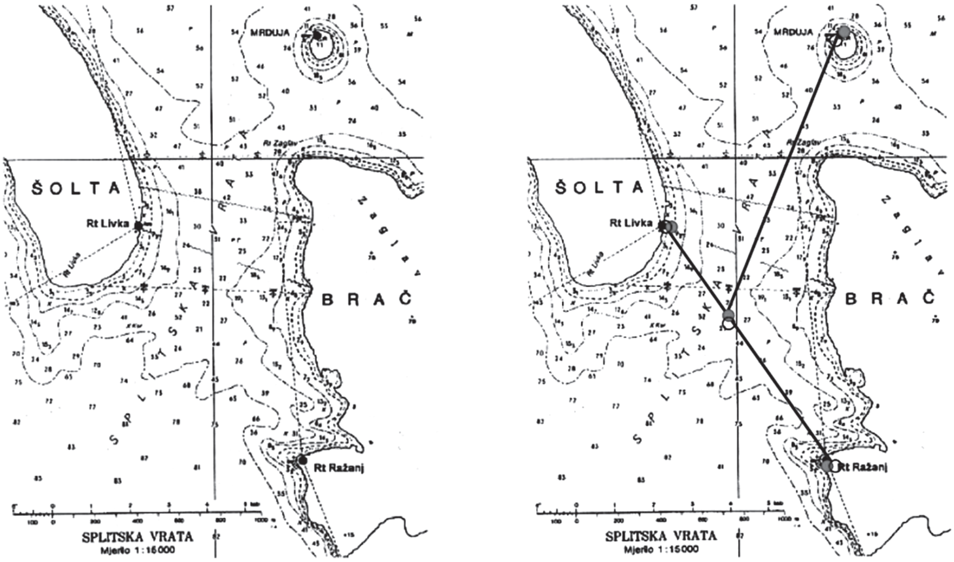
Dvoomjer

Petar Mladinić[1]

Kapetanovo blago

U časopisu Matka 10 (2001./2002.) br. 38 na stranici 76. postavljen je problem *Blago kapetana Šešule*. Evo ključnog dijela tog teksta:

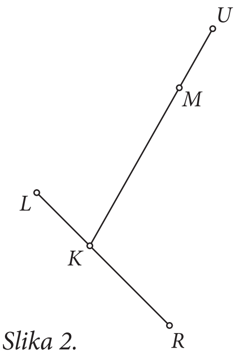
... Sumrak nas je zatekao u Splitskim vratima. Žurilo nam se sakriti blago. Usidrili smo se na mjestu koje se nalazi na spojnici svjetionika na rtu Livka na otoku Šolti i svjetionika na rtu Ražanj na Braču. Sjevernije od nas vidio se svjetionik na otočiću Mrduji, a u produžetku tog pogleda (pravca brod – Mrduja) jarbol usidrenog broda. Od svjetionika na Šolti bili smo udaljeni 400 zaveslaja, od bračkog 200 i od onog na Mrduji 800. Na karti smo povukli pravce. Zamišljeni pravci rt Livka – udaljeni brod i rt Ražanj – Mrduja sjekli su se u točki R_1, Livka – Mrduja i Ražanj – udaljeni brod u točki L_1. Pravac određen točkama R_1 i L_1 sjekao je pravac rt Livka – naš brod – rt Ražanj na mjestu gdje smo sakrili blago...



Slika 1.

[1]Petar Mladinić, V. gimnazija, Zagreb

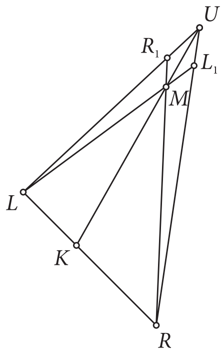
Udaljeni brod (U) nalazi se negdje na pravcu KM iza M, tj. sjevernije od M. Točka K označava položaj broda kapetana Šešule, a točke M, L i R redom položaje svjetionika Mrduja, Livka i Ražanj. Dakle, nacrtamo točku U i dobivamo sljedeći raspored točaka (v. sl. 2.).



Slika 2.

Konfiguracije

Točke L, R i U određuju trokut unutar kojeg je točka M. Konfiguraciju sa slike 2. nadopunimo tako da dobijemo konfiguraciju na slici 3.

