POTENCIJE U ARITMETIČKIM NIZOVIMA

Anđelko Marić, Sinj i Ivica Gusić, Zagreb

Uvod

Nizovi brojeva imaju bogatu i dugu povijest. Najpoznatiji među njima je **niz prirodnih brojeva**:

$$1, 2, 3, 4, 5...$$

na kojemu se zasniva **brojenje**, jedno od najvažnijih čovjekovih dostignuća, koje je svojina i drugih živih bića.

Tu je i **niz parnih brojeva**

$$2, 4, 6, 8, 10...$$

(koji nam dobro dođe kod prebrojavanja kovanica od po dvije kune), te **niz neparnih brojeva**

$$1, 3, 5, 7, 11...$$

(srećemo ga, na primjer, kod kućnih brojeva s jedne strane ulice).

Sve su to primjeri **aritmetičkoga niza**, tj. niza kojemu je **razlika** dvaju uzastopnih članova stalan broj. Kod niza prirodnih brojeva ta je razlika 1:

$$2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 =...= 1,$$

a kod drugih dvaju ona je 2. Naime,

$$4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 =...= 2 \text{ i}$$

$$3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 =...= 2.$$

Vidimo da je aritmetički niz jednoznačno određen svojim **početnim članom** i razlikom.

Na primjer, ako je početni član 7, a razlika 3, onda je riječ o aritmetičkom nizu

$$7, 10, 13, 16...$$

Nisu svi nizovi brojeva aritmetički, primjerice **niz kvadrata prirodnih brojeva**

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2... \text{ tj. niz}$$

$$1, 4, 9, 16, 25...$$

Tu su razlike među susjednim članovima redom 3, 5, 7, 9... Uočite da te razlike čine aritmetički niz. Vidjeli smo da se niz prirodnih brojeva raspada na dva niza: niz parnih brojeva i niz neparnih brojeva. Često je zgodno i nulu

Matka 92N.indd 218 4.5.2015. 8:15:47

uvrstiti u prirodne brojeva, tako da je niz parnih brojeva 0, 2, 4, 6, 8, 10..., što se kraće može zapisati formulom $2n$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5...$, a sam niz parnih brojeva oznakom $\{2n\}$. Slično tome, $\{2n + 1\}$ kraći je zapis niza neparnih brojeva. Parni brojevi su oni koji su djeljivi brojem 2, a neparni oni koji pri dijeljenju brojem 2 imaju ostatak 1. Slično bismo mogli gledati podjelu s obzirom na djeljivost brojem 4, gdje ostatci mogu biti 0 (djeljivost brojem 4), 1, 2 ili 3.

(0) Djeljivi brojem 4:	0, 4, 8, 12, 16, 20...	Zapis $\{4n\}$
(I) Ostatak 1 pri dijeljenju brojem 4:	1, 5, 9, 13, 17, 21...	Zapis $\{4n + 1\}$
(II) Ostatak 2 pri dijeljenju brojem:	2, 6, 10, 14, 18, 22...	Zapis $\{4n + 2\}$
(III) Ostatak 3 pri dijeljenju brojem:	3, 7, 11, 15, 19, 23...	Zapis $\{4n + 3\}$

Uočite da su nizovi (0), (I), (II) i (III) potpuno različiti, tj. nikoja dva nemaju zajedničkih članova, a ukupno čine skup svih prirodnih brojeva (uključujući i 0). Svaki od njih odgovara jednom od ostataka pri dijeljenju brojem 4, tj. brojevima 0, 1, 2 i 3. Ti se nizovi mogu zapisati kao:

$$\{4n\}, \{4n + 1\}, \{4n + 2\} \text{ i } \{4n + 3\}, \text{ za } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5...$$

Razlika u svakome od tih nizova jednaka je 4.

Slično, s obzirom na ostatak pri dijeljenju brojem 5, niz prirodnih brojeva raspada se na pet nizova, svaki s razlikom 5:

$$\{5n\}, \{5n + 1\}, \{5n + 2\}, \{5n + 3\} \text{ i } \{5n + 4\}.$$

Općenito, s obzirom na ostatak pri dijeljenju brojem d, ima d nizova prirodnih brojeva s razlikom d, indeksiranih ostatcima pri dijeljenju brojem d.

