Vjerojatnost kao veza između dviju statistika*

Metodičko razmatranje o vjerojatnosnom računu u školi

Werner Peschek & Edith Schneider[1]

Polazna situacija

U većini školskih udžbenika (na njemačkom jeziku) uvođenje vjerojatnosti i vjerojatnosnog računa ima sljedeće karakteristike:

Uvođenje teorijskih pojmova

Pri uvođenju vjerojatnosnog računa često se prvo uvode („definiraju") teorijski pojmovi (kao na primjer, slučajni pokus/eksperiment, neuspjeh pokusa, uspjeh i neuspjeh, ishod, elementarni događaj, prostor elementarnih događaja...) koji u daljnjim razmatranjima ili nisu potrebni ili ih je potrebno razumjeti samo intuitivno (Brand et. al. 2012., str. 204-205), (Freytag, C. et. al. 2006., str. 79), (Schneider, G. et. al. 2004., str. 106). Takvo je postupanje metodički teško opravdati.

Dominacija elementarne kombinatorike

Zadatci iz elementarnog vjerojatnosnog računa u školi u mnogim slučajevima koriste razlomke. Pritom se u brojniku i nazivniku rješavaju više ili manje složeni kombinatorni problemi, a vjerojatnost se jednostavno računa kao njihov količnik.

Primjer: (prema Schmid, A. und Weidig, I. 2005., str. 208):

Kolika je vjerojatnost pogađanja četiriju točnih brojeva u lotu „6 od 49"?

Rješenje: $P(B)=\dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}\approx 0.000387$

*članak uredila i prevela s njemačkog Željka Milin-Šipuš, PMF-MO Sveučilišta u Zagreba

[1]Werner Peschek & Edith Schneider, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Naravno, nije problem u samoj primjeni znanja i vještina iz elementarne kombinatorike, nego što takvi zadatci zapravo slabo pridonose razumijevanju samog koncepta vjerojatnosti.

Matematika povezana s kockanjem

U školskim zadatcima vjerojatnost je (pre)često povezana s igrama na sreću kao što su bacanje novčića, bacanje kocke, izvlačenje kuglica, kartanje, kolo sreće, rulet, Loto, itd. Ta dominacija igara na sreću pogoduje dojmu koji je posve pogrešan, da se vjerojatnosni račun ponajviše koristi kao račun vjerojatnosti dobitka kod igara na sreću. Time se propušta izgraditi temeljno i stvarno značenje pojma vjerojatnosti odnosno teorije vjerojatnosti, te se dobiva društveno irelevantna *matematika povezana s kockanjem*.

Bizarne *primjene*

Primjene vjerojatnosti izvan područja igara na sreću nalaze se zaista rijetko i pritom se najčešće radi o bizarnim kontekstima i zadatcima.

Primjer: (prema Schmid, A. und Weidig, I. 2005., str. 206):

U skijaškom spustu sudjeluje 10 skijaša koji imaju jednake vjerojatnosti za pobjedu. Kolika je vjerojatnost da će skijaši sa startnim brojevima 1, 2 i 3 doći na cilj kao 1., 2. i 3. plasirani?

Pretpostavka jednake vjerojatnosti u ovom je primjeru apsurdna (kako se to određuje, koji se pojam vjerojatnosti ovdje primjenjuje?), a pitanje nije ni realno ni relevantno, niti se na njega može smisleno odgovoriti (što govori vjerojatnost o ovakvom pojedinom slučaju?).

Primjer: (prema Bleier G. et. al. 2010., str. 142):

Tri lovca odlaze u lov. Poznato je da pogađaju divlju životinju koja se iznenada pojavi s vjerojatnostima 2/3, 1/2 i 1/4. Pojavljuje se zec u kojega svi pucaju. S kojim vjerojatnošću zec preživljava?

Ovdje se također pitamo što govori vjerojatnost ovog pojedinačnog slučaja: biva li zec pogođen ili ne više se ne zna ni nakon računanja vjerojatnosti. Ovdje se također postavlja i pitanje kako se određuju vjerojatnosti 2/3, 1/2 i 1/4, je li svejedno o kojoj se divljoj životinji radi, iz koje se udaljenosti puca te mora li svaki pogodak za zeca biti i smrtonosan.

Ovakve karakteristike školskog vjerojatnosnog računa ne daju smislenu sliku značenja pojma vjerojatnosti i s njime povezanih globalnih ideja.

Kako bismo izbjegli prethodne situacije, u sljedećem tekstu skicirat ćemo ključne postavke i potrebnu argumentaciju za uvođenje vjerojatnosti i vjerojatnosnog računa u školi. Vjerojatnost ćemo tretirati kao poveznicu između uzorka i cjeline (populacije), te time istovremeno i kao poveznicu između deskriptivne (opisne) i inferencijalne statistike (statističkog zaključivanja). Time ćemo naglasiti globalne ideje teorije kao i njihovo lokalno značenje te središnje aktivnosti prikazanog koncepta vjerojatnosti (Kröpfl, B., Peschek, W. und Schneider, E. 2000., str. 45-57).

1. Modeliranje slučajnog pokusa (slučajnosti)

U teoriji vjerojatnosti radimo s događajima čije je pojavljivanje slučajno te govorimo o *modeliranju slučajnog pokusa (slučajnosti)*.

