IZ NASTAVNE PRAKSE

Taj bolni pojam bijekcije*

Arijana Burazin Mišura[1], Ivo Baras[2] i Nada Roguljić[3]

Sažetak

„Za funkciju koja je injekcija i surjekcija kažemo da je bijekcija" – rečenica je koju smo svi čuli više puta tijekom vlastitog školovanja, a isto je tako i sami upotrijebili u nastavnom procesu. Svima nama danas je ona u potpunosti jasna, naravno. Međutim, pokušajte se sjetiti jeste li isto mislili i kada ste je prvi put čuli. Obratite pažnju i na izraze lica vaših učenika kada idući put budete tumačili bijekciju. Sa sigurnošću tvrdimo da je pojam bijekcije kod đaka zasigurno jedan od najlošije prihvaćenih i najslabije razumljivih matematičkih termina. Je li razlog tome unaprijed odlučena averzija prema „čudnom" nazivlju jer „nešto takvog imena sigurno ne može biti jednostavno, pa čemu uopće pokušati to razumjeti"? Ili je možda naš način pristupa i izlaganja pojma bijekcije učenicima prekompliciran? Ili je pak jednostavno potrebno neko vrijeme da se kockice poslože i svi komadići priče o funkciji, pa onda i o bijekciji, sjednu na svoje mjesto? Vjerojatno razlog leži u kombinaciji svega navedenog.

***Ključne riječi**: funkcija, injekcija, surjekcija, bijekcija*

Pojam funkcije

Funkcija je jedan od najvažnijih matematičkih pojmova. Učenici se s njime prvi put susreću u trećem obrazovnom razdoblju, krajem sedmog razreda osnovne škole. U poglavlju u kojem se obrađuje linearna funkcija, kao uvod u koncept proporcionalnosti dana je opisna definicija funkcije:

Funkcija je pravilo po kojem se svakom elementu jednog skupa pridružuje točno jedan element drugog (ili tog istog) skupa.

Idući susret s funkcijama učenicima slijedi u četvrtom obrazovnom razoblju, u srednjoj školi. Kako se nastavni programi matematike gimnazija i strukovnih škola dosta razlikuju, u nastavku će biti riječi uglavnom o gimnazijskom programu. U prvom se razredu prvo ponavlja linearna funkcija, zatim se u drugom razredu pred-

*Predavanje održano na 6. kongresu nastavnika matematike RH 2014. u Zagrebu
[1] Arijana Burazin Mišura, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split
[2] Ivo Baras, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split
[3] Nada Roguljić, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split

stavljaju kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija te se na kraju proučavaju trigonometrijske funkcije. U udžbeniku drugog razreda ponavlja se gornja definicija funkcije. Funkcije koje se proučavaju gotovo su isključivo realne, uz svega nekoliko referenci na drugačije funkcije. Tek u četvrtom razredu gimnazije funkcije se obrađuju detaljnije. Definicija funkcije sada je mnogo preciznija [1]:

Ako je svakom elementu x nekog skupa A pridružen točno jedan element y skupa B, tada kažemo da je definirano preslikavanje (funkcija) f iz skupa X u skup Y. Pišemo $y = f(x)$. Skup A zovemo domenom ili područjem funkcije f i označavamo ga s D_f ili $D(f)$, a skup B kodomenom ili područjem vrijednosti funkcije f i označavamo ga s R_f ili $R(f)$. Iako skupovi A i B mogu biti odabrani na mnogobrojne načine, mi ćemo u nastavku promatrati samo one funkcije za koje je domena i kodomena podskup skupa realnih brojeva. Takve funkcije zovemo realnim funkcijama. Realna funkcija f zadana je svojom domenom $D(f)$, svojom kodomenom $R(f)$ i zakonom pridruživanja $y = f(x)$. S pojmom funkcije povezan je još jedan skup: slika funkcije. Slika funkcije sastoji se od svih $y \in R$ za koje postoji $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. Označavamo ga s $I(f)$.

Kako se definicija funkcije pojavljuje na kraju obrazovnog ciklusa, većina je učenika nije u stanju reproducirati, iako uglavnom uspješno rješavaju zadatke vezane uz funkcije – od onih jednostavnih (izračuna vrijednosti funkcije u nekoj točki), preko nešto složenijih (kao što je određivanje prirodne domene funkcije), do onih najsloženijih (poput ispitivanja toka funkcije).

