

Stručni rad

Prihvaćeno 15. 9. 2015.

IVA KODRNJA
ELIZABETA ŠAMEC

Familija ploha Heltocat

Family of Surfaces Heltocat

ABSTRACT

In this paper the Heltocat family of surfaces is defined according to [5]. It is shown that the surfaces defined by the family are minimal and form an isometric deformation from the helicoid to the catenoid. The visualizations and computations were made by using the programs *Sage* and *Mathematica*.

Key words: minimal surface, Gaussian curvature, mean curvature, Heltocat family of surfaces

MSC2010: 53A05, 53A10

Familija ploha Heltocat

SAŽETAK

U radu je prema [5] definirana familija ploha Heltocat. Za plohe iz definirane familije se pokazuje da su minimalne i da čine izometričnu deformaciju od helikoida do katenoida. Za vizualizaciju ploha i račune su korišteni programi *Sage* i *Mathematica*.

Ključne riječi: minimalna ploha, Gaussova zakrivljenost plohe, srednja zakrivljenost plohe, familija ploha Heltocat

Ovaj se članak temelji na seminarskom radu kojeg je pod voditeljstvom doc. dr. sc. Sonje Gorjanc, u okviru kolegija Diferencijalna geometrija na poslijediplomskom studiju Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, izradila studentica Elizabeta Šamec.

1 Uvod

Neka je $U \subset \mathbb{R}^2$ otvoren i povezan skup te neka je vektorska funkcija $\vec{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dana formulom:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad (1)$$

gdje su $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$ realne funkcije klase $C^1(U)$. Fiksirajmo $(u_0, v_0) \in U$. Krivulje $u \rightarrow \mathbf{r}(u, v_0)$ zovu se u -krivulje, dok se krivulje $v \rightarrow \mathbf{r}(u_0, v)$ zovu v -krivulje parametrizacije \mathbf{r} .

Skup točaka euklidskog prostora

$$\mathcal{M} = \{T \in \mathbb{R}^3 \mid T = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U\},$$

nazivamo *plohom*, a uređeni par (U, \mathbf{r}) *parametrizacijom plohe* \mathcal{M} . Ploha \mathcal{M} može se zadati i s tri parametarske jednačbe:

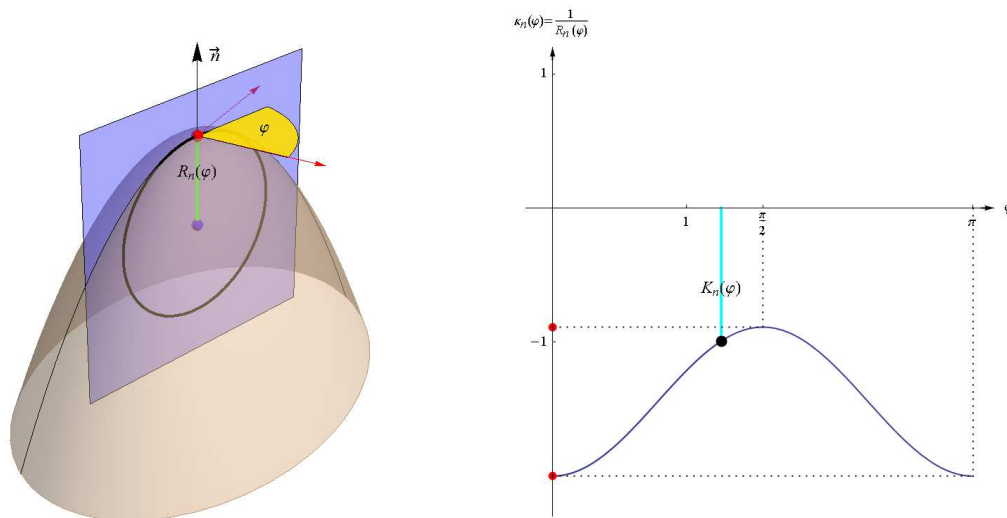
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (2)$$

gdje su $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne skalarne funkcije iz izraza (1), [8].

Točka plohe je *regularna* ako u njoj postoji jedinstvena dirna (tangencijalna) ravnina. Za regularnu točku $T \in \mathcal{M}$ tangencijalna ravnina sadrži tangente s diralištem u T svih onih krivulja koje leže na plohi \mathcal{M} i prolaze točkom T . Točke plohe u kojima takve tangente ne formiraju ravninu nazivamo *singularnim* točkama plohe. *Normala* plohe \mathcal{M} u njenoj regularnoj točki T je pravac kroz T koji je okomit na tangencijalnu ravninu plohe u točki T . Ravnine koje sadrže normalu n plohe \mathcal{M} u regularnoj točki T nazivamo *ravninama normalnih presjeka* kroz T . Presjek ravnine normalnog presjeka s plohom je neka krivulja na plohi.

