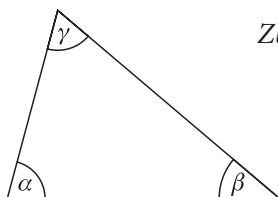


ZAKRIVLJENOST I HIPERBOLIČKE RAVNINE

Eva Belcar, 3. razred, XV. gimnazija

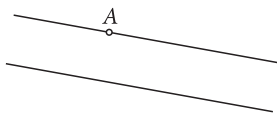
Kada se u školi bavimo geometrijom, na primjer kada crtamo pravce ili trokute, sve je zamišljeno tako da se oni nalaze na ravnoj površini kao što je papir. Takva geometrija naziva se euklidska i za nju vrijede određena pravila. Znete li koliki je zbroj veličina kutova u trokutu? Koliko ima pravaca koji sadrže zadanu točku i paralelni su sa zadanim pravcem? Što vrijedi za paralelne pravce? U euklidskoj geometriji nije teško naći odgovore na ova pitanja.



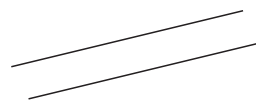
Zbroj veličina kutova u trokutu:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Pravac koji sadrži zadanu točku i paralelan je sa zadanim pravcem:



Paralelni pravci:



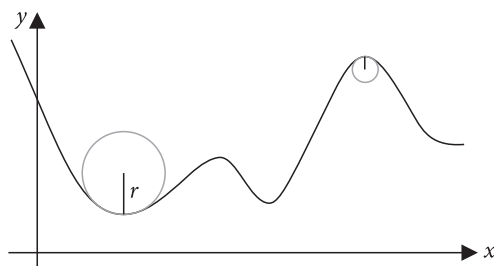
No, pitanje je jesmo li mi zapravo okruženi samo ravnim plohama? Pogledajte oko sebe! Sama Zemlja nije ravna ploha, lopta nije ravna, boce na koje lijepimo etikete nisu ravne nego *zakrivljene* plohe.

Što je to zakrivljenost? Čini se kao vrlo jednostavan pojam, no ima mnoge karakteristike koje su dosta apstraktne upravo zbog toga jer su dio neuklidske geometrije s kojom se ne susrećemo u školi.



Zakrivljene plohe imaju neka svoja specifična svojstva. Opisujemo ih brojem koji zovemo *zakrivljenost*. Veličinu zakrivljenosti možemo računati pomoću polumjera kružnice koja stane u izbočinu neke zakrivljene plohe. Što je





Polumjer kružnice koja stane u udubinu neke zakrivljenosti

taj polumjer veći, zakrivljenost je manja. Na primjer, naranča ima puno manji polumjer od Zemlje, pa zato ima veću zakrivljenost, što možete vidjeti i sami jer se nama Zemlja čini kao ravna ploha, dok nam se naranča čini samo kao zakrivljena ploha. Pri tome razlikujemo pozitivne i negativne zakrivljenosti kao što je prikazano na slici.



Pozitivna zakrivljenost



Negativna zakrivljenost



*Nula zakrivljenost
(nema zakrivljenosti)*

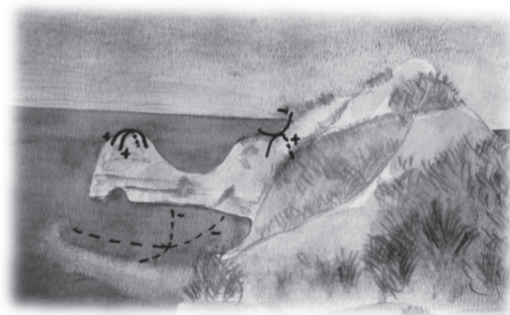
Kako ćemo odrediti je li neka ploha pozitivno ili negativno zakrivljena? Promotrimo primjer banane i naranče. Odaberimo točku na banani i nacrtajmo po površini banane dvije krivulje koje sadrže odabranu točku. Kakve su njihove zakrivljenosti u toj točki? Vidimo da je jedna negativna, a druga pozitivna. Zakrivljenost plohe banane u odabranoj točki računat ćemo tako da pomnožimo ove dvije zakrivljenosti. Budući da je umnožak negativnog i pozitivnog broja negativan, u odabranoj točki banana je negativno zakrivljena.



Kako je u odabranoj točki zakrivljena naranča, pozitivno ili negativno? Zašto? Hoće li se promijeniti zakrivljenost naranče odaberemo li neku drugu točku?

Na sljedećoj slici možete vidjeti nekoliko primjera zakrivljenih ploha. Uočite da množenjem dviju pozitivnih zakrivljenosti dobivamo pozitivno zakrivljenu plohu, množenjem dviju negativnih zakrivljenosti također dobivamo pozitivnu zakrivljenost, ali množenjem jedne pozitivne i jedne negativne zakrivljenosti dobivamo negativno zakrivljenu plohu.





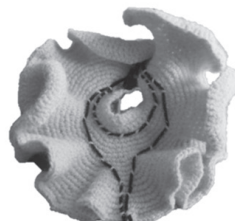
János Bolyai i Nikolaj Ivanovič Lobačevski neovisno su jedan o drugome došli na ideju hiperboličke geometrije u kojoj su promatrali *hiperboličke ravnine*. Hiperboličke ravnine dio su neeuklidske geometrije. U hiperboličkoj ravnini postoje barem dva pravca koji sadrže zadanu točku i paralelni su sa zadanim pravcem. Kako izgledaju hiperboličke ravnine? Možemo ih predočiti kačkanim modelima koje vidite na slici.

Paralelni pravci na hiperboličkoj ravnini:



Paralelne pravce definiramo kao pravce koji se nikada neće sjeći. U euclidskoj geometriji paralelni pravci udaljeni su za istu vrijednost u svim svojim točkama. U hiperboličkim ravninama paralelni se pravci odmiču jedan od drugoga.

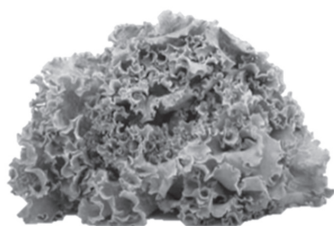
Govorili smo o zbroju veličina kutova trokuta s kojima se susrećete u školi. Trokuti na hiperboličkim ravninama ne izgledaju uobičajeno, a zbroj veličina kutova trokuta tih trokuta manji je od 180° .



Trokuti na kačkanim hiperboličkim ravninama



Hiperbolička geometrija primjenjuje se u mnogim znanostima kao što su kemija i biologija. U kemiji je možemo primijeniti na strukturu različitih elemenata, dok se u biologiji primjenjuje kod gužvanja različitih biljaka (salata) i kod boranja kore mozga. Informatika također primjenjuje hiperboličku geometriju kod prikaza interneta i internetske sigurnosti. Osim u znanostima, pojavljuje se i u umjetnosti upravo zbog svojeg neobičnog oblika i svojih zanimljivih svojstava.



Zelena salata kao primjer hiperboličke ravnine u prirodi



Umjetnost i hiperboličke ravnine



Prikaz interneta i internetske sigurnosti uz pomoć hiperboličkih ravnina

Dragi naši
Matkači želimo Vam
ugodne ljetne praznike

Uredništvo Matke!

