math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Formule za udaljenost točke do pravca u ravnini, u smislu lp - udaljenosti

Banachovi prostori **Funkcija udaljenosti** **obrada podataka** **optimizacija**

Aleksandra Jovičić
diplomantica Odjela za matematiku,
Sveučilišta J.J.Strossmayera u Osijeku,
Trg Ljudevita Gaja 6, 31000 Osijek

Kristian Sabo
Odjel za matematiku,
Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku,
Trg Ljudevita Gaja 6, 31000 Osijek
ksabo@mathos.hr

Sažetak.

Formula za euklidsku udaljenost točke do pravca u ravnini dobro je poznata učenicima završnih razreda srednjih škola. U ovom radu promatramo općenitije probleme udaljenosti točke do pravca u ravnini, u smislu l_p-udaljenosti, $1 \leq p \leq \infty$. Pokazat ćemo da se i u tim slučajevima, također, mogu izvesti analogne formule za računanje udaljenosti točke do pravca.

Zahvala.

Rad je proizašao iz Diplomskog rada: "$p-$norme na $\mathbb{R}^n$ i problemi linearne aproksimacije" autorice Aleksandre Jovičić diplomantice Sveučilišnog nastavničkog studija matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J.Strossmayera u Osijeku.

Ključne riječi.

Funkcija udaljenosti, Udaljenost točke do pravca, l_p-udaljenost, Optimizacija.

1 Euklidska udaljenost točke do pravca u ravnini

Ako su $A=(x_1,y_1)$ te $B=(x_2,y_2)$ dvije točke u ravnini $\mathbb{R}^2$, onda

$$d_2(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

zovemo **euklidska udaljenost** točaka A i B. Nije teško pokazati (vidi, primjerice, [3], [4]) da euklidska udaljenost zadovoljava sljedeća svojstva

- [(i)] $d_2(A,B)\geq 0$ za svake dvije točke A i B iz $\mathbb{R}^2$,
- [(ii)] $d_2(A,B)=0$ onda i samo onda ako je $A=B$,
- [(iii)] $d_2(A,B)=d_2(B,A)$ za svake dvije točke A i B iz $\mathbb{R}^2$,
- [(iv)] $d_2(A,C)+d_2(C,B)\geq d_2(A,B)$ za svake tri točke A,B i C iz $\mathbb{R}^2$.

Općenito, svaku funkciju $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to[0,\infty\rangle$ koja ima svojstva (i)-(iv) zovemo **funkcija udaljenosti** na $\mathbb{R}^2$ (vidi, primjerice [5]). Treba reći da se funkcija udaljenosti općenito definira na proizvoljnom nepraznom skupu, no zbog prirode našeg problema, ovdje ćemo se zadržati na skupu $\mathbb{R}^2$.

Pretpostavimo da su u pravokutnom koordinatnom sustavu zadani točka $T_0=(x_0,y_0)$ te pravac π s jednadžbom $y=k\,x+l,\ k,l\in\mathbb{R}$. Još iz srednjoškolske matematike poznato je da se euklidska udaljenost $d_2(T_0,\pi)$ točke T_0 do pravca π računa po formuli

$$d_2(T_0, \pi) = \frac{|kx_0 + l - y_0|}{\sqrt{k^2+1}}. \tag{1}$$

Formula (1) može se izvesti na nekoliko načina primjenom geometrijskih ili algebarskih pristupa. Jedan od mogućih izvoda je svođenje na optimizacijski problem. U tu svrhu podsjetimo se kako euklidsku udaljenost $d_2(T_0, \pi)$ točke T_0 do pravca π definiramo kao euklidsku udaljenost točke T_0 i one točke na pravcu π koja je u smislu euklidske udaljenosti najbliža točki T_0. Ako je $T = (x, y)$ proizvoljna točka na pravcu π, onda euklidska udaljenost točaka T i T_0 glasi

$$d_2(T_0, T) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (k\,x + l - y_0)^2},$$

te je prema tome

$$d_2(T_0, \pi) = \min_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{(x-x_0)^2 + (k\,x + l - y_0)^2}.$$