U točki T zakrivljenost krivulje normalnog presjeka određenog tangentom t nazivamo *normalnom zakrivljenošću* plohe u smjeru tangente t u točki T i označavamo ju K_t . Funkciju $K : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $K(\varphi) = K_t$, koja za točku $T \in \mathcal{M}$ svakom smjeru tangente pridružuje zakrivljenost odgovarajućeg normalnog presjeka nazivamo *funkcijom normalne zakrivljenosti* plohe \mathcal{M} u regularnoj točki T . *Glavne zakrivljenosti* K_1 i K_2 plohe \mathcal{M} u njenoj regularnoj točki T su minimum i maksimum funkcije $K(\varphi)$, [4].

Tangente u ravninama normalnog presjeka za koje je normalna zakrivljenost ekstremna nazivamo *glavnim smjеровima* plohe u točki T i označavamo p_1 i p_2 , a krivulje koje su presjek njihovih ravnina normalnog presjeka i plohe nazivamo *glavne krivulje* u točki T . Primjer su meridijani i paralele rotacijskih ploha.

Slika 1: *Funkcija normalne zakrivljenosti* [10]

Za normalnu zakrivljenost u smjeru t vrijedi relacija

$$K(\varphi) = K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi,$$

gdje je φ kut između tangente t i glavnog smjera p_1 (vidi sliku 1).

Tangente u ravninama normalnog presjeka za koje je normalna zakrivljenost jednaka 0 nazivamo *asimptotski smjerovi* plohe. Asimptotske krivulje na plohi su one kojima su tangente asimptotski smjerovi. Primjer asimptotskih linija su pravci na plohama.

Srednja zakrivljenost plohe u njenoj točki T definirana je pomoću glavnih zakrivljenosti plohe K_1 i K_2 sljedećom formulom

$$H(T) = \frac{1}{2}(K_1(T) + K_2(T)). \quad (3)$$

U singularnim točkama srednja zakrivljenost nije definirana.

Gaussova (potpuna ili *totalna*) zakrivljenost plohe u točki T odgovara produktu glavnih zakrivljenosti,

$$G(T) = K_1(T) \cdot K_2(T).$$

Ploha je u prostoru jednoznačno određena lokalnim invarijantnim veličinama koje se zovu *prva* i *druga diferencijalna forma*. Prva diferencijalna forma služi za mjerenja na plohi kao što su duljina luka, kut između dviju krivulja plohe, površina omeđenog dijela plohe i sl. Prema [1], prvu diferencijalnu formu možemo preko duljine luka definirati s

$$I = ds^2 = (d\mathbf{r})^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

gdje je $\mathbf{r}(u, v)$ vektorska funkcija koja određuje plohu, a koeficijenti prve diferencijalne plohe tj. Gaussove osnovne veličine prvog reda su određene s

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_u^2 = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \\ F &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \\ G &= \mathbf{r}_v^2 = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v. \end{aligned} \quad (4)$$

Druga diferencijalna ploha može nam dati odgovor na pitanje kakvog je oblika ploha u okolini neke točke na njevoj površini proučavanjem svojstava krivulja na plohi koje prolaze tom točkom. Definirana je s

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Koeficijenti druge diferencijalne plohe tj. Gaussove osnovne veličine drugog reda određeni su preko Weingartenove funkcije W koja je prema uvjetu regularnosti u svakoj točki različita od 0, pa slijedi

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{W} [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu}], \\ M &= \frac{1}{W} [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}], \\ N &= \frac{1}{W} [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}], \quad W = \sqrt{EG - F^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

gdje $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ označava mješoviti produkt vektora \mathbf{a} , \mathbf{b} i \mathbf{c} .

Znajući kako su definirani koeficijenti prve i druge diferencijalne forme, srednju zakrivljenost plohe H zapisujemo kao

$$H(T) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \quad (6)$$

Gaussovu zakrivljenost preko koeficijenata prve i druge diferencijalne forme možemo zapisati

$$G(T) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Lokalna izometrija $f: \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$ je preslikavanje među plohami koje čuva mjerenja na plohami. Lokalnu izometriju zamišljamo kao preslikavanje koje savija plohe, ali pritom čuva unutarnju udaljenost između točaka. Lokalna izometrija čuva skalarni produkt i normu tangencijalnih vektora, odnosno Gaussove osnovne veličine prvog reda [11]. Vrijedi i obrat. Ako je $\mathbf{r}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna injektivna parametrizacija od \mathcal{M} i $\overline{\mathbf{r}}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizacija od $\overline{\mathcal{M}}$, tada je preslikavanje $f = \overline{\mathbf{r}} \circ \mathbf{r}^{-1}$ lokalna izometrija ako i samo ako vrijedi