Na prvi pogled sama se ideja čini suludom i za matematiku vrlo neobičnom: pokušati sistematizirati nešto što je slučajno (i u tom smislu jedva razumljivo). Od matematike se očekuje postavljanje determinističkih modela s jednoznačnim, ponovljivim izlazom, rezultatom, a ne (naizgled apsurdan) pokušaj računanja nečeg neizračunljivog kao što je slučajnost, tj. slučajni pokus.

Prije nego si postavimo pitanje kako može izgledati jedan takav model i što se njime u stvari modelira, postavljamo si pitanje *zašto dopuštamo* odnosno *zašto matematika uopće dopušta slučajnost?* Odgovor je zapravo vrlo jednostavan: stoga što ponekad ne postoji niti jedan drugi (smisleni) put kako bismo dobili odgovore na postavljena pitanja:

- Želimo li, primjerice, doznati koliko je neispravnih šibica među pet milijuna šibica na skladištu, možemo iskušati šibicu po šibicu, od svih pet milijuna, te prebrojiti neispravne, tj. one koje nismo uspjeli zapaliti. Na taj način zaista znamo koliko ih je bilo neispravnih, no ta nam informacija postaje bezvrijedna.
- Želimo li, primjerice, doznati koliko je austrijskih obitelji barem jednom provelo ljetni odmor u Hrvatskoj, možemo to pitanje postaviti svim austrijskim obiteljima, s pretpostavkom da možemo naći sponzora koji će financirati taj najskuplji popis stanovništva.

Navedeni primjeri, kao i mnogo drugih takvih primjera, pokazuju da nema uvijek smisla *svima* postaviti pitanje koje nas zanima, dakle cijeloj populaciji. Umjesto toga, u mnogim smo slučajevima zadovoljni (ili moramo biti zadovoljni) s ispitivanjem dijela populacije, tj. njezinog uzorka.

Dakle, ukoliko želimo doznati relativan udio ispravnih šibica u skladištu, svakako nam pomaže informacija koliko iznosi njihov relativni udio na uzorku 1 000 šibica. U drugoj situaciji, ukoliko želimo znati koliko je obitelji među svim austrijskim obiteljima barem jednom provelo ljetni odmor u Hrvatskoj, pomaže nam znati koliko je takvih obitelji među 500 austrijskih obitelji.

Sad *pretpostavljamo* da je utvrđeni relativni udio u uzorku približno jednak relativnom udjelu u cijeloj populaciji. Općenito:

parametar u populaciji ≈ parametar u uzorku[2]

[2]Funkcije populacijskih razdioba zovu se parametri, dok se funkcije uzorka zovu statistikama. Neke statistike mogu se interpretirati kao procjenitelji odgovarajućih populacijskih parametara.

Pritom se odmah suočavamo s više pitanja:

Je li ova pretpostavka (uvijek) opravdana?

Pod kojim je uvjetima opravdana i zašto?

Što znači „≈" ?

Stoga naše daljnje razmatranje započinjemo primjerom:

Primjer: Treba odrediti relativan udio maturanata među svim odraslim hrvatskim građanima. U tu svrhu provodimo ispitivanje na fakultetima Sveučilišta u Zagrebu, među osobama koje ulaze i izlaze. Pitamo ih imaju li položenu maturu. Pritom utvrđujemo da 85 % ispitanika odgovara potvrdno i zaključujemo da približno 85 % svih hrvatskih građana ima položenu maturu.

Obrazovana čitateljica i čitatelj, naravno, znaju da je takva anketa besmislena, da se analize ne mogu provoditi na taj način (mnogo ljudi, među kojima je i nemali broj novinara, očito to ne zna, te bez sustezanja poopćuju nereprezentativna zapažanja – vidi članak: Kronfellner M., Peschek, W. 2001., str. 98). Gornja pretpostavka nije opravdana u svakom slučaju, nego u najboljem slučaju kada se poseže za *pogodnim (reprezentativnim) uzorkom*. U svrhu realizacije takvog uzorka postoje različiti postupci od kojih je najosnovniji biranje *slučajnog uzorka*: u populaciji se na slučajan način određuju elementi uzorka, pri čemu mora biti zajamčeno da svaki element populacije ima jednaku šansu biti odabran u uzorak.

Sve ovo lako je reći, u određenoj mjeri i zamisliti, no u praksi često nije jednostavno provesti (stoga se u praksi daje prednost najčešće drugim, djelomično slučajnim postupcima, postupcima koji sliče na slučajne ili čak takvima koji se ne temelje neposredno na principu slučajnosti – vidi članak: Kröpfl, B., Peschek, W., Schneider, E. und Schönlieb, A. 1999., str. 144 i nadalje). Dakako, sve matematičke metode i postupci vjerojatnosnog računa kao i inferencijalne statistike koriste se izbranim slučajnim uzorkom i njihove se izjave temelje na navedenoj pretpostavci za slučajan uzorak.