To znači da se problem svodi na minimizaciju funkcije

$$x \mapsto \sqrt{(x-x_0)^2 + (k\,x + l - y_0)^2}.$$

Primijetimo da je umjesto prethodne funkcije dovoljno minimizirati funkciju φ_2 zadanu s

$$\varphi_2(x) = (x-x_0)^2 + (k\,x + l - y_0)^2.$$

Kako je φ_2 kvadratna funkcija, njezin globalni minimum se postiže u apscisi tjemena odgovarajuće parabole, koju ćemo označiti s ξ_2 te je

$$\xi_2 = \frac{k\,y_0 + x_0 - k\,l}{k^2+1},$$

odakle iz $d_2(T_0, \pi) = \sqrt{\varphi_2(\xi_2)}$, nakon kraćeg računa dobivamo da je

$$\boxed{d_2(T_0,\pi) = \frac{|k\,x_0 + l - y_0|}{\sqrt{k^2+1}}.}$$

Točku $(\xi_2, k\,\xi_2 + l)$ na pravcu π koja je u smislu euklidske udaljenosti najbliža točki T_0 zovemo **ortogonalna projekcija** točke T_0 na pravac π. Ortogonalna projekcija točke na pravac u ovom je slučaju, očigledno, jedinstvena.

Osim euklidske udaljenosti, moguće je, također, analizirati problem određivanja udaljenosti točke do pravca i u smislu nekih drugih funkcija udaljenosti. U ovom radu promatramo jednu klasu funkcija udaljenosti koje su poznate kao l_p-udaljenosti, $1 \leq p \leq \infty$. Spomenimo da je euklidska udaljenost specijalni slučaj l_p-udaljenosti za $p=2$. Pokazat ćemo da se za svaku od l_p-udaljenosti, $1 \leq p \leq \infty$, također, mogu izvesti lijepe zatvorene formule za udaljenost točke do pravca. Tehnike koje ćemo pri tome koristiti zahtijevaju samo poznavanje osnovnih tvrdnji Diferencijalnog računa funkcije jedne varijable. Kao motivacija za pripremu ovog rada poslužio je članak [2] u kojem se promatra opći slučaj l_p-udaljenosti, $1 \leq p \leq \infty$ točke do hiperravnine u $\mathbb{R}^n$.

2 l_p-udaljenosti, $1 \leq p \leq \infty$

Ako su $A=(x_1,y_1)$ i $B=(x_2,y_2)$, onda **{**l_p-udaljenost, $1 \leq p \leq \infty$,} točaka A i B definiramo na sljedeći način

$$d_p(A,B) = \begin{cases} \left(|x_1-x_2|^p + |y_1-y_2|^p\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Primijetimo da za $p=2$ dobivamo euklidsku udaljenost. Može se pokazati da svaka od l_p-udaljenosti, $1 \leq p \leq \infty$, zadovoljava uvjete (i)-(iv) iz prvog odjeljka te su one, sukladno tome, funkcije udaljenosti (vidi [4]).

Potpuno analogno kao i u slučaju euklidske udaljenosti, l_p-udaljenost $d_p(T_0,\pi)$ točke T_0 do pravca π definiramo na sljedeći način

$$d_p(T_0,\pi)=\min_{x\in\mathbb{R}}\left(|kx+l-y_0|^p+|x-x_0|^p\right)^{1/p},\quad 1\leq p<\infty,$$