$$E = \overline{E}, \quad F = \overline{F}, \quad G = \overline{G}. \quad (7)$$

2 Minimalna ploha

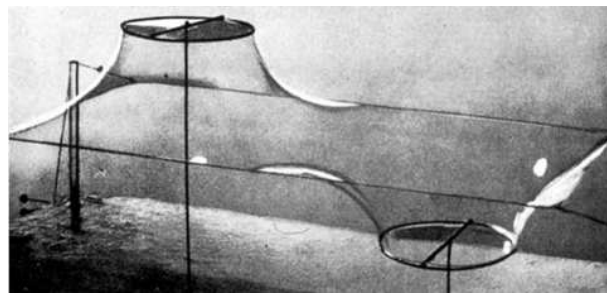
Ukoliko je srednja zakrivljenost plohe jednaka nuli ($H = 0$) plohu nazivamo *minimalnom* plohom. Za minimalnu plohu vrijedi da je $K_1 = -K_2$. Minimalna ploha, parametrizirana u obliku $(x, y, f(x, y))$, zadovoljava Lagrangeovu nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Rješavanjem Lagrangeove jednadžbe možemo dobiti ravninu kao trivijalno rješenje (najjednostavniju minimalnu plohu) ili neko od netrivialnih rješenja. Prva netrivialna rješenja, katenoid i helikoid, dobivena su u 18. stoljeću. Danas pomoću računala i simboličkih matematičkih programa možemo dobiti niz analitički definiranih minimalnih ploha odnosno rješenja Lagrangeove jednadžbe. Kao pojednostavljenje, za plitke plohe, Lagrangeova se jednadžba može aproksimirati linearnom, Laplaceovom jednadžbom

$$f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Ipak, u građevinarstvu se takve plohe rijetko koriste zbog minimalnog odstupanja od ravnine uslijed kojeg nemaju dovoljnu zakrivljenost ni geometrijsku krutost u smjeru okomitom na plohu. Minimalne plohe koje koristimo u građevinarstvu, u prirodi se javljaju kao oblici koje poprima opna od sapunice razapeta na žicu savijenu u zadanu prostornu krivulju. Opna će uvijek poprimiti najmanju površinu od svih ploha koje zadovoljavaju iste rubne uvjete. Prije nego što je numerička analiza postala moguća razvojem računala, ova se pojava koristila u izradi fizikalnih modela.



Slika 2: Fizikalni model konstrukcije od sapunice
(slika preuzeta sa stranice [12])

Na minimalnoj su plohi naprezanja jednaka u svakoj točki i u svim smjerovima tangencijalne ravnine uslijed čega je i nosivost materijala svuda jednoliko iskorištena [6].

3 Helikoid

Ako zamislimo točku na uspravnom kružnom valjku kako jednoliko kruži oko njegove osi, a istovremeno se jednoliko giba u smjeru te osi dobit ćemo krivulju koju nazivamo *kružna zavojnica*, a u parametarskom obliku možemo ju zapisati

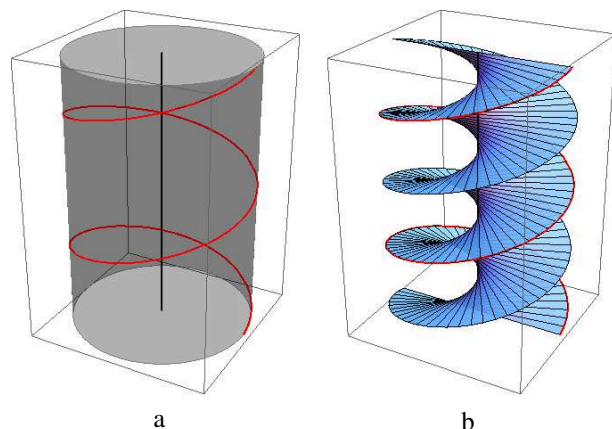
$$x(u) = a \cos u, \quad y(u) = a \sin u, \quad z(u) = bu, \\ u \in \mathbb{R}, a > 0, b \neq 0,$$

gdje je a polumjer zavojnice (polumjer valjka), a $2b\pi$ korak zavojnice. *Korak* ili *visina hoda* zavojnice je visinska razlika dviju njezinih točaka koje leže na istoj izvodnici valjka, a parametri u im se razlikuju za 2π .

Zavojnica je *geodetska linija* valjka tj. ona je najkraća linija na valjku koja spaja njegove dvije točke, ukoliko te točke ne leže na istoj izvodnici valjka.