I tako je slučaj postao „suigrač" – i to ne samo kod uzimanja uzorka, nego i kod ishoda: hoćemo li u slučajnom odabiru od 50 Hrvata/ica imati njih 20 %, 30 %, 40 % ili 90% sa završenom maturom – nije moguće predvidjeti sa sigurnošću. To ovisi o slučajnosti, pa ishod tako treba i prihvatiti, s određenom neizvjesnošću. Jednostavno je uvidjeti (a kasnije ćemo i potvrditi pomoću Empirijskog zakona velikih brojeva): neizvjesnost je veća što je uzorak manji (potpunu neizvjesnost imamo kad je veličina uzorka jednaka 1, dakle u pojedinačnom slučaju).

Matematičari/ke nerado prihvaćaju takvu neizvjesnost. Tražili su načine kako matematički doskočiti neizvjesnosti uzrokovanoj slučajem, kako je učiniti je „računljivom". Pritom se koriste – kako ćemo vidjeti u daljnjem tekstu – pojmom vjerojatnosti za modeliranje i kvantificiranje neizvjesnosti (uvjetovanih slučajem).

2. Kvantificiranje (mjerenje) neizvjesnosti: Dvije interpretacije vjerojatnosti

Osnovno i bitno za sva daljnja razmišljanja su dvije interpretacije (ne definicije u matematičkom smislu!) vjerojatnosti kao mjere za očekivanje.

Primjer: Kad hodamo ulicama starog dijela Zagreba, vjerojatno očekujemo da je prvi čovjek na kojeg nailazimo dešnjak. Suprotno tome, očekivanje da naiđemo na ljevaka vjerojatno je znatno manje.

Ovo je očekivanje utemeljeno na poznatom (u najmanju ruku pretpostavljenom) relativnom udjelu dešnjaka među svim ljudima, koji je puno veći nego što je relativni udio ljevaka.

Ovaj se r*elativni udio* u populaciji uzima kao *mjera očekivanja* i naziva vjerojatnosnom mjerom. Izrecimo to preciznije i općenitije:

Vjerojatnost kao relativni udio u populaciji

Biramo li na slučajan način u konačnoj populaciji G jedan element, kao mjeru očekivanja da se izabere točno jedan element nekog podskupa A uzimamo upravo relativan udio $h(A)$, pri čemu je $h(A) = a/g$; a, g su kardinalni brojevi skupova A i G. Pišemo

$$P(E) = h(A)$$

pri čemu je *P(E) vjerojatnost događaja E* da izabrani element od *G* pripada podskupu A.

Vidimo: *Mjera očekivanja naziva se vjerojatnost te je zadana kao relativni udio brojem između 0 i 1.*

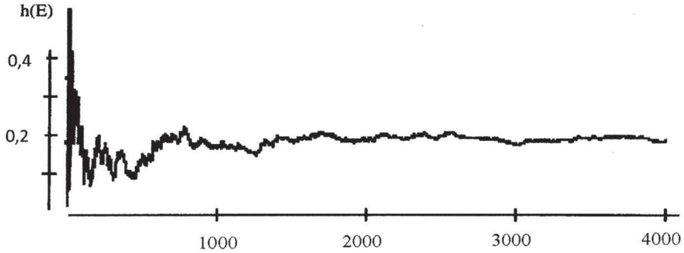
Pretpostavimo da znamo da je svaki peti odrastao čovjek ljevak. Tada je vjerojatnost sretanja dešnjaka (= događaj E) 80 %. U pojedinačnom slučaju ta vjerojatnost govori ipak vrlo malo: možemo naići na dešnjaka kao i na ljevaka, pritom se ta mala vjerojatnost od 20 % za ljevake ne mijenja. Također nije moguće predvidjeti hoćemo li prvo sresti dešnjaka ili ljevaka, to ovisi o slučaju (za taj uvid ne treba nam pojam vjerojatnosti; utoliko je ipak neobično što se u školi toliko pažnje posvećuje igrama na sreću, iako je vjerojatnost dobitka u pojedinačnim slučajevima ili u vrlo malim serijama igranja praktički zanemariva, odnosno njezina je prediktivna vrijednost vrlo niska.)

Tek kad bismo hodajući ulicama grada sreli jako puno ljudi za koje znamo jesu li dešnjaci ili ljevaci, dakle tek kad bismo promatrali jednu veliku „seriju ponavljanja" pokusa, mogli bismo biti uvjereni da smo sreli znatno manje ljevaka nego dešnjaka. To povjerenje počiva na „Empirijskom zakonu velikih brojeva" kojim se izražava sljedeća iskustvena činjenica:

Empirijski zakon velikih brojeva

Neka se događaj E u prvih n ponavljanja slučajnog pokusa pojavljuje k puta. Tada $h(E) = k/n$ označava *relativnu frekvenciju događaja E u toj seriji ponavljanja pokusa***.**

Empirijski zakon velikih brojeva[3] kaže da se *relativna frekvencija h(E) događaja pri sve većem broju ponavljanja pokusa stabilizira na nekoj fiksnoj vrijednosti*. Veća odstupanja događaju se posve rijetko (vidi sliku 1.).



Slika 1.

Na gornjem primjeru prikazane situacije s dešnjacima i ljevacima, pri susretu s prvih 50 ili 100 ljudi koje se ispituje, malo se može reći o relativnoj frekvenciji dešnjaka i ljevaka; relativna frekvencija još uvijek jako varira. Tek otprilike od 1000-tog ispitanika varijacije se smanjuju, njihova relativna frekvencija ne odstupa jako od približno 20 %, te se zapravo „stabilizira" na vrijednosti 0.2.