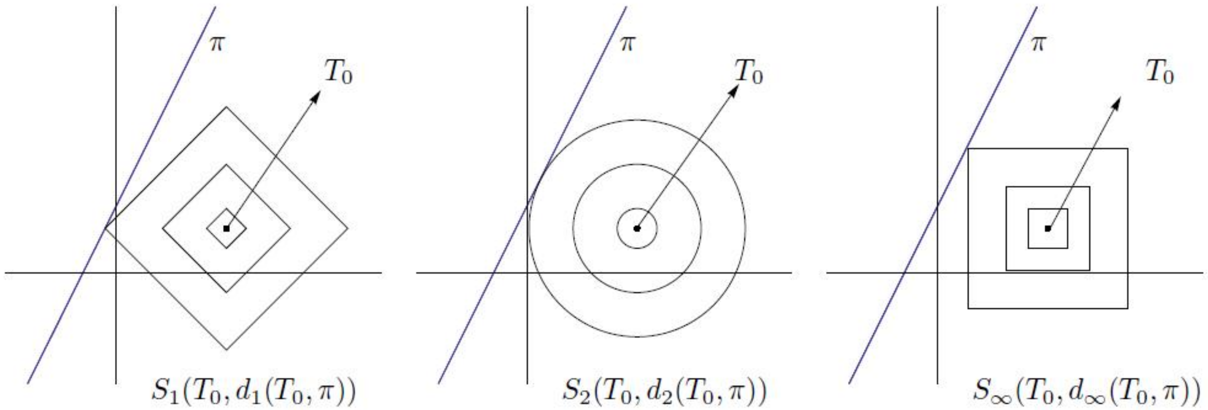
te

$$d_\infty(T_0,\pi)=\min_{x\in\mathbb{R}}\max\{|kx+l-y_0|,|x-x_0|\}.$$

Gledano geometrijski, udaljenost točke T_0 do pravca π možemo interpretirati na sljedeći način. Pretpostavimo da smo nacrtali **{**l_p-kružnicu}, $1\leq p\leq\infty$ (vidi primjerice [1]):

$$S_p(T_0,\varepsilon)=\{T\in\mathbb{R}^2: d_p(T,T_0)=\varepsilon\},$$

sa središtem u točki T_0 malenog polumjera $\varepsilon>0$. Napuhujemo li kružnicu $S_p(T_0,\varepsilon)$, $1\leq p\leq\infty$, ona će u jednom trenutku za neki $\varepsilon_p>0$ dotaknuti pravac π. Polumjer tako dobivene kružnice $S_p(T_0,\varepsilon_p)$, $1\leq p\leq\infty$, očigledno predstavlja l_p- udaljenost točke T_0 do pravca π (vidi Sliku 1). Pri tome točku (ξ_p,η_p) na pravcu π koja je u smislu l_p-udaljenosti najbliža točki T_0 zovemo **{**l_p-projekcija} točke T_0 na pravac π. Sa Slike 1 odmah je jasno da l_1 i $l_\infty-$projekcije točke na pravac općenito nisu jedinstvene. Spomenimo da su za sve ostale p, $1<p<\infty$, pripadne l_p-projekcije jedinstvene.



Slika 1: Točka T_0, pravac π i kružnice $S_p(T_0,\varepsilon)$, $p = 1, 2, \infty$

3 l_1-udaljenost točke do pravca

Iz tehničkih razloga u ovom odjeljku posebno ćemo izvesti formulu za slučaj l_1-udaljenosti. Neka su, kao i dosada, zadani točka $T_0 = (x_0, y_0)$ te pravac $y = k\,x + l$. Pri tome u izvodu razlikujemo dvije različite mogućnosti: $k = 0$ te $k \neq 0$.