Naravno, postoje mnogi aritmetički nizovi čiji članovi nisu prirodni (ili cijeli) brojevi, primjerice, niz $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\pi$, $\sqrt{2}+2\pi$, $\sqrt{2}+3\pi$... (s početnim članom $\sqrt{2}$ i razlikom π). U ovome radu bavit ćemo se nizovima kojima su članovi prirodni brojevi (ili nula).

Kvadrati u aritmetičkim nizovima

Razmotrimo nekoliko prvih članova niza $\{5n + 1\}$:

1, 6, 11, **16**, 21, 26, 31, **36**, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, **81**, 86, 91, 96, 101, 106, 111, 116, **121**, 126, 131, 136, 141, 146, 151, 156, 161, 166, 171, 176, 181, 186, 191, **196**, 201...

Posebno smo istaknuli kvadrate: $1 = 1^2$, $16 = 4^2$, $36 = 6^2$, $81 = 9^2$, $121 = 11^2$, $196 = 14^2$... Vidimo da se razmaci među kvadratima povećavaju, tj. da su kvadrati sve rjeđi. Možemo postaviti pitanje ima li u ovom nizu **konačno** ili

Matka 92N.indd 219 4.5.2015. 8:15:48

beskonačno mnogo kvadrata prirodnih brojeva. Prije odgovora razmotrimo nekoliko članova niza $\{5n + 2\}$:

2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47...

Izgleda da u tome nizu nema kvadrata prirodnih brojeva. Slično je, izgleda, s nizom $\{5n + 3\}$:

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48...

Niz $\{5n + 4\}$ sličan je nizu $\{5n + 1\}$:

4, **9**, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, **49**, 54, 59, **64**, 69, 74, 79, 84, 89, 94, 99, 104, 109, 114, 119, 124, 129, 134, 139, **144**, 149, 154, 159, 164, **169**, 174, 179, 184, 189, 194, 199, 204, 209...

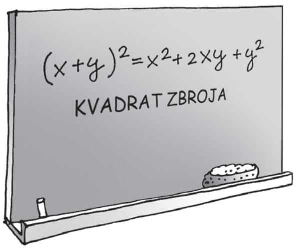
dok je niz $\{5n\}$ vrlo jasan:

0, 5, 10, 15, **25**, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, **100**, 105, 110...

Naime, $5n$ je kvadrat cijelog broja ako i samo ako je n oblika $5k^2$ za $k = 0$, 1, 2, 3...

To uočavamo iz $5n = 5 \cdot 5k^2 = (5k)^2$. Time smo dokazali ne samo to da niz $\{5n\}$ ima beskonačno mnogo kvadrata, već i to da su ti kvadrati oblika $(5k)^2$.

Nije teško dokazati da nizovi $\{5n + 2\}$ i $\{5n + 3\}$ zaista ne sadrže niti jedan kvadrat. Za to je dovoljno uočiti sljedeće jednakosti:



(A) $(5k)^2 = 25k^2 = 5(5k^2)$

(B) $(5k + 1)^2 = (5k)^2 + 2 \cdot 5k \cdot 1 + 1^2 = 5(5k^2 + 2k) + 1$

(C) $(5k + 2)^2 = (5k)^2 + 2 \cdot 5k \cdot 2 + 2^2 = 5(5k^2 + 4k) + 4$

(D) $(5k + 3)^2 = (5k)^2 + 2 \cdot 5k \cdot 3 + 3^2 = 5(5k^2 + 6k) + 9 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4$

(E) $(5k + 4)^2 = (5k)^2 + 2 \cdot 5k \cdot 4 + 4^2 = 5(5k^2 + 8k) +16 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$

Izrečeno drugim riječima:

(A) ako je broj djeljiv brojem 5, i njegov kvadrat je djeljiv brojem 5,

(B) ako broj ima ostatak **1** pri dijeljenju brojem 5, njegov kvadrat ima ostatak **1** pri dijeljenju brojem 5,

(C) ako broj ima ostatak **2** pri dijeljenju brojem 5, njegov kvadrat ima ostatak **4** pri dijeljenju brojem 5,

(D) ako broj ima ostatak **3** pri dijeljenju brojem 5, njegov kvadrat ima ostatak **4** pri dijeljenju brojem 5,

Matka 92N.indd 220 4.5.2015. 8:15:48

(E) ako broj ima ostatak **4** pri dijeljenju brojem 5, njegov kvadrat ima ostatak **1** pri dijeljenju brojem 5.