Ovaj zakon velikih brojeva centralan je za teoriju vjerojatnosti: kad ne bi bilo te iskustvene činjenice, relativna frekvencija bi se i kod velikog broja ponavljanja pokusa određivala s velikim varijacijama, tj. ne bi bilo moguće u poznatoj populaciji prognozirati ishod velikog broja ponavljanja pokusa, niti bi takav uzorak bio pogodan za donošenje zaključaka o populaciji. Tada ne bi vrijedilo ni *parametar u populaciji ≈ parametar u uzorku* te ne bi postojale ključne mogućnosti spoznaje primjenom vjerojatnosnog računa i teorije.

Empirijski zakon velikih brojeva sugerira i drugu važnu interpretaciju vjerojatnosti:

Vjerojatnost kao relativna frekvencija u seriji ponavljanja pokusa

Prema Empirijskom zakonu velikih brojeva, relativne frekvencije $h(E)$ u seriji ponavljanja pokusa stabiliziraju se na fiksnoj vrijednosti, te je prikladno tu vrijednost uzeti kao vjerojatnost događaja E:

$$h(E) \approx P(E)$$

Zajedno s interpretacijom vjerojatnosti kao relativnog udjela u populaciji dobivamo središnju poveznicu dalekosežnog značaja:

[3] tzv. statistička stabilnost relativnih frekvencija. Ona daje „a posteriori" definiciju vjerojatnosti.

3. Veza između uzorka i populacije

Utvrdili smo da se stanje u prikladno odabranom uzorku (tj. dovoljno velikom slučajnom uzorku) ne bi trebalo previše razlikovati od stanja u populaciji. Točnije, očekujemo da se vrijednost parametra pri seriji ponavljanja pokusa u slučajnom uzorku neće razlikovati od vrijednosti odgovarajućeg parametra u populaciji. Drugim riječima, očekujemo da je

relativna frekvencija u uzorku ≈ relativni udio u populaciji

dakle

$$\boldsymbol{h(E) \approx h(A)}.$$

Više od toga u ovom trenutku ne znamo. No sada možemo objasniti zašto to mora tako biti:

- Relativna frekvencija događaja E in u seriji ponavljanja pokusa ili u uzorku približno je jednaka vjerojatnosti događaja E:

$$h(E) \approx P(E)$$

(interpretacija vjerojatnosti kao relativne frekvencije u seriji ponavljanja pokusa)

- No, ta je vjerojatnost događaja E jednaka relativnim udjelu u populaciji:

$$P(E) = h(A)$$

(interpretacija vjerojatnosti kao relativnog udjela u populaciji)

- Sve skupa to daje

$$h(E) \approx P(E) = h(A)$$

uzorak ⟷ populacija

Vjerojatnosti $P(E)$ je dakle ključni element veze između uzorka i populacije. U toj vezi sadržano je središnje značenje pojma vjerojatnost.

Gornji niz jednakosti čitan s lijeva na desno utvrđuje globalnu ideju inferencijalne statistike, odnosno zaključivanje od uzorka prema populaciji (ekstrapolacija[4]).

Ukoliko taj niz jednakosti čitamo s desna na lijevo, upućeni smo zaključivati od populacije prema uzorku i time dobivamo globalnu ideju teorije vjerojatnosti – a istovremeno, s obzirom na primijenjenu statistiku, središnje pitanje vjerojatnosnog računa.

[4]U njemačkoj literaturi, tzv. „Hochrechnung".

4. Što možemo očekivati od prikladno odabranog uzorka?

Sada već znamo da *parametar u uzorku ≈ parametar u populaciji* ne vrijedi uvijek, ali takvu situaciju možemo *očekivati* kod dovoljno velikog broja ponavljanja pokusa. Ovo smo utvrdili i iz niza jednakosti $h(E) \approx P(E) = h(A)$. Presudnu ulogu u tome ima pojam vjerojatnosti.

Još uvijek nismo odgovorili na pitanje što znači „≈". Počet ćemo s jednim primjerom:

Primjer: Pretpostavimo da znamo da je 30 % svih austrijskih obitelji barem jednom ljetovalo u Hrvatskoj. Što možemo očekivati od slučajno odabranog uzorka na 50 austrijskih obitelji, dakle ako bi se samo njima postavilo pitanje o ljetovanju u Hrvatskoj?

Nije baš vjerojatno da su *sve* odabrane obitelji barem jednom ljetovale u Hrvatskoj. Ta je vjerojatnost jednaka $P(\mathrm{B} = 50) = 0.3 \times 0.3 \times 0.3 \times ... \times 0.3 = 0.3^{50} \approx 0$. (Pri određivanju ove vjerojatnosti koristili smo pravilo množenja za nezavisne događaje.)

Isto je tako nevjerojatno da smo odabrali obitelji koje nikad nisu ljetovale u Hrvatskoj. Ta je vjerojatnost jednaka $P(\mathrm{B} = 0) = 0.7 \times 0.7 \times 0.7 \times ... \times 0.7 = 0.7^{50} \approx 0$.