Ako je $k = 0$, onda funkcija $x \mapsto |l - y_0| + |x - x_0|$ postiže globalni minimum u točki $x = x_0$, te je

$$d_1(T_0, \pi) = |l - y_0|. \tag{2}$$

Pretpostavimo da je $k \neq 0$. Funkcija

$$x \mapsto |kx + l - y_0| + |x - x_0|, \tag{3}$$

je omeđena odozdo te je

$$\lim_{x\to\infty} (|kx + l - y_0| + |x - x_0|) = \lim_{x\to-\infty} (|kx + l - y_0| + |x - x_0|) = \infty,$$

pa postoji točka iz $\mathbb{R}$ u kojoj se postiže njezin globalni minimum. Nadalje, funkcija (3) je po dijelovima linearna te nije derivabilna u točkama $\frac{y_0-l}{k}$ i x_0 te se globalni minimum funkcije (3) postiže u jednoj od tih dviju točaka.

Očigledno je

$$\begin{aligned} d_1(T_0,\pi) &= \min\left\{|kx_0+l-y_0|, \left|\frac{y_0-l}{k}-x_0\right|\right\} \\ &= \min\left\{|kx_0+l-y_0|, \frac{|kx_0+l-y_0|}{|k|}\right\} \\ &= \frac{|kx_0+l-y_0|}{\max\{|k|,1\}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Konačno iz formula (2) i (4) dobivamo da je

$$\boxed{d_1(T_0,\pi) = \frac{|kx_0+l-y_0|}{\max\{|k|,1\}}.}$$

Označimo s $(\xi_1,\eta_1)l_1-$projekciju točke T_0 na pravac π. Uočimo da se za $|k|>1$ minimum fukcije (3) postiže u $x=\frac{y_0-l}{k}$, dok se za $|k|<1$ minimum funkcije (3) postiže u $x=x_0$.

Očito je

$$\xi_1 = \begin{cases} \frac{y_0-l}{k}, & |k|>1, \\ x_0, & |k|<1, \end{cases} \quad \eta_1 = k\,\xi_1 + l = \begin{cases} y_0, & |k|>1, \\ k\,x_0+l, & |k|<1. \end{cases} \tag{5}$$

Pokažimo da se u slučaju $|k|=1$ minimum funkcije (3) postiže u bilo kojoj konveksnoj kombinaciji brojeva $\frac{y_0-l}{k}$ i x_0, tj. za svaki

$$\xi_1(\lambda)=\lambda\frac{y_0-l}{k}+(1-\lambda)x_0\,,\quad \lambda\in[0,1]. \tag{6}$$

Zaista, za $|k|=1$ te $\lambda\in[0,1]$ imamo

$$\begin{aligned}|k\,\xi_1(\lambda)+l-y_0|+|\xi_1(\lambda)-x_0\,| &= \left|k\left(\lambda\frac{y_0-l}{k}+(1-\lambda)x_0\right)+l-y_0\right| \\ &\quad+\left|\lambda\frac{y_0-l}{k}+(1-\lambda)x_0\,-x_0\right| \\ &=(1-\lambda)|kx_0\,+l-y_0|+\lambda|kx_0\,+l-y_0| \\ &=|kx_0\,-l-y_0| \\ &=d_1(T_0,\pi).\end{aligned}$$

Zaključujemo kako je u slučaju $|k|\neq 1$, l_1-projekcija točke T_0 na pravac π jedinstvena točka (ξ_1,η_1) zadana s (5), dok je u slučaju $|k|=1$ svaka točka oblika $(\xi_1(\lambda),k\,\xi_1(\lambda)+l-y_0)$, $\lambda\in[0,1]$, l_1-projekcija točke T_0 na pravac π, pri čemu je $\xi_1(\lambda)$ zadan sa (6).

4 l_p-udaljenost, $1<p<\infty$, točke do pravca

U ovom općem slučaju problem se svodi na minimizaciju funkcije

$$x\mapsto\left(|kx+l-y_0|^p+|x-x_0\,|^p\right)^{1/p},\quad 1<p<\infty.$$

Slično kao kod euklidske udaljenosti dovoljno je minimizirati funkciju

$$\varphi_p(x)=|kx+l-y_0|^p+|x-x_0\,|^p,\quad 1<p<\infty.$$

Kako je funkcija φ_p omeđena odozdo te je

$$\lim_{x\to\infty}\left(|kx+l-y_0|^p+|x-x_0|^p\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|kx+l-y_0|^p+|x-x_0|^p\right)=\infty,$$

postoji točka iz $\mathbb{R}$ u kojoj se postiže njezin globalni minimum. S ciljem određivanja te točke, posebno promatramo dva slučaja: $k=0$ te $k\neq 0$.