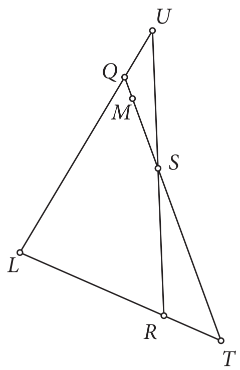


Slika 3.

Giovani Ceva (1648. – 1734.) dokazao je 1678. godine da za naš trokut LRU i točku M vrijedi

$$\frac{|LK|}{|KR|}\cdot\frac{|RL_1|}{|L_1U|}\cdot\frac{|UR_1|}{|R_1L|}=1.$$

Odaberimo na stranici $\overline{LU}$ trokuta LRU bilo koju točku Q. Pravac QM siječe stranicu $\overline{UR}$ u točki S, a pravac LR u točki T (v. sl. 4.).

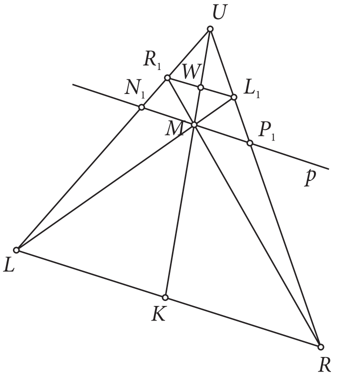


Slika 4.

Starogrčki matematičar **Menelaj** (oko 100. godine) dokazao je poučak koji primijenjen na ovu konfiguraciju daje

$$\frac{|LR|}{|RT|}\cdot\frac{|RS|}{|SU|}\cdot\frac{|UQ|}{|QL|}=1.$$

U četverokutu LRL_1R_1 dužine $\overline{LL_1}$ i $\overline{RR_1}$ su dijagonale. Ako je $LR \parallel L_1R_1$, četverokut je trapez. Pravac $p \parallel LR$ koji prolazi točkom M siječe krak $\overline{LR_1}$ u točki N_1, a krak $\overline{RL_1}$ u točki P_1.



Slika 5.

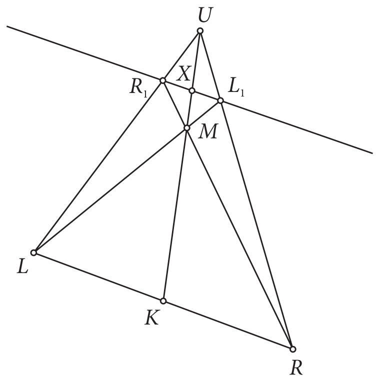
Za ovu konfiguraciju vrijedi

$$\frac{\dfrac{2\cdot|LR|\cdot|L_1R_1|}{|LR|+|L_1R_1|}}{|N_1P_1|}=1,$$

tj. $|N_1P_1|$ je harmonijska sredina duljina osnovica trapeza. U ovom je slučaju točka K polovište osnovice $\overline{LR}$. Pravac UM siječe pravac L_1R_1 u točki W koja je polovište dužine $\overline{L_1R_1}$.

Dvoomjer

Pogledajmo početni trokut LRU s ucrtanim točkama K i M te konstruiranim točkama L_1 i R_1. Pravac L_1R_1 siječe pravac UK u točki X (v. sl. 6.).



Slika 6.

Vidimo da se na pravcu *UK* nalaze 4 točke: *K*, *M*, *X* i *U*. One definiraju 6 različitih dužina: $\overline{KM}$, $\overline{KX}$, $\overline{KU}$, $\overline{MX}$, $\overline{MU}$ i $\overline{XU}$. Može se uočiti da su omjeri duljina nekih dužina međusobno jednaki, tj. da, primjerice, vrijedi $\frac{|KM|}{|MU|}=\frac{|KX|}{|XU|}$.

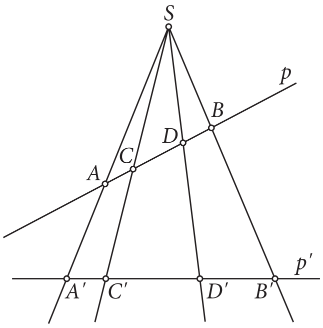
Broj

$$k=\frac{\frac{|KM|}{|MU|}}{\frac{|KX|}{|XU|}}$$

naziva se *dvoomjer četiriju točaka na pravcu*.