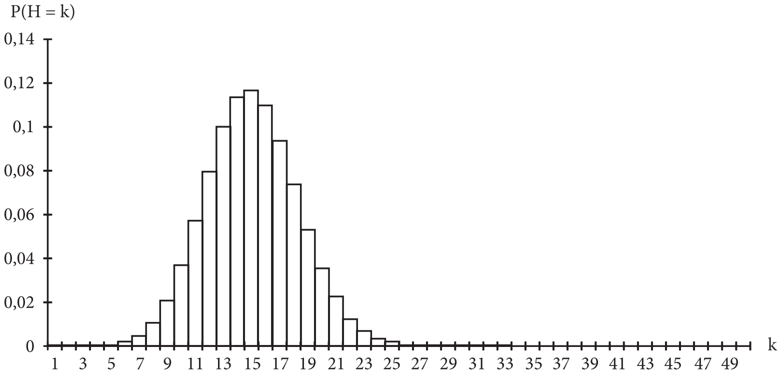
Vjerojatnost da je 49 od 50 upitanih obitelji ljetovalo u Hrvatskoj također nije veća $P(\mathrm{B} = 49) = 50 \times 0.3^{49} \times 0.7 \approx 0$. (Osim pravila množenja za nezavisne događaje koristili smo i pravilo zbrajanja *za događaje koji se međusobno isključuju.*)

Slično, vjerojatnost da je samo jedna od 50 upitanih obitelji ljetovala u Hrvatskoj iznosi $P(\mathrm{B} = 1) = 50 \times 0.3 \times 0.7^{49} \approx 0$.

Računanje vjerojatnosti $P(\mathrm{B} = 2)$, $P(\mathrm{B} = 3)$, ..., $P(\mathrm{B} = 48)$ pomalo je nezgrapno – no, u svrhu dobivanja jasne slike o vrsti razdiobe vjerojatnosti koriste se odgovarajuće formule, tablice ili računalni softver.

U našem primjeru dobivamo za (slučajnu varijablu) B = 0, 1..., 50 binomnu razdiobu, odnosno, pomoću binomne razdiobe dobro aproksimiranu *hipergeometrijsku razdiobu* (već prema tome biramo li svaki put od svih 50 austrijskih obitelji ili samo među onima koje već nismo pitali) s očekivanjem („srednjom vrijednošću") μ i standardnom devijacijom σ. U većini situacija relevantnih u praksi (izabrani uzorak nije premali s obzirom na populaciju) obje su razdiobe slične i mogu se dobro aproksimirati *normalnom razdiobom*.

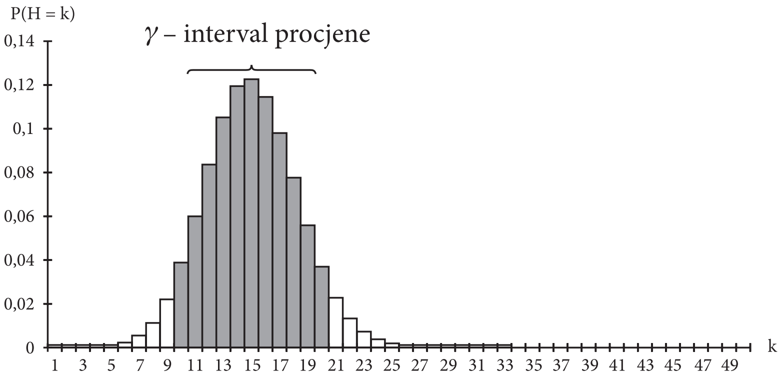
Na slici 2. grafički je prikazana razdioba vjerojatnosti iz primjera. Možemo očitati da je najvjerojatnije da je 15 obitelji već provelo ljetovanje u Hrvatskoj. No, ne iznenađuje da slično vrijedi i za 13, 14, 16 ili 17 obitelji. Ukoliko bismo se morali kladiti, bilo bi prilično riskantno kladiti se samo na 15 obitelji, dakle na jednu „točkovnu procjenu" (ta vjerojatnost iznosi samo (približno) 12 %). Međutim, nije prevelik rizik prognozirati da je „između 10 i 20 obitelji" već ljetovalo u Hrvatskoj, dakle napraviti „intervalnu procjenu" (vjerojatnost za to iznosi preko 90 %).



Slika 2. Razdioba vjerojatnosti

Time smo našli odgovor na temeljno pitanje (primijenjene) statistike o vjerojatnosnom računu: s velikom vjerojatnošću γ (ovdje preko 90 %) izabrat ćemo uzorak u kojemu je 10, 11..., 19 ili 20 obitelji, dakle između 10 i 20 obitelji, barem jednom ljetovalo u Hrvatskoj.

Takav *interval*, u kojemu je promatrani parametar uzorka – u našem slučaju (relativna) frekvencija – dana s određenom vjerojatnošću γ, naziva se γ – *interval (područje) procjene*[5] (za relativne frekvencije) – vidi sliku 3. γ – *interval procjene* je dakle matematički odgovor na postavljeno središnje pitanje vjerojatnosnog računa o tome što se očekuje od prikladnog uzorka.



