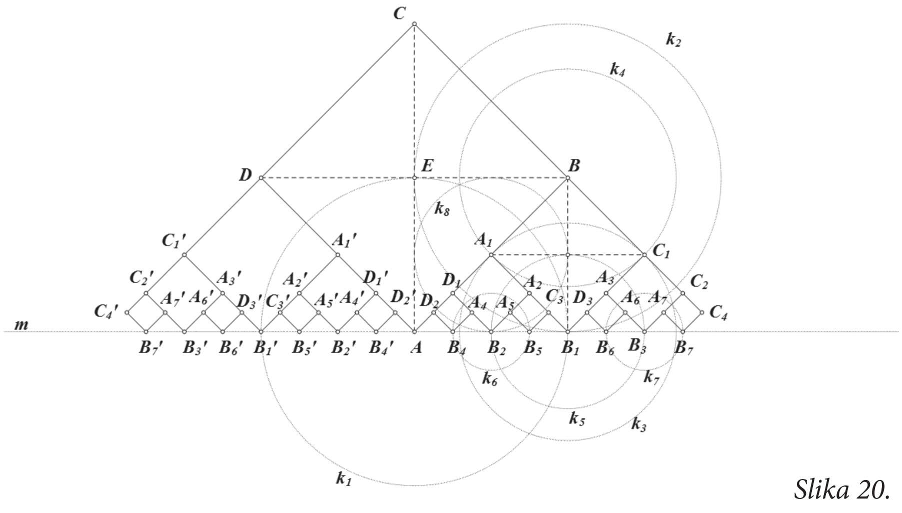
- Nacrtajmo bilo koji kvadrat $ABCD$.

- Dijagonale kvadrata *ABCD* sijeku se u točki *E*.
- Neka je točka A_1 polovište stranice $\overline{AB}$ kvadrata *ABCD*.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrat $A_1B_1C_1$B sa stranicom duljine $\overline{A_1B}$.
- Neka je točka A_2 polovište stranice $\overline{A_1B_1}$, odnosno točka A_3 polovište stranice $\overline{B_1C_1}$ kvadrata $A_1B_1C_1$B.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kvadrate $A_1A_2B_2D_2$ i $A_3B_3C_2C_1$ sa stranicom duljine $\overline{A_1A_2}$.
- Opisani postupak ponavljamo, slika 19.



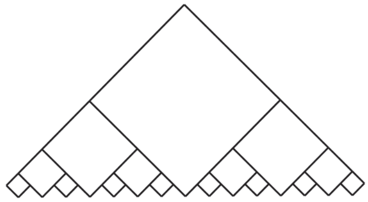
Slika 19.

- Sve nacrtane/konstruirane kvadrate, slika 19., zrcalimo s obzirom na dijagonalu $\overline{AC}$ kvadrata *ABCD*, slika 20.

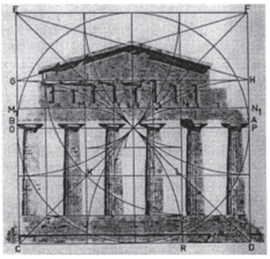


Slika 20.

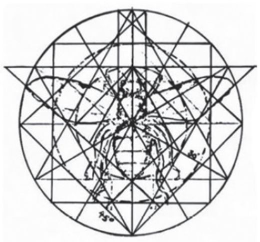
Brisanjem svih oznaka i pomoćnih kružnica, na slici 21. nacrtali/konstruirali smo još jednu geometrijsku figuru povezanu s brojem $\sqrt{2}$.



Slika 21.



Slika 22. Sveti rez Temples of Ceres



Slika 23. U omjeru 1 : $\sqrt{2}$ odnose se dijelovi tijela pčele

Literatura:

1. A. Baragar, *A Survey of Classical and Modern Geometries with Computer Activities*, Prentice – Hall, 2001.
2. R. E. Brown, A. Owens, *Tilted Squares, Irrational Numbers, and the Pythagorean Theorem*, MTMS, Vol. 15, No. 1, August 2009., 57 – 62.
3. P. A. Calter, *Squaring the Circle Geometry in Art and Architecture*, Key College Publishing, 2008.
4. S. Skinner. *Sacred Geometry – Deciphering the Code*, Gaia Books, 2006.
5. R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, I. Kokić, *Tajni zadatak* 008 – udžbenik iz matematike za osmi razred osnovne škole s CD-om, Školska knjiga, Zagreb, 2007.
6. R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, I. Kokić, *Tajni zadatak* 008 – radna bilježnica iz matematike za osmi razred osnovne škole, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

Internetske adrese:

- http://www.mrnorton.com/Chemistry/cartoons.htm/ (13.12.2014.)
- http://onlinerjecnik.com/rjecnik/strane-rijeci/ (13.12.2014.)
- http://nrich.maths.org/2671/ (15.12.2014.)
- http://garakami.com/20130712/visualizing-irrationally-beautiful-numbers/ (27.12.2014.)
- http://www.natures-word.com/sacred-geometry/the-square-root-of-two/the-square-root... (4.12.2014.)
- http://www.tau.ac.il/~corry/teaching/toldot/download/Waerden.pdf/ (14.12.2014.)
- http://e.math.hr/dvoboji/index.html/ (14.12.2014.)
- http://www.constructingtheuniverse.com/Volume4.html/ (22.12.2014.)
- http://acunix.wheatonma.edu/jsklensk/Art_Fall12/inclass/proportion/garden_houses-details.html/ (28.12.2014.)