Ovaj koncept dvoomjera temeljito je istražio **Michel Chasles** (1793. – 1880.) nazvavši ga *anharmonijski omjer*.

Neka su dana dva pravca *p* i *p*'. Na pravcu *p* dane su 4 točke: *A*, *B*, *C* i *D*. Neka je točka *S* središte centralne projekcije. Konstruirajmo centralne projekcije točaka *A*, *B*, *C* i *D* na pravcu *p*'. Označimo ih s *A*', *B*', *C*' i *D*' (v. sl. 7.).



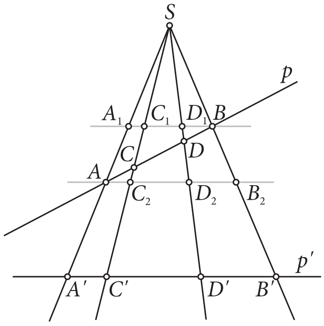
Slika 7.

Chasles je dokazao da vrijedi

$$\frac{|AC|}{|CB|}:\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|A'C'|}{|C'B'|}:\frac{|AD'|}{|D'B|},$$

tj. da je dvoomjer četiriju točaka na pravcu invarijanta centralnog projiciranja. Standardna je oznaka za dvoomjer četiriju točaka *(AB, CD)*.

Dokaz nije težak. Povucimo paralele s pravcem *p*' u točkama *A* i *B*. Dobit ćemo dužine $\overline{A_1B}$ i $\overline{AB_2}$ na kojima su projekcije točaka *C* i *D* (v. sl. 8.).



Slika 8.

Trokuti ACC_2 i BCC_1 su slični. (Zašto?) Također su slični i trokuti ADD_2 i BDD_1. Iz tih sličnosti trokuta slijedi

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AC_2|}{|C_1B|}$$

i

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AD_2|}{|D_1B|}.$$

Podijelimo li međusobno ove jednakosti, dobit ćemo

$$\frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC_2|}{|C_1B|} : \frac{|AD_2|}{|D_1B|}. \tag{1}$$

Prema Talesovom poučku o proporcionalnim dužinama vrijedi da je

$$\frac{|AC_2|}{|C_1B|} = \frac{|A'C'|}{|C'B'|} \tag{2}$$

i

$$\frac{|AD_2|}{|D_1B|} = \frac{|A'D'|}{|D'B'|} \tag{3}$$

Uvrstimo li u (1) tvrdnje (2) i (3), dobit ćemo Chaslesovu tvrdnju.

Permutacijom slova u standardnoj oznaci za dvoomjer dobivaju se 24 dvoomjera. Chasles je uočio da realno postoji 6 različitih dvoomjera jer je uočio da među njima ima jednakih. Primjerice, jednaki su $(AB,CD) = \dfrac{1}{(AB,DC)}$ i $(AB, CD) = 1 - (AC, BD)$.

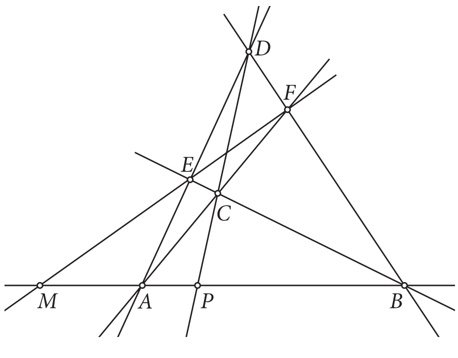
Može se uvesti i pojam „negativne” duljine. Duljina dužine AB je pozitivna ako je točka A lijevo od točke B, a negativna ako je B lijevo od A.