Dakle, kvadrati imaju ostatke 0, 1 ili 4 pri dijeljenju brojem 5, dok ni 2 ni 3 ne mogu biti ostatci pri dijeljenju nekog kvadrata brojem 5. Zato brojevi oblika $5n + 2$ ili $5n + 3$ ne mogu biti kvadrati.

Jednakosti (B), (C), (D) i (E) ujedno su odgovor na pitanje o kvadratima u nizovima $\{5n + 1\}$ i $\{5n + 4\}$. Naime, brojevi oblika $5n + 1$ nastaju samo u slučajevima (B) i (E). To se može zapisati u obliku tvrdnje:

U nizu $\{5n + 1\}$ ima beskonačno mnogo kvadrata. Broj oblika $5n + 1$ je kvadrat ako i samo ako je oblika $(5k + 1)^2$ ili $(5k + 4)^2$, $k = 0, 1, 2, 3…$

Prvi oblik imaju **1, 36, 121, 256** itd., dok drugi imaju **16, 81, 196, 361** itd. i oni se dobiju ako u gornje izraze uvrstimo redom $k = 0, 1, 2, 3...$ Lako se provjeri da ovi kvadrati zaista imaju ostatak 1 pri dijeljenju brojem 5. Ako želimo neki veliki broj koji je kvadrat i ujedno pri dijeljenju brojem 5 ima ostatak 1, u neki od gornjih izraza uvrstimo velik k, primjerice $k = 100$. Iz prvog izraza dobijemo $501^2 =$ **251 001**, a iz drugoga $504^2 =$ **254 016**. Provjerite ostatak!

Sličnu bismo tvrdnju mogli izreći za brojeve oblika $5n + 4$.

U nizu $\{5n + 4\}$ ima beskonačno mnogo kvadrata. Broj oblika $5n + 4$ je kvadrat ako i samo ako je oblika $(5k + 2)^2$ ili $(5k + 3)^2$, $k = 0, 1, 2, 3...$

Sve vrijedi i općenito.

Ako aritmetički niz $\{dn + b\}$, $n = 0, 1, 2, 3...$ sadrži barem jedan kvadrat, onda on sadrži beskonačno mnogo kvadrata. Jedan niz kvadrata u tom nizu je oblika $(dk + y)^2$, gdje je y^2 jedan kvadrat što ga taj niz sadrži i $k = 0, 1, 2, 3...$

U slučaju $d = 5$ razmatrali smo pet relacija (A), (B), (C), (D), (E) i iz njih izveli zaključak. Ovdje bi bilo d sličnih relacija, gdje d može biti bilo koji broj, pa ćemo postupiti malo mudrije. Sve se zasniva na jednostavnoj formuli za kvadriranje zbroja

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Ako u nju uvrstimo $x = dk$, dobit ćemo $(dk + y)^2 = d^2 k^2 + 2dky + y^2$

Zato, ako je $y^2 = dr + b$ za neki r (tj. ako niz $\{dn + b\}$ sadrži neki kvadrat), onda je $(dk + y)^2 = d^2k^2 + 2dky + dr + b = d(dk^2 + 2ky + r) + b$, što je, opet, član niza $\{dn + b\}$. To vrijedi za sve $k = 0, 1, 2, 3...$ pa niz $\{dn + b\}$ ima beskonačno mnogo kvadrata.

Formulu iz ovoga dokaza provjerit ćemo na primjeru niza $\{5n + 1\}$ i kvadrata 1 u tome nizu. Tu je $d = 5$, $b = 1$, $r = 0$ i $y = 1$, pa je $(dk + y)^2 = (5k + 1)^2$, kao što smo i prije imali.

Matka 92N.indd 221 4.5.2015. 8:15:48

Općenito, sve kvadrate u nekom aritmetičkom nizu možemo zapisati pomoću jedne ili više formula oblika $(dk + y)^2$. Za $d = 5$ dovoljne su po dvije takve formule, međutim općenito nije tako. Pokušajte pronaći formule za kvadrate u aritmetičkim nizovima za neke druge razlike d. Pokušajte problem kvadrata u aritmetičkim nizovima zahvatiti **računalom**. Naročito je ilustrativan primjer $d = 24$, tj. primjer nizova oblika $24n + b$, za $b = 0, 1, 2, 3..., 23$. Tu od osam b-ova relativno prostih s 24 (tj. od brojeva 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23) samo niz $\{24n + 1\}$ sadrži kvadrate. Za opis svih kvadrata u tom nizu potrebno je 8 formula oblika $(24k + b)^2$.