Normale zavojnice koje ortogonalno sijeku zavojnu os (glavne normale) tvore uspravnu pravčastu plohu koju nazivamo *helikoid*. Helikoid je uz ravninu jedina pravčasta minimalna ploha, [5]. Pravci koji leže na helikoidu su asimptotske linije te plohe - linije duž kojih je normalna zakrivljenost jednaka 0. Parametarske jednadžbe ove plohe su

$$x(u, v) = av \cos u, \quad y(u, v) = av \sin u, \quad z(u, v) = bu, \quad (8) \\ (u, v) \in \mathbb{R}^2, a > 0, b \neq 0.$$



Slika 3: Zavojnica na valjku (a) i toj zavojnici pridružen helikoid (b)

Za točku (u_0, v_0) , zavojnica polumjera av_0 je u -linija helikoida, dok su v -linije helikoida pravci.

Pomoću formula (4) i (5) možemo za helikoid određen jednačbama (8) izračunati Gaussove osnovne veličine prvog i drugog reda

$$E = a^2v^2 + b^2, \quad F = 0, \quad G = a^2, \\ L = 0, \quad M = \frac{a^2b}{\sqrt{a^4v^2 + a^2b^2}}, \quad N = 0. \quad (9)$$

Prema izrazu (6) slijedi da je srednja zakrivljenost jednaka nuli čime je dokazano da je helikoid minimalna ploha.

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 helikoida u točki $T(u, v)$ su suprotnih vrijednosti i iznose

$$K_1, K_2 = \pm \frac{a}{a^2 + u^2}.$$

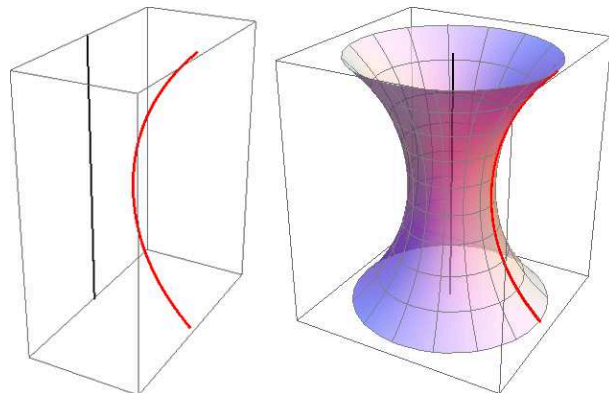
4 Katenoid

Nit ovješena o dvije nepomične točke na horizontalnom razmaku i opterećena vertikalnim raspodijeljenim opterećenjem po cijeloj duljini u ravnotežnom položaju zauzima zakrivljeni oblik koji nazivamo *lančanica*, [9]. Jedan od klasičnih zadataka računa varijacija je traženje krivulje koja spaja dvije zadane točke i čijom se rotacijom oko danog pravca dobije ploha minimalne površine. Euler je 1744. pokazao da je ta krivulja lančanica, a rotacijska ploha koja nastaje naziva se *katenooid*. Ako u ravnini uz lančanicu zadamo parametarskim jednačbama

$$y(v) = a \cosh \frac{v}{a}, \quad z(v) = v, \quad v \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

njezinom rotacijom oko osi z nastat će katenoid dan sljedećim parametarskim jednačbama:

$$x(u, v) = a \cosh \frac{v}{a} \cos u \\ y(u, v) = a \cosh \frac{v}{a} \sin u \\ z(u, v) = v, \quad (u, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (10)$$



Slika 4: Katenoid nastaje rotacijom lančanicke

Katenoid je rotacijska ploha, njegovi meridijani (lančanice) te paralele (kružnice) su glavne krivulje te plohe - krivulje duž kojih je normalna zakrivljenost ekstremna. One su ujedno i u -linije odnosno v -linije plohe, a to znači da je parametrizacija (10) takozvana glavna parametrizacija.

Ukoliko je parametrizacija katenoida zadana jednačbom (10), osnovne veličine prvog reda mogu se izračunati kako je prikazano u uvodu i iznose:

$$E = a^2 \cosh^2 \frac{v}{a}, \quad F = 0, \quad G = \cosh^2 \frac{v}{a}, \quad (11) \\ L = \frac{1}{a}, \quad M = 0, \quad N = -a \cosh^2 \frac{v}{a} \operatorname{sech}^2 \frac{v}{a}.$$

Vrijedi $H = 0$, odnosno katenoid je minimalna ploha. Katenoid je, uz ravninu, jedina rotacijska ploha koja je minimalna, [5].