Karl Georg Christian von Staudt (1798. – 1867.) definirao je *harmonijsku četvorku točaka* kao 4 točke A, B, C i D za koje vrijedi

$$(AB, CD) = -1.$$

Zadatak. *Zadane su 3 kolinearne točke A, B i P. Konstruirajte četvrtu harmonijsku točku M, tj. da vrijedi $(AB, PM) = -1$.*

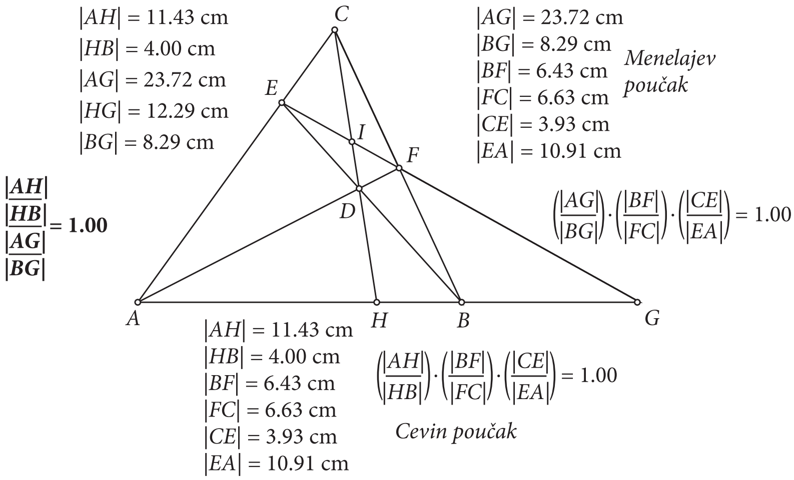
Rješenje. Nacrtajmo bilo kojom točkom $C \notin p = AB$ pravac PC i na njemu odaberimo točku D. Pravci BC i AC redom sijeku pravce AD i BD u točkama E i F. Pravac EF siječe pravac p u točki M koja je rješenje zadatka (v. sl. 9.).



Slika 9.

Tri konfiguracije, a jedna konstanta

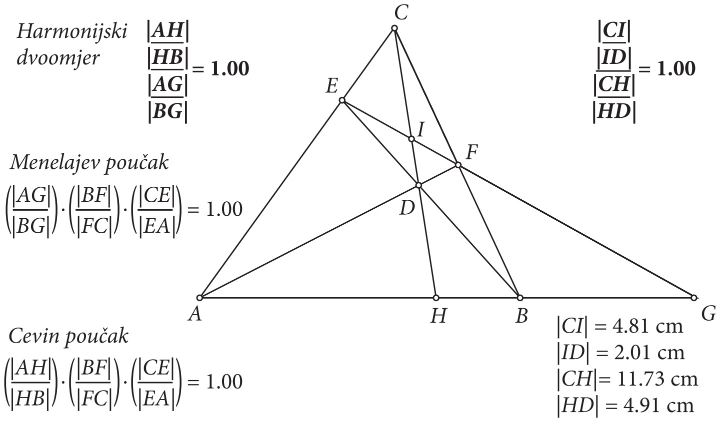
Neka je zadan trokut ABC i na stranici $\overline{AC}$ točka E, a na stranici $\overline{BC}$ točka F. Dužine $\overline{AF}$ i $\overline{EB}$ dijagonale su četverokuta $ABFE$ i sijeku se u točki D. Pravci AB i EF sijeku se u točki G. Točka H je presjek pravca CD i pravca AB, a točka I presjek je pravaca CD i EF (v. sl. 10.).



Slika 10.

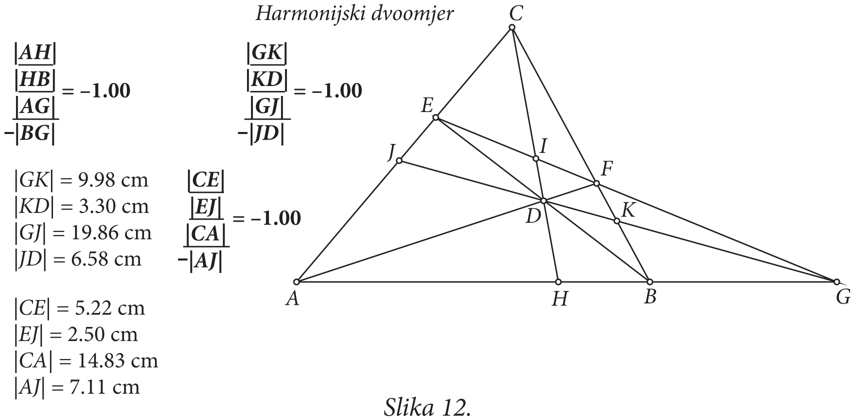
Sada je lako uočiti da su u ovoj konfiguraciji sadržane sve tri tvrdnje: Menelajeva, Cevina i von Staudtova, tj. da su te tvrdnje međusobno ekvivalentne (to nam i sugerira konstanta 1). Mogli bismo reći, na neki način, da su Menelaj, pa i Ceva pradjedovi temeljne projektivne invarijante – harmonijske četvorke točaka.