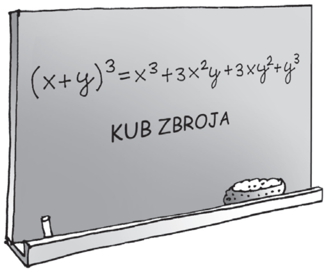
Kubovi u aritmetičkim nizovima

Razmotrimo, opet, nekoliko prvih članova niza $\{5n + 1\}$, samo sada istaknimo **kubove** prirodnih brojeva u njemu:

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, 86, 91, 96, 101, 106, 111, 116, 121, 126, 131, 136, 141, 146, 151, 156, 161, 166, 171, 176, 181, 186, 191, 196, 201...

U popisu ima samo jedan kub, broj 1, što ne znači da u tom nizu nema više kubova. Ako vrijedi tvrdnja analogna onoj za kvadrate, trebalo bi ih biti beskonačno mnogo. Pokušajmo odrediti analognu formulu, i to za svaku razliku, a ne samo za $d = 5$. Tu će nam trebati formula za kub zbroja:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$



Ako u tu formulu stavimo $x = dk$ i $y^3 = dr + 1$, dobijemo $(dk + y)^3 = (dk)^3 + 3(dk)^2y + 3dky^2 + dr + 1 = d(k(dk)^2 + 3k(dk)y + 3ky^2 + r) + 1$, što je, opet, oblika $dn + 1$, za svaki k, pa niz $\{dn + 1\}$ sadrži beskonačno mnogo kubova.

U našem slučaju je $d = 5$, $r = 0$, $x = 1$, pa je formula za kubove $(5k + 1)^3$ za $k = 0, 1, 2, 3...$

Za $k = 0$ dobivamo $1^3 = \mathbf{1}$, što već imamo, za $k = 1$ dobivamo $(5 \cdot 1 + 1)^3 = \mathbf{216} = 5 \cdot 45 + 1$, za $k = 2$ dobivamo $11^3 = \mathbf{1221}$ itd.

Matka 92N.indd 222 4.5.2015. 8:15:48

Ovdje i u nizu $\{5n + 2\}$ ima beskonačno mnogo kubova. Naime, sjetimo se nekoliko prvih članova toga niza: 2, 7, 12, 17, 22, **27**, 32, 37, 42, 47...

Tu smo posebno istaknuli broj 27 jer je $27 = 3^3$. Koristeći se time i našom formulom, dobivamo da su brojevi $(5k + 3)^3$ kubovi u nizu $\{5n + 2\}$.

Zaista, za $k = 0$ dobijemo $3^3 = \mathbf{27}$, što već imamo, za $k = 1$ dobijemo $8^3 = \mathbf{512} = 5 \cdot 102 + 2$, za $k = 2$ dobijemo $13^3 = \mathbf{2197} = 5 \cdot 439 + 2$ itd. Vidimo da bi prvih 10 takvih kubova bilo vrlo teško odrediti bez uporabe gornje formule (ili računala).

Slične formule možete naći i za ostale nizove s razlikom 5. Razlog tomu je to što kubovi mogu imati sve ostatke pri dijeljenju brojem 5 (0 ima ostatak 0, 1 ostatak 1, 8 ostatak 3, 27 ostatak 2 i 64 ostatak 4). Zato u svakome od ovih nizova kubove određujemo s po jednom formulom. Na primjer, svi su kubovi u nizu $\{5n + 3\}$ oblika $(5k + 2)^3$.

To nije, u potpunosti, slučaj s razlikom $d = 4$. Naime, kub ne može biti oblika $4n + 2$ (dokažite). Naprotiv, niz $\{4n\}$ ima beskonačno mnogo kubova (jer je kub 8 član toga niza), nizovi $\{4n + 1\}$ i $\{4n + 3\}$ također (prvi sadrži kub 1, a drugi kub 27). Zato su svi kubovi u nizu $\{4n + 1\}$ oblika $(4k + 1)^3$, a u nizu $\{4n + 3\}$ oblika $(4k + 3)^3$. Sličnim postupkom dobivamo dvije formule za kubove u nizu $\{4n\}$, međutim njih možemo objediniti u jednu: $(2k)^3$ (obrazložite).