Slika 3. γ – interval procjene

5. Međusažetak: γ – interval procjene kao globalna ideja

Pri ispitivanju ponašanja uzorka krenuli smo od pretpostavke da je poznat relativan udio p u populaciji te smo izrazili pomalo nepreciznu pretpostavku da u po-

[5]U njem. Schätzbereich

godno odabranom uzorku možemo očekivati da odgovarajući udio također približno iznosi p. Pomoću vjerojatnosnog računa ova se izjava može matematički precizirati i kvantificirati:

očekivati: vjerojatnost $0 \leq P \leq 1$ kao kvantitativna mjera za očekivanje

približno: zadavanje intervala (simetričnog oko p)

Sažeto: s (velikom) vjerojatnošću γ *odgovarajući udio uzorka leži u intervalu* $[p - \varepsilon; p + \varepsilon]$.

Interval $[p - \varepsilon; p + \varepsilon]$ zajedno s vjerojatnošću γ, smisleni odgovor je na pitanje što se očekuje od pogodno odabranog uzorka; taj interval nazivamo γ – *interval procjene* za relativne frekvencije u uzorku (vidi sliku 3.).

Ukoliko želimo dobiti interval procjene koji ima veliku vjerojatnost (sigurnost) γ, tada takav interval pouzdanosti mora biti širi, a odgovarajuća je izjava „nepreciznija". Obratno, ukoliko želimo povećati „preciznost" izjave, dakle smanjiti interval pouzdanosti, tada se vjerojatnost (sigurnost) γ koja odgovara toj izjavi smanjuje. Dakle, povećanje veličine uzorka (koje je u pravilu *skupo*) može povećati „preciznost"a da ne smanji sigurnost, ili može povećati sigurnost a da ne smanji „preciznost", ili čak može oboje povećati. U svakom slučaju potrebno je naći adekvatni „srednji put", s obzirom na kontekst, između veličine uzorka, odnosno, „preciznosti" i sigurnosti izjave.

Osim što se koristi kod modeliranja slučaja, γ – *interval procjene* poistovjećujemo i s *globalnom idejom vjerojatnosnog računa*. Već prema postavljenom problemu ili modelu, ta se ideja primijenjuje kao binomna razdioba, hipergeometrijska razdioba, studentova razdioba, Chi^2-razdioba ili neka razdioba vjerojatnosti, posebno svakako i normalna. Temeljna ideja ostaje pritom nepromijenjena, bez obzira na razdiobu.

U sljedećoj su tablici pregledno sažete globalne ideje, njihovo temeljno lokalno značenje i središnje aktivnosti za usvajanje koncepta vjerojatnosti u školskom matematičkom obrazovanju:

VJEROJATNOSNI RAČUN Iz poznatih vjerojatnosti računaju se nove (još nepoznate) vjerojatnosti		
Globalne ideje	**Lokalno značenje**	**Središnje aktivnosti**
Slučaj: Modeliranje/ Kvantificiranje	Dvije interpretacije vjerojatnosti (Značenje zbrajanja i množenja)	Uzimanje uzorka (Zbrajanje i množenje vjerojatnosti)
γ – interval procjene kao matematički odgovor na središnje pitanje vjerojatnosnog računa	Područja primjene i svojstva raznovrsnih vjerojatnosnih razdioba	Rad s vjerojatnosnim razdiobama, parametri položaja i raspršenosti
	γ – interval procjene, veza između veličine uzorka, širine intervala i sigurnosti	Određivanje γ – intervala procjene

6. Testiranje hipoteza i interval pouzdanosti[6] – dva koncepta inferencijalne statistike

γ – interval procjene neposredno se koristi kod nekih relevantnih situacija u praksi, na primjer kod prebukiranja (hotela, aviona...). No naša je polazna situacija bila zapravo sljedeća: ne krećemo od poznavanja populacije, kao kod intervala procjene i od zaključivanja od populacije prema uzorku, nego smo umjesto toga pretpostavili da populaciju ne poznajemo, da na njoj ne možemo ili ne želimo provesti ispitivanje, te želimo zaključivati o populaciji na temelju pogodno odabranog uzorka u situaciji. Pritom je prvo sigurno potrebno uvjeriti se kako se ponaša uzorak. Na to pitanje smo zadovoljavajuće odgovorili s γ – intervalom procjene, tako da se sada možemo posvetiti polaznom pitanju – što možemo reći o populaciji ako samo raspolažemo s rezultatima o uzorku? U tu svrhu, inferencijalna statistika koristi dva središnja koncepta, testiranje hipoteza i interval pouzdanosti. Oba su sasvim jednostavna za razumijevanje ako se izgrađuju na konceptu intervala procjene.

Testiranje hipoteza

Osnovna ideja kod testiranja hipoteza je relativno jednostavna: kreće se od pretpostavke tj. polazne postavke, odnosno općenito od jedne hipoteze (o relativnom udjelu p neke značajke (karakterisktike ili svojstva) u populaciji). Za provjeru te hipoteze uzima se (slučajni) uzorak.

Ukoliko je hipoteza točna, može se računati s (velikom) vjerojatnošću γ da relativna frekvencija promatrane značajke u uzorku leži u γ – intervalu procjene. Ako relativna frekvencija uzorka zaista leži u γ – intervalu pouzdanosti, tada je ishod slučajnog pokusa kompatibilan s hipotezom, te se hipoteza ne može odbaciti (time još uvijek nije dokazana!).