Injekcija & Surjekcija = Bijekcija

Pojam bijektivnosti funkcije također se uvodi u četvrtom razredu gimnazije, što je motivirano potrebom definiranja važnog pojma inverzne funkcije [1]:

Funkcija $f : D \to R$ je injekcija ako vrijedi $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Svojstvo ekvivalentno ovome je $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Ona je surjekcija ako je $I(f) = R$, tj. ako za svaki $y \in R$ postoji $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. Funkcija $f : D \to R$ je bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

Za većinu učenika ovdje nastupaju problemi. Često se na pitanje što je injekcija/surjekcija od njih dobivaju maštoviti odgovori, poput:

– Funkcija je injekcija ako vrijedi $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Gornja tvrdnja, naravno, vrijedi za svaku, a ne samo injektivnu funkciju *f*. Za dvije jednake vrijednosti argumenta sigurno je da ćemo dobiti jednake vrijednosti funkcije. Ispravno bi bilo koristiti obrat te implikacije.

– Funkcija je injekcija ukoliko je za svaki x iz domene $f(x)$ jedinstven.

Ova tvrdnja također vrijedi za svaku funkciju, baš kao i sljedeća.

– Funkcija je surjekcija ukoliko za svaki x iz domene možemo izračunati $f(x)$.

Iz nekog razloga često se čuje i ovo:

– *Funkcija je surjekcija ako nije injekcija.*

Možemo zaključiti da „mehaničko" reproduciranje i improvizacija u ovom slučaju nikako nisu dobrodošli i da je (za početak) nužno dobro razumjeti i naučiti definicije pojmova.

Utvrđivanje bijektivnosti

Primjer 1. Funkcija $f : R \rightarrow R$ zadana je izrazom $f(x) = 2x + 3$. Ispitajte je li f surjekcija i je li injekcija.

Pretpostavimo da postoje $x_1, x_2 \in R$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. To bi značilo da je $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$, odakle nakon skraćivanja direktno slijedi da je $x_1 = x_2$, te je promatrana funkcija injekcija.

Odaberimo proizvoljni $y \in R$. Potrebno je dokazati da za taj (pa onda i bilo koji) $y \in R$ postoji $x \in R$ takav da je $2x + 3 = y$. Neka vrijednost varijable x iznosi $\frac{y-3}{2}$. Onda vrijedi da je $f(x) = f(\frac{y-3}{2}) = 2\frac{y-3}{2} + 3 = y$. Pokazali smo da za proizvoljnu vrijednost varijable i postoji takav x da vrijedi da je $f(x) = y$, odnosno da je zadana funkcija surjekcija.

Kako je promatrana funkcija injekcija i surjekcija, zaključujemo da je $f(x) = 2x + 3$ bijekcija.

Ukoliko „slutimo" da promatrana funkcija nije injekcija ili surjekcija, navođenjem kontraprimjera pokažemo da funkcija ne zadovoljava navedeno svojstvo. U slučaju injektivnosti, potrebno je naći takve $x_1 = x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ za koje je $f(x_1) = f(x_2)$. Za surjektivnost treba pokazati da postoji i iz kodomene u koji se ne preslika ni jedan element domene.

Primjer 2. Neka je funkcija $f : R \rightarrow R$ zadana izrazom $f(x) = 2x^2 + 3$. Ispitajte je li f surjekcija i je li injekcija.

Pretpostavimo da postoje $x_1, x_2 \in R$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Prema definiciji funkcije $f(x)$ slijedi da je $2x_1^2 + 3 = 2x_2^2 + 3$ odakle sređivanjem izraza dobijemo da vrijedi $x_1 = \pm\sqrt{x_2^2}$ odnosno $x_1 = \pm|x_2|$. Stoga zaključujemo da navedena funkcija nije injekcija.

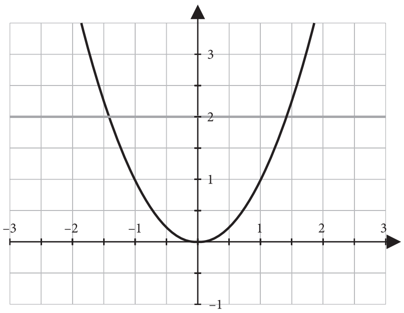
Neka je $y = 1$. Kako je $f(x) = y$, slijedi da bi trebao postojati takav argument $x \in R$ da vrijedi $2x^2 + 3 = 1$, odnosno $x^2 = -1$. Dobivena kvadratna jednadžba nema rješenja u skupu realnih brojeva. Stoga smo pokazali da postoji element kodomene koji nije slika nijednog elementa iz domene te zadana funkcija nije injekcija.

Iz gornjih primjera jasno je da se u ispitivanju injektivnosti i surjektivnosti treba služiti zaključivanjem temeljenim na osnovama matematičke logike, s kakvim se učenici prethodno nisu susretali, što im također može predstavljati ozbiljan problem.