Pokušajte formulama i računalom opisati kubove u nekim drugim aritmetičkim nizovima (naročito je ilustrativan primjer s $d = 9$).

Formulirajmo napokon tvrdnju analognu onoj za kvadrate.

Ako aritmetički niz $\{dn + b\}$, $n = 0, 1, 2, 3...$ sadrži barem jedan kub, onda on sadrži beskonačno mnogo kubova. Jedan niz kubova u tome nizu je oblika $(dk + y)^3$, gdje je y^3 jedan kub što ga taj niz sadrži i $k = 0, 1, 2, 3...$

Potencije u aritmetičkim nizovima

Što je vrijedilo za kvadrate i kubove, vrijedi i za opću potenciju x^s (do sad smo razmatrali slučajeve $s = 2$ i $s = 3$).

Ako aritmetički niz $\{dn + b\}$, $n = 0, 1, 2, 3...$ sadrži barem jednu s-tu potenciju, onda on sadrži beskonačno mnogo s-tih potencija. Jedan niz s-tih potencija u tome nizu je oblika $(dk + y)^s$, gdje je y^s jedna s-ta potencija što je taj niz sadrži i $k = 0, 1,2, 3...$

Ta tvrdnja proizlazi iz formule za $(x + y)^s$ koju tu sad nećemo pisati (**binomna formula**). Lakše nam je to izvesti iz sljedećih formula za **razliku po-**

tencija koje se mogu provjeriti izravnim računanjem (taj smo argument mogli primijeniti i prije jer je lakši od onoga s binomnom formulom).

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$
$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

i općenito

$$x^s - y^s = (x - y)(x^{s-1} + x^{s-2}y + ... + xy^{s-2} + y^{s-1})$$

Ako sad stavimo $x = dk + y$, dobijemo da je

$$(dk + y)^s - y^s = (dk + y - y)A = dkA \quad (*),$$

gdje je A cjelobrojan izraz.

Ako je, nadalje, $y^s = rd + b$ za neki r, tj. ako niz $\{dn + b\}$ sadrži s-tu potenciju, stavljajući to u jednakost (*) dobijemo

$$(dk + y)^s = dkA + dr + b = d(kA + r) + b,$$

što je oblika $dn + b$, pa je s-ta potencija $(dk + y)^s$ član niza $\{dn + b\}$ za svaki $k = 0, 1, 2, 3...$ Tako dobijemo beskonačno mnogo s-tih potencija u nizu $\{dn + b\}$. Podsjetimo, to je bilo uz uvjet da ima barem jedna s-ta potencija u tome nizu.

Ilustrirajmo sve na jednome primjeru. Zanimaju nas pete potencije u nizu $\{59n + 7\}$. Zato napišimo nekoliko prvih članova tog niza:

7, 66, 125, 184, **243**...

Kako je $243 = 3^5$, taj niz sadrži bar jednu petu potenciju pa ih treba sadržavati beskonačno mnogo. Sada bismo se namučili pokušavajući naći sljedeću (bez uporabe računala). Zato iskoristimo prethodnu tvrdnju da svaka peta potencija oblika $(59k + 3)^5$ mora biti član toga niza.

Uvrstimo $k = 1$ (jer se za $k = 0$ dobije 243, a to već imamo) i dobijemo da je 62^5 = **916 132 832** član niza $\{59n + 7\}$. Za provjeru dijelimo s 59 i dobijemo 15 527 675 i ostatak 7, što smo i tvrdili. Koristeći se računalom, provjerite da u nizu $\{59n + 7\}$ nema ni jedna peta potencija između **243** i **916 132 832**. Pokušajte obrazložiti zašto je tako. Bismo li i računalom mogli dobiti decimalne zapise prvih sto petih potencija u gornjem nizu? Tu bismo se sigurno namučili, međutim, pomoću formule $(59k + 3)^5$ lako bismo ih ispisali!

Matka 92N.indd 224 4.5.2015. 8:15:49