Na slici 11. uočljiva je i četvorka konstruiranih točaka C, I, D, H. I za njih vrijedi da je $(CI, DH) = -1$.



Slika 11.

Pravac DG siječe pravac AC u točki J, a pravac BC u točki K (v. sl. 12.).



Slika 12.

Vrijede tvrdnje $(GK, DJ) = -1$, $(CE, JA) = -1$ itd.

Kad je točka H polovište dužine $\overline{AB}$, onda je točka G beskonačno daleka točka, a pravac EF paralelan je s $\overline{AB}$. Tada dobivamo trapez $ABFE$ s osnovicama AB i EF.

I dalje vrijedi $(CE, JA) = -1$.

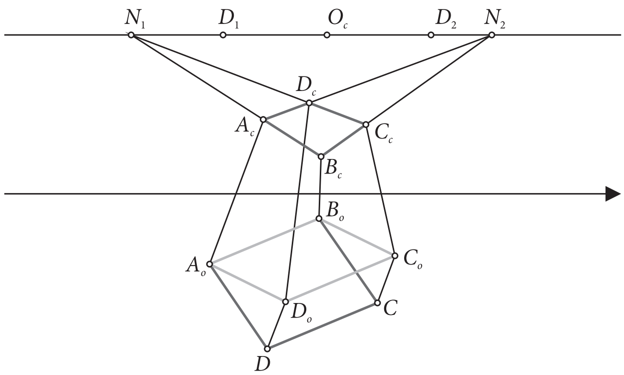
No, za trapez sada vrijedi i

$$\frac{\dfrac{2\cdot|AB|\cdot|EF|}{|AB|+|EF|}}{|JK|}=1,$$

tj. $|JK|$ je harmonijska sredina duljina osnovica trapeza.

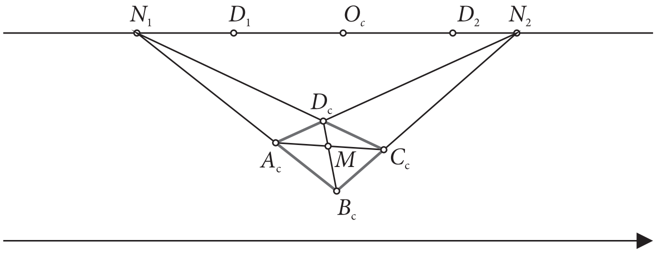
Perspektivno preslikavanje i harmonijski dvoomjer

Svaki konveksni četverokut u ravnini možemo shvatiti kao perspektivnu sliku $A_cB_cC_cD_c$ paralelograma $A_0B_0C_0D_0$, a paralelogram kao afinu sliku kvadrata $ABCD$ (v. sl. 13.).