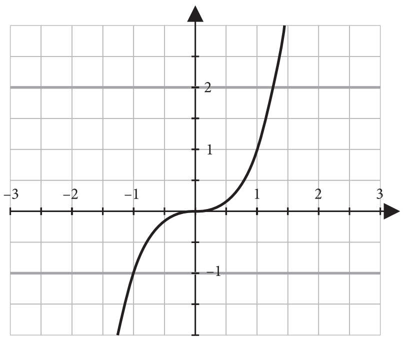
Funkcije zadane grafički

Ukoliko je funkcija zadana grafički, utvrđivanje injektivnosti/surjektivnosti je nešto jednostavnije.

Ako svaki pravac paralelan s osi x siječe graf funkcije u najviše jednoj točki, zadana funkcija je injekcija. Odnosno, ukoliko postoji pravac paralelan s osi x ($y = c$) koji siječe graf funkcije u barem dvije točke, promatrana funkcija nije injekcija.

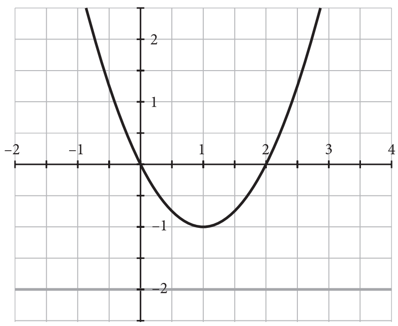


Slika 1. Primjer funkcije koja nije injekcija

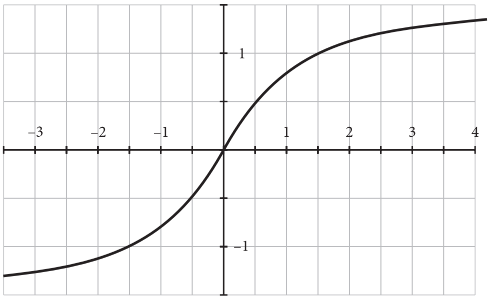


Slika 2. Primjer injektivne funkcije

Ako svaki pravac paralelan s osi x ($y = c$, pri čemu je c element kodomene) siječe graf funkcije, promatrana funkcija je surjekcija. Odnosno, ukoliko postoji element kodomene y takav da pravac paralelan s osi x koji prolazi kroz taj y ne dodiruje graf zadane funkcije, onda ona nije surjekcija.



Slika 3. Primjer funkcije koja nije surjekcija



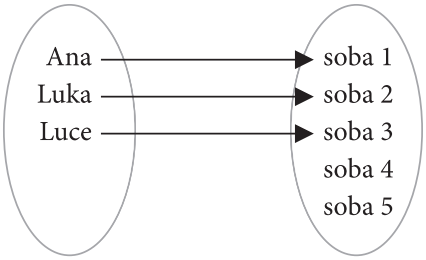
Slika 4. Primjer surjektivne funkcije

Nešto jednostavniji pristup bijekciji

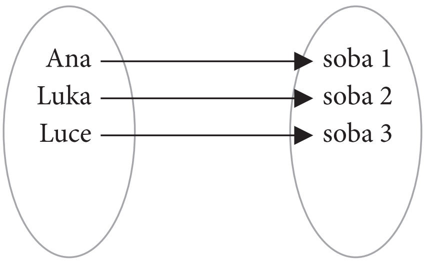
Kako bi se učenicima pribiližilo pojam bijekcije, poželjno je koristiti ilustrativne primjere.

Zamislimo jedan hotel (ne mora biti Hilbertov). Hotelske su sobe prostrane i u svaku se po potrebi može staviti proizvoljno mnogo kreveta. U hotel dolazi grupa gostiju, prijavljuju se na recepciji i svaki gost biva smješten u neku sobu. Neka je f funkcija koja će svakome gostu pridružiti sobu u koju je smješten. Razmotrimo kakav bi sve mogao biti raspored gostiju po sobama.

Slučaj 1. Ukoliko je broj gostiju manji od broja soba, svaki bi gost mogao biti smješten u svojoj sobi (*Slika 5.*).



Slika 5. Injekcija, nije surjekcija



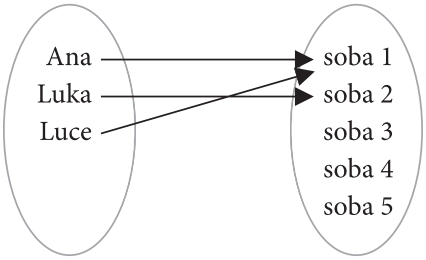
Slika 6. Injekcija i surjekcija

Činjenicu da je svakome gostu pridružena druga soba matematičkim bismo jezikom zapisali: $gost\ 1 \neq gost\ 2 \ \Rightarrow\ soba\ gosta\ 1 \neq soba\ gosta\ 2$ odnosno $x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)$. Stoga je funkcija f injekcija. Kako postoji soba u hotelu u koju nije smješten niti jedan gost (npr. soba 4), funkcija f nije surjekcija.