Ako je $k=0$, onda je $\varphi_p(x)=|l-y_0|^p+|x-x_0|^p$, te se njezin minimum postiže u točki $x=x_0$ pa je

$$d_p(T_0,\pi)=|l-y_0|. \tag{7}$$

Neka je $k\neq 0$. Primijetimo da je funkcija φ_p derivabilna u svim točkama na $\mathbb{R}$ osim možda u točkama $x=x_0$ te $x=\frac{y_0-l}{k}$ te ćemo u svrhu minimizacije funkcije φ_p upotrijebiti znanja iz Diferencijalnog računa funkcije jedne varijable.

Promatrajmo funkciju φ_p na skupu $\mathbb{R}\setminus\left\{x_0,\frac{y_0-l}{k}\right\}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x_0<\frac{y_0-l}{k}$ (slučaj $x_0\geq\frac{y_0-l}{k}$ može se analizirati potpuno analogno).

Pokažimo najprije da funkcija φ_p nema stacionarnih točaka na intervalima $\langle-\infty,x_0\rangle$ te $\langle\frac{y_0-l}{k},+\infty\rangle$.

Ako je $x\in\langle-\infty,x_0\rangle$, funkcija φ_p je derivabilna u x te je

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_p(x)}{dx}&=|k|^p p\left|x-\frac{y_0-l}{k}\right|^{p-1}\operatorname{sign}\left(x-\frac{y_0-l}{k}\right)+p|x-x_0|^{p-1}\operatorname{sign}(x-x_0)\\&=-|k|^p p\left|x-\frac{y_0-l}{k}\right|^{p-1}-p|x-x_0|^{p-1}<0,\end{aligned}$$

gdje je $\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0,\end{cases}$ tzv. **funkcija predznaka**.

Ako je $x\in\langle\frac{y_0-l}{k},+\infty\rangle$, funkcija φ_p je derivabilna u x te je

$$\frac{d\varphi_p(x)}{dx} = |k|^p p\left|x - \frac{y_0 - l}{k}\right|^{p-1} + p|x - x_0|^{p-1} > 0.$$

Preostaje analizirati slučaj $x \in \langle x_0, \frac{y_0 - l}{k}\rangle$. Na tom je skupu funkcija φ_p također derivabilna te je

$$\frac{d\varphi_p(x)}{dx} = -|k|^p p\left|x - \frac{y_0 - l}{k}\right|^{p-1} + p|x - x_0|^{p-1}. \tag{8}$$

Rješenje jednadžbe $\frac{d\varphi_p(x)}{dx} = 0$, glasi

$$\xi_p = \frac{1}{|k|^{\frac{p}{p-1}} + 1} x_0 + \frac{|k|^{\frac{p}{p-1}}}{|k|^{\frac{p}{p-1}} + 1} \frac{y_0 - l}{k}. \tag{9}$$

Uočimo da je $\xi_p \in \langle x_0, \frac{y_0 - l}{k}\rangle$ te

$$\varphi_p(\xi_p) = \left(\frac{|kx_0 + l - y_0|}{\left(|k|^{\frac{p}{p-1}} + 1\right)^{\frac{p-1}{p}}}\right)^p.$$

Kandidati za točku u kojoj se postiže globalni minimum funkcije φ_p su x_0, $\frac{y_0 - l}{k}$ te ξ_p zadana s (9). Pokažimo da je

$$\min\left\{\varphi_p(x_0), \varphi_p\left(\frac{y_0 - l}{k}\right), \varphi_p(\xi_p)\right\} = \varphi_p(\xi_p).$$