Suprotno tome, ako relativna frekvencija uzorka leži izvan γ – intervala pouzdanosti, možemo razmišljati na sljedeće način: ako pretpostavimo da je hipoteza točna (i ako su uzorkovanje i anketa ispravno provedeni), dobili smo ishod koji je posve nevjerojatan (takvu vrijednost opažamo vrlo rijetko, samo u $\alpha = 1 - \gamma$ svih slučajeva). Umjesto da zadržimo jedan takav slabo vjerojatan ishod, možemo radije pretpostaviti da je hipoteza netočna. Stoga hipotezu *odbacujemo* (*odbijamo*).

Primjer: Jedan hrvatski časopis za turizam smatra da je 30% svih austrijskih obitelji već ljetovalo u Hrvatskoj.
Za provjeru te tvrdnje može se provesti anketa populacije ili, što je realnije, može se uzeti uzorak. Časopis se odlučuje za (jako mali) uzorak od $n = 50$.
Ako je tvrdnja časopisa za turizam točna, tada bi se u uzorku trebalo naći između 10 i 20 obitelji koje su već provele ljetni odmor u Hrvatskoj (vidi sliku 3.). Time tvrdnja časopisa nije dokazana, ali je uvjerljiva i u svakom slučaju nije opovrgnuta uzorkom.

[6] U njem. Vertrauensintervall, Konfidenzintervall

Ako je hipoteza točna, uzorak s manje od 10 obitelji koje su provele odmor u Hrvatskoj bio bi vrlo neuobičajan, naime, vjerojatnost takvog ishoda uzorka bila bi oko 5 %. Ne osjećamo se pozvanima vjerovati takvom uzorku; sigurnije nam je takvu tvrdnju odbaciti i (s 95 % sigurnosti, odnosno s 5 % vjerojatnosti pogreške) smatrati statistički dokazanom da je do sada manje od 30 % svih austrijskih obitelji bilo u mogućnosti provesti ljetni odmor u Hrvatskoj. Tvrdnja turističkog časopisa je stoga statistički opovrgnuta. Na sličan način može se argumentirati i za uzorak u kojemu je više od 20 obitelji koje su provele odmor u Hrvatskoj; s vjerojatnosti pogreške od 5 % statistički je dokazano da je više od 30 % svih austrijskih obitelji već provelo ljetni odmor u Hrvatskoj. Tvrdnja turističkog časopisa je stoga i u ovom slučaju statistički opovrgnuta.

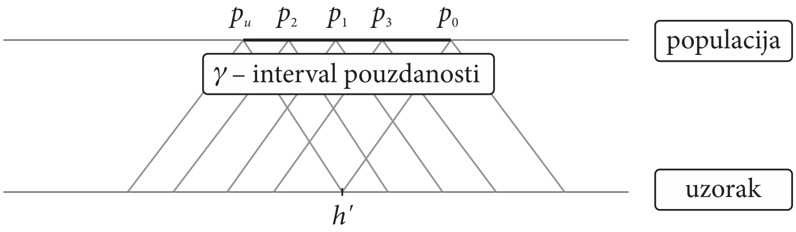
Interval pouzdanosti

Kod testiranja hipoteza polazi se od pretpostavke (polazne postavke, hipoteze) o relativnom udjelu neke značajke u populaciji i ta se pretpostavka provjerava – kao što je opisano – pomoću statističkog testa.

Međutim, što ako nemamo nikakvu pretpostavku/hipotezu o relativnom udjelu promatrane značajke u populaciji? Tada se, naime, mora provesti anketa, tj. popis u cijeloj populaciji ili se mora uzeti uzorak, ukoliko nije smisleno ili moguće provesti anketu.

U tom se uzorku određuje relativna frekvencija h' promatranog događaja i s tom se vrijednosti „procjenjuje" (s nekom određenom nesigurnošću ili nepreciznošću) odgovarajuća vrijednost u populaciji. Pritom se polazi od razmatranja da, osim ako se ne radi o ekstremnom ishodu uzorka, ishod uzorka leži u γ – intervalu procjene oko traženog relativnog udjela p od populacije.

γ – **interval pouzdanosti** za relativni udio p u populaciji može se dakle definirati kao skup svih p čiji γ – interval procjene u uzorku sadrže opaženu relativnu frekvenciju h' (slika 4.).



Slika 4. γ – interval pouzdanosti

Iako je to pomalo neprecizno, interval pouzdanosti na primjeru o udjelu austrijskih obitelji koje su već ljetovale u Hrvatskoj možemo interpretirati na sljedeći način: ako je u pogodno odabranom uzorku relativan udio obitelji koje su ljetovale u

Hrvatskoj jednak h', tada bi bilo vrlo neobično (nevjerojatno) da relativni udio svih austrijskih obitelji koje su ljetovale u Hrvatskoj ne leži u intervalu [p_u; p_o]. Ili također: ako je ishod uzorka jednak h', tada udio p svih austrijskih obitelji koje su ljetovale u Hrvatskoj s velikom sigurnošću leži u intervalu [p_u; p_o].

Određivanje intervala pouzdanosti za diskretnu razdiobu vjerojatnosti na temelju tablica (ili grafičkog prikaza) u načelu je (približno) moguće, ali pomalo nespretno. U slučajevima relevantnima za praksu gotovo se uvijek koristi aproksimacija intervalom simetričnim oko h' i normalnom distribucijom. U tim slučajevima moguće je odrediti interval pouzdanosti na temelju vrlo jednostavne formule (vidi Kröpfl, B., Peschek, W., Schneider, E. und Schönlieb, A. 1999., od str. 192 dalje).