5 Pridružena familija minimalne plohe

Poznat je rezultat da svaka ploha konstantne srednje zakrivljenosti dopušta izometričnu deformaciju, tj. postoji familija izometričnih ploha u koju je uključena takva ploha kao što se može naći u [3]. Plohe konstantne srednje zakrivljenosti (posebno su tu uključene minimalne plohe) spadaju u kategoriju takozvanih *Bonnetovih ploha* koje su proučavane još u 19. stoljeću, [2]. Prateći [5], poglavlje 31, opisat ćemo metodu kojom se svaka minimalna ploha

ulaže u familiju izometričnih minimalnih ploha, njoj pridruženu familiju i pogledati kako ta familija izgleda za helikoid odnosno katenoid.

Za parametrizaciju $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, U \subset \mathbb{R}^2$ definiramo sljedeće:

1. \mathbf{r} je *izotermalna* parametrizacija ako vrijedi

$$\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_v \mathbf{r}_v = \lambda^2, \quad \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = 0,$$

pri čemu je $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija.

2. \mathbf{r} je *harmonička* parametrizacija ako vrijedi

$$\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0.$$

3. Harmoničku izotermalnu parametrizaciju nazivamo *minimalna izotermalna parametrizacija*. Regularna minimalna izotermalna parametrizacija definira minimalnu plohu i svaka minimalna ploha ima minimalnu izotermalnu parametrizaciju.

Primjer regularne izotermalne parametrizacije je parametrizacija katenonida (10) za $a = 1$ (označimo ju s \mathbf{k}), budući da vrijedi

$$\mathbf{k}_u \mathbf{k}_u = \mathbf{k}_v \mathbf{k}_v = \cosh^2 v, \quad \mathbf{k}_u \mathbf{k}_v = 0.$$

Parametrizacija helikoida (8) nije niti izotermalna niti harmonička. No, znamo da je helikoid minimalna ploha, prema tome postoji minimalna izotermalna parametrizacija. Ako uvedemo zamjenu varijabli

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = a \sinh v$$

u (8) dobivamo novu parametrizaciju helikoida:

$$\bar{\mathbf{h}}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, bu), \quad b \neq 0. \quad (12)$$

Ova parametrizacija je minimalna izotermalna za $a^2 = b^2$ i vrijedi

$$\bar{\mathbf{h}}_u \bar{\mathbf{h}}_u = \bar{\mathbf{h}}_v \bar{\mathbf{h}}_v = a^2 \cosh^2 v, \quad \bar{\mathbf{h}}_u \bar{\mathbf{h}}_v = 0.$$

Parametrizacije \mathbf{r} i \mathbf{s} zadovoljavaju *Cauchy-Riemannove uvjete* ako vrijedi

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{s}_v \quad \text{i} \quad \mathbf{r}_v = -\mathbf{s}_u,$$

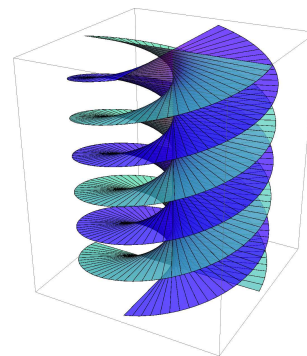
a takve parametrizacije nazivamo *konjugirano harmoničke*.

Ukoliko reparametrizirani helikoid (12) rotiramo za $\frac{\pi}{2}$ primjenom matrice transformacije

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dobit ćemo parametrizaciju rotiranog helikoida:

$$\bar{\mathbf{h}}^R(u, v) = (a \sin u \sinh v, -\cos u \sinh v, bu), \quad b \neq 0. \quad (13)$$



Slika 5: Svijetloplavi helikoid (8) i tamnoplavi rotirani reparametrizirani helikoid (13)

Parametrizacija (13) i parametrizacija \mathbf{k} katenoida (10) za $a = 1$ su konjugirano harmoničke parametrizacije budući da vrijedi

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}_u^R &= \mathbf{k}_v = (\cos u \sinh v, \sin u \sinh v, 1), \\ \bar{\mathbf{h}}_v^R &= -\mathbf{k}_u = (\sin u \cosh v, -\cos u \cosh v, 0). \end{aligned}$$

U [5] je opisana metoda koja bilo kojoj minimalnoj izotermalnoj parametrizaciji nalazi njoj konjugirano harmoničku. Za parametrizaciju (10) tom metodom se dobiva točno parametrizacija (13).

Ako su \mathbf{r} i \mathbf{s} konjugirano harmoničke izotermalne parametrizacije, tada definiramo 1-parametarsku familiju ploha $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ s parametrizacijama

$$\mathcal{R}(t) = \cos t \mathbf{r} + \sin t \mathbf{s} \quad (14)$$

koju nazivamo *pridružena familija ploha*. Preslikavanje $t \rightarrow \mathcal{R}(t)$ je izometrička deformacija - sve plohe u familiji $\mathcal{R}(t)$ su minimalne i imaju istu prvu fundamentalnu formu, tj. lokalno su izomorfne.