U tu svrhu uočimo da za svaki $1 < p < \infty$ i svaki $k \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left(|k|^{\frac{p}{p-1}} + 1\right)^{\frac{p-1}{p}} > |k|, \tag{10}$$

te

$$\left(|k|^{\frac{p}{p-1}}+1\right)^{\frac{p-1}{p}}>1.$$

Prema (10) i (11) imamo

$$\min\left\{\left(\frac{|kx_0+l-y_0|}{|k|}\right)^p,|kx_0+l-y_0|^p,\left(\frac{|kx_0+l-y_0|}{\left(|k|^{\frac{p}{p-1}}+1\right)^{\frac{p-1}{p}}}\right)^p\right\}=\left(\frac{|kx_0+l-y_0|}{\left(|k|^{\frac{p}{p-1}}+1\right)^{\frac{p-1}{p}}}\right)^p.$$

Konačno slijedi da je $d_p(T_0,\pi)=(\varphi(\xi_p))^{1/p}$, odakle je

$$\boxed{d_p(T_0,\pi)=\frac{|kx_0+l-y_0|}{\left(|k|^{\frac{p}{p-1}}+1\right)^{\frac{p-1}{p}}},\quad 1<p<\infty.}$$

Tablica 1:

Iz izvoda formule (1) neposredno proizlazi da je $(\xi_p,k\,\xi_p+l)$, gdje je ξ_p dan s (9) pripadna l_p-projekcija točke T_0 na pravac π.

Ako s $q\in\mathbb{R}$ označimo tzv. **konjugirani eksponent** od p (vidi [3]), odnosno broj sa svojstvom da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, onda formulu (1) možemo zapisati u obliku

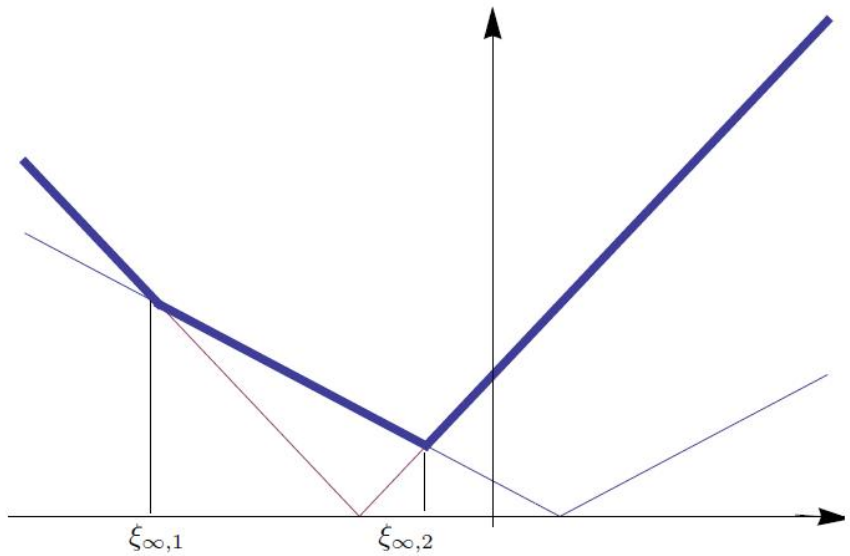
$$d_p(T_0,\pi)=\frac{|kx_0+l-y_0|}{(|k|^q+1)^{\frac{1}{q}}}=\frac{|kx_0+l-y_0|}{d_q((k,1),(0,0))}.$$