7. Pogled unazad: „crvena nit"

Pogledajmo unazad. Prvo smo utvrdili da nije uvijek (smisleno) moguće za (veliku) populaciju provesti anketu ili popis, kako bismo nešto saznali o parametru koji nas zanima (npr. o relativnom udjelu neke značajke), nego moramo biti zadovoljni informacijama dobivenim iz uzorka. To ima smisla, naime možemo očekivati da se parametar u uzorku ne razlikuje jako od parametra koji nas zanima u populaciji, tj. na temelju uzorka možemo dobiti dobru procjenu parametra u populaciji. Međutim, ishod uzorka podliježe slučajnim promjenama te se javlja problem kako razumijeniti tj. kontrolirati slučajnost. To je omogućeno uvođenjem pojma vjerojatnosti. Pritom su odgovarajuće izjave o vjerojatnosti to pouzdanije što je dulja serija ponavljanja pokusa (tj. veći uzorak), kako kaže Empirijski zakon velikih brojeva. Pritom nas izjave o vjerojatnosti pojedinačnih slučajeva ne opterećuju (teorija vjerojatnosti i statistika bave se masovnim pojavama, ne pojedinačnim slučajevima).

S obje interpretacije vjerojatnosti, vjerojatnosti kao relativnog udjela u populaciji i vjerojatnosti kao relativne frekvencije u seriji ponavljanja pokusa (u uzorku), vjerojatnosni račun kao i inferencijalna statistika mogu se shvatiti odnosno utemeljiti kao središnja veza između uzorka i populacije (i time također između deskriptivne i inferencijalne statistike). U vjerojatnosnom računu to vodi posljedično na γ – interval procjene (kao odgovor na središnje pitanje vjerojatnosnog računa što se može očekivati od uzorka), u inferencijalnoj statistici na testiranje hipoteza i interval pouzdanosti (γ – interval pouzdanosti kao procjenu parametra koji nas zanima u populaciji pomoću parametra uzorka).

Kada je poznato kako se ponaša uzorak (interval procjene), možemo se vratiti na polazno pitanje: što se može reći o populaciji ako raspolažemo samo jednim uzorkom? Kod intervala pouzdanosti, a osobito kod testiranja hipoteze, što se često doživljava kao teško, metodički se vrlo dobrim pokazuje pristup preko intervala procjene: od intervala procjene do testiranja hipoteze samo je mali korak koji zapravo ne zahtijeva ništa drugo nego jednu specijalnu interpretaciju intervala procjene.

Ovaj koncept treba shvatiti konačno i kao „protukoncept" na početku navedene *matematike povezane s kockanjem* i ostalih „karikatura" vjerojatnosnog računa i teorije koji često dominiraju u školskom obrazovanju.

Kod realizacije ovog koncepta u nastavi ne trebamo se, naravno, ograničiti samo na *crvenu nit*, nego se on ostvaruje i uz odgovarajuće pojmove, tvrdnje i pravila: pravilo zbrajanja i množenja (barem intuitivno), slučajna veličina, razdioba vjerojatnosti, vrijednost očekivanja i standardna devijacija, raznovrsne vjerojatnosne razdiobe, posebno normalna razdioba, te uz smislene zadatke s primjenama.

Ovaj koncept i ova njegova realizacija u nastavi već godinama se koristi u temeljnom statističkom srednjoškolskom obrazovanju ekonomista/ica, kao i za didaktičko dodatno i daljnje usavršavanja nastavnika/ca. Bio je temelj za razvoj udžbenika za *trgovačke akademije* (jedne vrste gimnazija ekonomskog usmjerenja) i za obrazovanje ekonomista na sveučilištima i visokim školama (vidi Kronfellner, M. Peschek, W. 2001., odnosno, Kröpfl, B., Peschek, W., Schneider, E. und Schönlieb, A. 1999.).

Literatura

1. Bleier, G. et. al. (2010.): Dimensionen Mathematik 6. Verlag E. Dorner, Wien.
2. Brand, C. et. al. (2012.): themamathematik 6. Veritas-Verlag, Linz.
3. Kröpfl, B., Peschek, W. und Schneider, E. (2000.): Stochastik in der Schule. Globale Ideen, lokale Bedeutungen, zentrale Tätigkeiten. mathematicadidactica 23(2000.), Bd. 2, S. 25–57.
4. Kröpfl, B., Peschek, W., Schneider, E. und Schönlieb, A. (1999.): Angewandte Statistik. Eine Einführung für Wirtschaftswissenschaftler. 2. Auflage. Hanser Verlag, München-Wien.
5. Kronfellner, M. und Peschek, W. (2001.): angewandte mathematik 4. Verlag hpt, Wien.
6. Freytag, C. et. al. (2006.): Fokus Mathematik 8. Cornelsen Verlag, Berlin.
7. Schmid, A. und Weidig, I. (2005.): LS Mathematik 10. Ernst Klett Verlag, Stuttgart-Düsseldorf-Leipzig.
8. Scheider, G. et. al. (2004.): Mathematik V. Trauner Verlag, Linz.