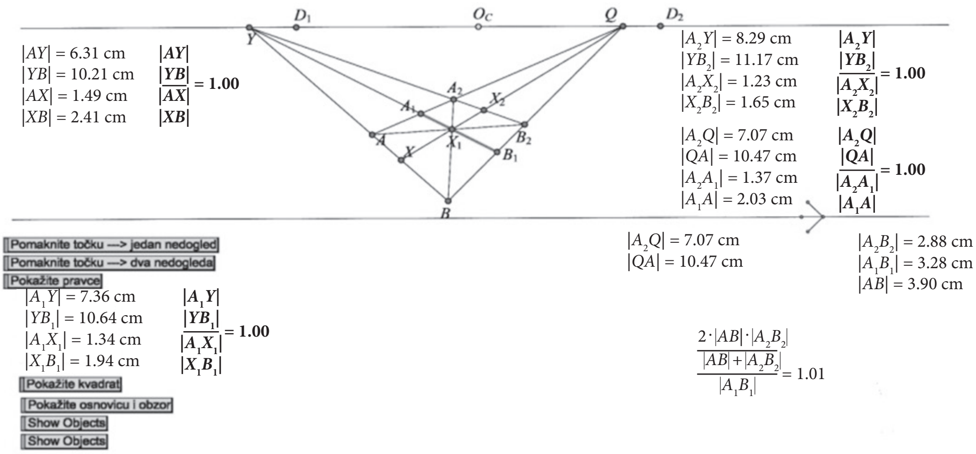


Slika 13.

Perspektivna slika $A_cB_cC_cD_c$ s dva nedogleda N_1 i N_2 te presjekom M dijagonala A_cC_c i B_cD_c izravno ukazuje na harmonijsku četvorku točaka (v. sl. 14. i 15.).



Slika 14.

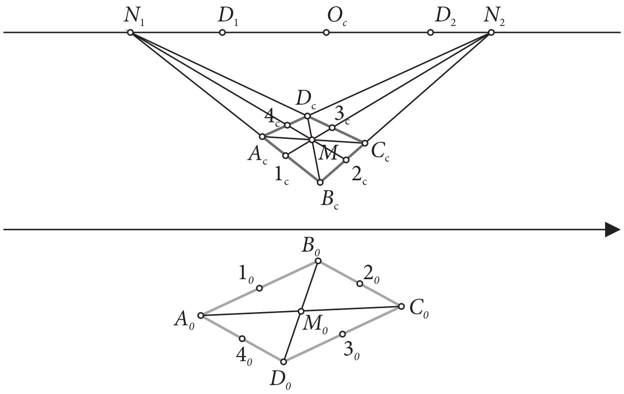


Slika 15.

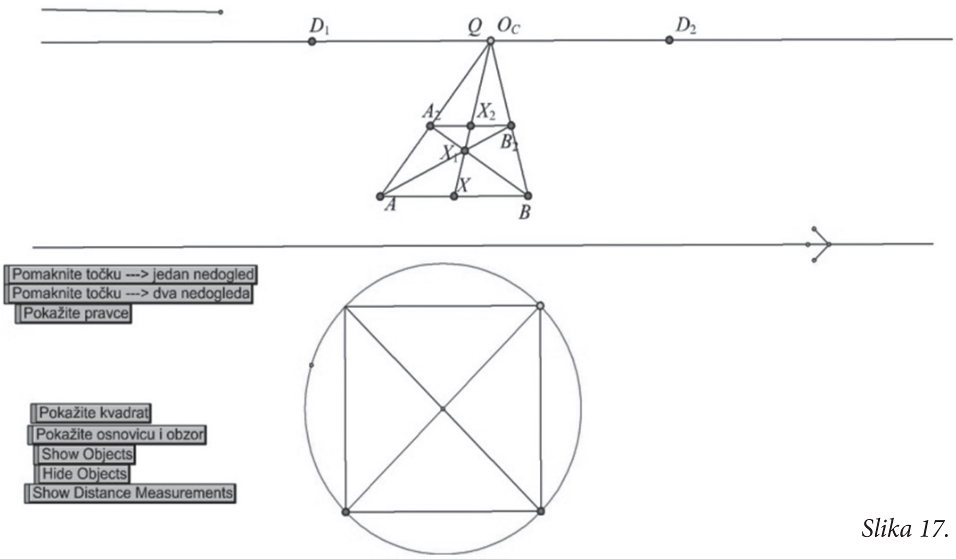
Koje se točke paralelograma odnosno kvadrata preslikavaju u M, 1_c, 2_c, 3_c i 4_c? Perspektivno preslikavanje pokazuje da se polovišta stranica i dijagonala paralelograma preslikavaju u točke koje čine odgovarajuće harmonijske četvorke.

Dakle, polovišta stranica i dijagonala paralelograma (ili kvadrata) preslikavaju se u odgovarajuće harmonijske točke. Paralelne stranice paralelograma (ili kvadrata) nakon perspektivnog preslikavanja sijeku se u nedoglednoj točki (v. sl. 16.).