6 Familija Heltocat

Heltocat je uređena familija ploha $\mathcal{H}(t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ danih sljedećim parametarskim jednadžbama:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \cos t \sinh v \sin u + \sin t \cosh v \cos u, \\ y(u, v) &= -\cos t \sinh v \cos u + \sin t \cosh v \sin u, \\ z(u, v) &= \cos t u + \sin t v, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (15)$$

Ukoliko varijablu t izjednačimo s 0, funkcija *heltocat* daje helikoid koji odgovara rotiranom reparametriziranom helikoidu ($a = 1, b = 1$) definiranom izrazom (12). Za $t = \frac{\pi}{2}$ *heltocat* prelazi u katenoid ($a = 1$) definiran izrazom

(10). (Time je objašnjen naziv ove familije - **helicoid to catenoid**). Ova familija je pridružena familija helikoida odnosno katenoida u smislu definicije (14).

Osnovne veličine prvog i drugog reda za $\mathcal{H}(t)$ su

$$E = \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = \cosh^2 v,$$

$$L = -\cosh^2 v \operatorname{sech}^2 v \sin t, \quad M = \cosh^2 v \operatorname{sech}^2 v \cos t,$$

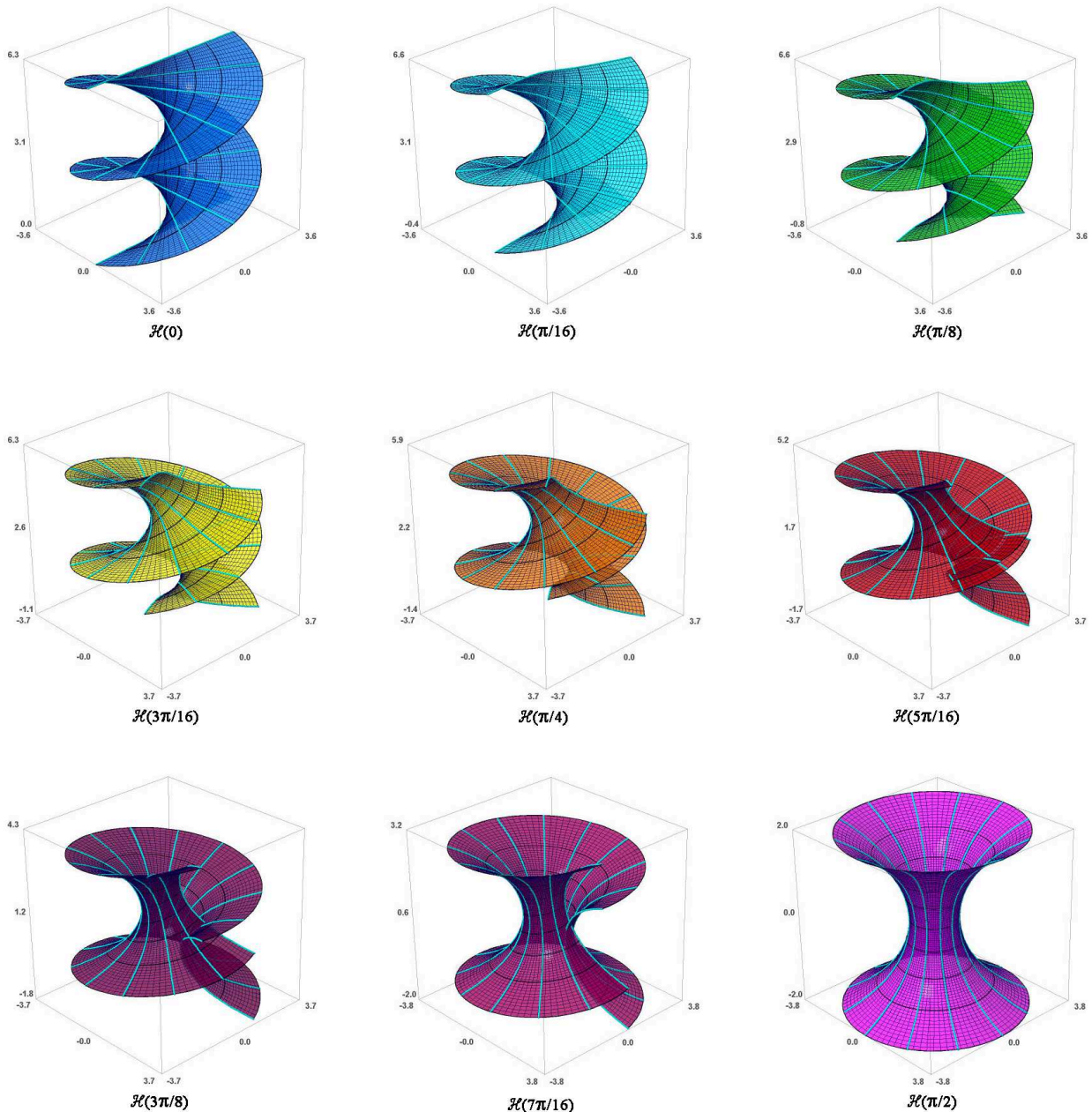
$$N = \cosh^2 v \operatorname{sech}^2 v \sin t.$$