5 l_∞−udaljenost točke do pravca

Ako su $T_0 = (x_0, y_0)$ te $y = kx + l$, onda je problem određivanja l_∞−udaljenosti ekvivalentan minimizaciji funkcije

$$\varphi_\infty(x) = \max\{|x - x_0|, |kx + l - y_0|\}.$$

Analogno kao u slučaju funkcije ϕ_p može se pokazati da postoji točka u kojoj se postiže globalni minimum funkcije φ_∞. Funkcija φ_∞ je konveksna po dijelovima linearna funkcija te iz grafa (vidi Sliku 2) slijedi da se njezin globalni minimum postiže u točki ξ_∞ za koju vrijedi



Slika 2: Graf funkcije ϕ_∞ za $k \neq 0$.

$$|\xi_\infty - x_0| = |k\,\xi_\infty + l - y_0|.$$

Ako je $|k| \neq 1$, ova jednadžba ima dva rješenja

$$\xi_{\infty,1} = \frac{y_0 - x_0 - l}{k - 1}, \quad \xi_{\infty,2} = \frac{y_0 - x0 - l}{k + 1}$$

te je

$$\begin{aligned}\min \varphi_\infty(x) &= \min\{\varphi_\infty(\xi_{\infty,1}), \varphi_\infty(\xi_{\infty,2})\} \\ &= \min\left\{\frac{|kx_0 + l - y_0|}{|k-1|}, \frac{|kx_0 + l - y_0|}{|k+1|}\right\} \\ &= |kx_0 + l - y_0| \min\left\{\frac{1}{|k-1|}, \frac{1}{|k+1|}\right\} = \frac{|kx_0 + l - y_0|}{|k| + 1},\end{aligned}$$

pri čemu je posljednja jednakost posljedica identiteta

$$\min\left\{\frac{1}{|k-1|}, \frac{1}{|k+1|}\right\} = \frac{1}{|k| + 1},$$

koji se može lako provjeriti. Slično se može analizirati slučaj $|k| = 1$, te konačno dobivamo formulu

$$\boxed{d_\infty(T_0, \pi) = \frac{|k\, x_0 + l - y_0|}{|k| + 1}.}$$

Primijetimo, također, da je

$$d_\infty(T_0, \pi) = \frac{|k\, x_0 + l - y_0|}{d_1((k, 1), (0, 0))}.$$

Izvod formule za $l_\infty-$projekciju točke T_0 na pravac π ostavljamo zainteresiranim čitateljima.

6 Zaključna formula

Na kraju ćemo rezimirati sve prethodno navedene formule. Ako su $p, q \in \mathbb{R}$ konjugirani eksponenti, odnosno, takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ te ako je konjugirani eksponent od $p = 1$ definiramo uobičajeno kao $q = \infty$, onda l_p-udaljenost $1 \leq p \leq \infty$, $d_p(T_0, \pi)$ točke T_0 do pravca π glasi

$$\boxed{d_p(T_0, \pi) = \frac{|k\, x_0 + l - y_0|}{d_q((k,1),(0,0))}.}$$

Također, osim u eksplicitnom obliku, pravac π možemo promatrati u implicitnom obliku $ax + by + c = 0$. U tom se slučaju može izvesti odgovarajuća formula za udaljenost točke T_0 do pravca π, koja glasi

$$\boxed{d_p(T_0, \pi) = \frac{|a\, x_0 + b\, y_0 + c|}{d_q((a,b),(0,0))},}$$

gdje su $p, q \in \mathbb{R}$ konjugirani eksponenti.

Bibliografija

[1] Lj. Arambašić, I. Zavišić, $p-$norme na $\mathbb{R}^2$, kružnice S_p i brojevi π_p, Osječki matematički list, **10**(2010), 131-138

[2] E. Melachrinoudis, An Analytical Solution to the Minimum L_p-Norm of a Hyperplane}, Journal of

Mathematical Analysis and Applications **211**(1997), 172-189

[3] S. Kurepa, Funkcionalna analiza : elementi teorije operatora, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[4] S. Mardešić, Matematička analiza, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[5] Š. Ungar, Matematička analiza u $\mathbb{R}^n$, Golden Marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

ISSN 1334-6083