Perspektivno preslikavanje „nudi" još jedan poseban četverokut povezan s kvadratom. Trapez je perspektivna slika kvadrata sa stranicama paralelnim s osnovicom perspektive. (Nedogled tog trapeza je u glavnoj točki perspektive, tj. riječ je o perspektivi s jednim nedogledom (v. sl. 17.).)

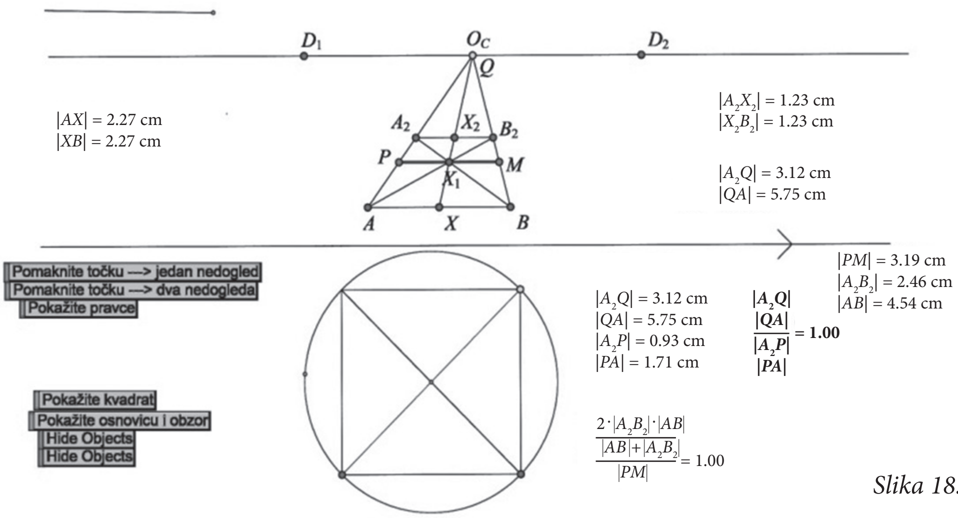


Slika 16.



Slika 17.

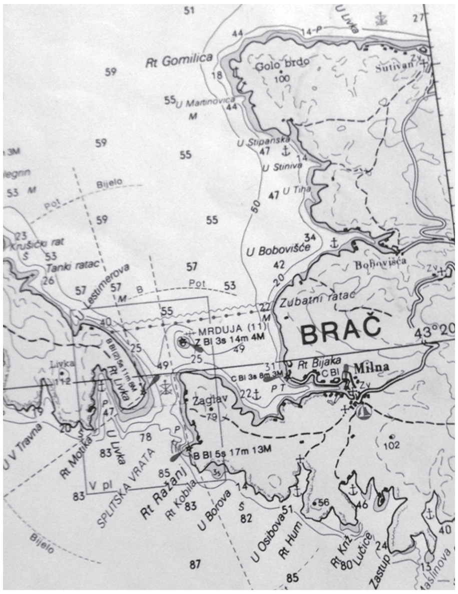
I za trapez vrijedi harmonijski dvoomjer. No, „pojavljuje" se i posebna tvrdnja da je duljina spojnice dviju harmonijskih točaka *P* i *M* na krakovima trapeza harmonijska sredina duljina osnovica trapeza (v. sl. 18.).



Slika 18.

* * * *

Vratimo li se početnom problemu, lako ćemo odrediti gdje je skriveno blago kapetana Šešule. To ostavljamo čitatelju za vježbu učiniti na sljedećoj slici, naravno uz samostalan odabir položaja gdje su usidrena oba broda!



Literatura

1. Cajori, F. (2000.): *A History of Mathematics*, AMS, Providence.
2. Courant, R.; Robbins, H. (1941.): *What is Mathematics?*, Oxford University Press, New York.
3. Greenberg, M. J. (2008.): *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, W. H. Feeman and Company, New York.
4. Katz, V. J. (1998.): *A History of Mathematics*, Addison Wesley Longman, New York.
5. Palman, D. (1984.): P*rojektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb.
6. Smith, D. E. (1929.): A Source Book in Mathematics, Dover Publications, New York.
7. Smith, D. E. (1958.): History of Mathematics, Dover Publications, New York.