Glavne zakrivljenosti K_1 i K_2 plohe $\mathcal{H}(t)$ u točki $T(u, v)$ su

$$K_1, K_2 = \pm \operatorname{sech}^2 v, \quad \forall t,$$

stoga su sve plohe ove familije minimalne.

Prva diferencijalna forma i glavne zakrivljenosti jednake su za sve plohe u familiji *Heltocat* (ne ovise o varijabli t) što potvrđuje da su sve plohe minimalne i lokalno izometrične.



Slika 6: *Transformacija helikoida u katenoid*

Slika 6 prikazuje plohe $\mathcal{H}(t)$ za $t = n\pi/16$, $n = 0, 1, \dots, 8$, a $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-2, 2]$. Crnom bojom istaknute su u -krivulje, a bojom cijan v -krivulje ploha. Vidimo da se asimptotske linije helikoida preslikavaju u glavne linije katenoidea (zavojnice u kružnice, pravci u lančanice).

Pogledajmo u -linije plohe $\mathcal{H}(t)$ i pokažimo da su one zavojnice. Za fiksirane $t = t_0$ i $v = v_0$ u -linija plohe $\mathcal{H}(t_0)$ ima parametarske jednadžbe u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} x(u) &= a \cos u + b \sin u, \\ y(u) &= a \sin u - b \cos u, \\ z(u) &= cu + d, \quad u \in [-\pi, \pi], a, b, c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (16)$$

Zavojnica je karakterizirana činjenicom da leži na valjku te činjenicom da ima konstantan kut nagiba prema osi tog valjka. Uspravni valjak kojem je os z i polumjer r ima jednadžbu $x^2 + y^2 = r^2$, pa uvrštavanjem vrijednosti iz (16) dobivamo

$$x^2(u) + y^2(u) = a^2 + b^2 = \sin^2 t_0 + \sinh^2 v_0,$$

te zaključujemo da ova u -linija leži na valjku polumjera $\sqrt{\sin^2 t_0 + \sinh^2 v_0}$. Tangenta u -linije u točki (u_0, v_0) ima vektor smjera jednak

$$\mathbf{t} = (-a \sin u_0 + b \cos u_0, a \cos u_0 + b \sin u_0, c),$$

dok os z ima vektor smjera $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$. Računamo kut nagiba između osi z i tangente \mathbf{t} u točki (u_0, v_0)

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{tz}|}{|\mathbf{t}||\mathbf{z}|} = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

a ta je vrijednost konstantna s obzirom na u . Zaključujemo da je svaka u -linija plohe $\mathcal{H}(t)$ zavojnica polumjera $\sqrt{\sin^2 t_0 + \sinh^2 v_0}$, a budući da je $c = \cos t$ korak te zavojnice je $2\pi \cos t$.

7 Samopresjeci ploha $\mathcal{H}(t)$, $0 < t < \pi/2$

U [5] je spomenuto (bez dokaza i objašnjenja) da svaka ploha $\mathcal{H}(t)$, $0 < t < \pi/2$, ima krivulje samopresjeka čiji se dijelovi jasno uočavaju na tri plohe sa slike 6.

Za plohu danu parametrizacijom $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$, točke samopresjeka su one za koje je zadovoljeno:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u_1, v_1) &= \mathbf{r}(u_2, v_2), \\ (u_1, v_1) &\neq (u_2, v_2), \quad (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U, \end{aligned} \quad (17)$$

tj. to su one točke za koje parametrizacija nije injektivna.

Računanje samopresjeka ploha je bitno kod CAD programa i računalnog 3D modeliranja ploha, posebno kod modeliranja offset ploha. Taj problem nije jednostavan

i razvijene su numeričke i algebarske metode za traženje samopresjeka ploha s racionalnom parametrizacijom, [7]. Nažalost, kako plohe promatrane familije nisu racionalne, nije bilo moguće primijeniti neku od gore spomenutih metoda. Stoga rješavanje ovog problema ostavljamo za neki budući rad.

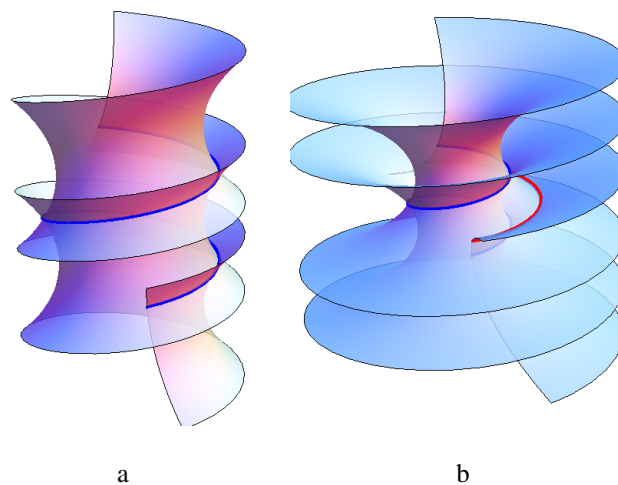
U pokušaju da odredimo krivulje samopresjeka, nismo mogli koristiti uvjet singularnosti plohe ($\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) = 0$). Njegova primjena na plohe (15) daje kompleksna rješenja (npr. $\sinh v = \pm i$).

Pregledavanje velikog broja grafičkih prikaza navelo nas je na sljedeće hipoteze:

- Samopresjeci ploha $\mathcal{H}(t)$, $0 < t < \pi/2$, su neke njihove u -linije i ima ih prebrojivo mnogo na svakoj plohi.
- To su one u -linije ploha za koje vrijedi $\mathbf{r}(u_1, v) = \mathbf{r}(u_2, -v)$.

Iz jednadžbi $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u+x, -v)$ dobili smo sljedeće relacije za varijable x i v na linijama samopresjeka:

$$\begin{aligned} x &= 2v \tan t, \\ \sin x &= \frac{2 \sin 2t \sinh v \cosh v}{\cosh 2v - \cos 2t}. \end{aligned} \quad (18)$$



Slika 7: Ploha $\mathcal{H}(7\pi/16)$ nad područjima $[-4\pi, \pi] \times [-1, 1]$ i $[-4\pi, \pi] \times [-2, 2]$, s istaknutim u -linijama za $v = 0.625$ (plavo) i $v = 1.25$ (crveno).

Literatura

- [1] J. BEBAN-BRKIĆ, *Diferencijalna geometrija*, web skripta, 2012.
http://www.grad.hr/geomteh3d/DG_projekt/DG_sadrzaj_web.html (pristupljeno 15. 7. 2015.)

- [2] O. BONNET, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables, *J. Ec. Polyt.*, **42** (1867), 72–92.
- [3] A. G. COLARES, K. KENMOTSU, Isometric Deformation of Surfaces in \mathbb{R}^3 Preserving the Mean Curvature Function, *Pacific Journal of Mathematics* **136**(1) (1989).
- [4] S. GORJANC, *Normalna, Gaussova i srednja zakrivljenost u regularnoj točki plohe*, web skripta, 2003. http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sanja/gauss/gauss.html (pristupljeno 15. 7. 2015.)
- [5] A. GRAY, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, Boca Raton, 1998.
- [6] S. HAK, M. UROŠ, *Gaussova i srednja zakrivljenost ploha- vizualizacije u programu Mathematica*, studentski rad nagrađen Rektorovom nagradom, Građevinski fakultet u Sveučilišta u Zagrebu, 2004. <http://www.grad.hr/sgorjanc/Links/sanjaimario.pdf> (pristupljeno 15. 7. 2015.)
- [7] Y. HUANG, D. WANG, Computing Self-intersection Loci of Parametrized Surfaces Using Regular Systems and Gröbner Bases, *11th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing*, Timisoara, Romania, 2009.
- [8] Ž. MARKOVIĆ, *Uvod u višu analizu*, II dio, Školska knjiga, Zagreb, 1952.
- [9] V. SIMOVIĆ, *Leksikon građevinarstva*, Masmedia, Zagreb, 2002.
- [10] D. ŠTAMBUK, “Normal Curvature at a Regular Point of a Surface” from the Wolfram Demonstrations Project <http://demonstrations.wolfram.com/NormalCurvatureAtARegularPointOfASurface/> (pristupljeno 15. 7. 2015.)
- [11] Nastavni materijal kolegija *Uvod u diferencijalnu geometriju*, Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu <http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/udg/dio10.pdf> (pristupljeno 15. 7. 2015.)
- [12] <https://www.pinterest.com/pin/329185053987707692/> (pristupljeno 15.7.2015.)

Iva Kodrnja
ikodrnja@grad.hr

Elizabeta Šamec
elizabeta.samec@gmail.com

Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Kačićeva 26, 10000 Zagreb