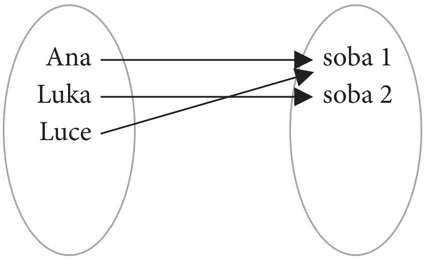
Slučaj 2. Svakome gostu dana je njegova soba i sve su sobe u hotelu popunjene (*Slika 6.*). Istom argumentacijom kao i u slučaju 1., ova funkcija je injekcija. Kako u hotelu nije ostalo slobodnih soba, svaka je soba dobila svoga gosta, funkcija f je i surjekcija. Prema tome, funkcija f je bijekcija.

Slučaj 3. Ana i Luce žele biti smještene zajedno, u dvokrevetnoj sobi (*Slika 7.*). Kako sada vidimo da postoje dva gosta kojima je pridružena ista soba, to jest postoje $x_1, x_2 \in D,\ \ x_1 \neq x_2,\ f(x_1) = f(x_2)$, pridruživanje f neće biti injekcija. Zbog činjenice da neke sobe nisu popunjene, neće biti ni surjekcija (isto kao u slučaju 1.).

Slučaj 4. Ana i Luce ponovo su smještene u istu sobu, a u hotelu nije preostalo slobodnih soba. Ovakvo pridruživanje neće biti injekcija (kako smo već objasnili), međutim jest surjekcija.



Slika 7. Nije injekcija, nije surjekcija



Slika 8. Surjekcija, nije injekcija

U ova četiri slučaja objasnili smo sve moguće kombinacije svojstava injektivnosti i surjektivnosti i zaključili da je preslikavanje koje gostima pridružuje sobe u hotelu bijekcija ako je svaki gost smješten sam u sobi i u hotelu nema slobodnih soba. Bijekcija tumačena na primjeru gostiju hotela učenicima je „opipljivija" od samog formalnog matematičkog tumačenja, te od klasičnih primjera kod kojih je funkcija zadana formulom. U nastavku bi se učenike moglo potaknuti da sami smisle ilustrativne primjere funkcija koje bi ili ne bi bile injekcije, surjekcije i bijekcije.

Umjesto zaključka – pitanja i zadatci

Na ovome mjestu pokušat ćemo odgovoriti na pitanje zašto je razumijevanje pojmova injekcije, surjekcije i bijekcije učenicima tako teško.

1. Prije svega zbog toga što se do definicije funkcije i drugih temeljnih pojmova vezanih za nju dolazi prekasno. Učenici ne doživljavaju funkciju kao trijumf sinteze pojmova linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijskih i ostalih ranije obrađivanih funkcija; iscrpljeni su tolikim fragmentiranim znanjem koje se nagomilava kao „krama" s kojom ne znaju što bi počeli.

2. Najbolji primjer za ovo je poglavlje o funkcijama udžbenika 4. razreda gimnazije[1], gdje smo na dvadesetak stranica nabrojili definicije preko pedeset bitnih novih pojmova i postupaka vezanih za funkcije, koji se listom koriste u razvijanju infinitezimalnog računa realnih funkcija u idućim poglavljima. Tvrdimo da je ovakvo učenje fundamentalnih matematičkih pojmova ovlašno, štrebersko i zato matematici neprimjereno.

3. Koja je korist od uvođenja pojma injektivnosti na kraju prvog polugodišta 4. razreda, kad se ona mogla i trebala koristiti kod rješavanja jednadžbi još u 2. i 3. razredu? Koja je poanta uvođenja pojma inverzne funkcije u jeku priprema za maturalnu zabavu, dvije godine nakon što nam je trebala za suvislo uvođenje logaritama i korijena? Uvedeni na ovakav način, ovi pojmovi samo čekaju nekog reformatora koji će ih, pun brige o djeci, proglasiti viškom i izbaciti iz školskog programa. Napomenimo da su se između 1974. i 1990. pojmovi funkcije, kompozicije funkcija, bijekcije i inverzne funkcije učili u 5. razredu osnovne škole. Podsjetimo da gimnazijalci i danas na početku 1. razreda na fizici crtaju grafove (i nelinearnih) funkcija pomaka, puta, brzine i akceleracije.

4. Da bude potpuno jasno, za ovo su najmanje krivi autori udžbenika koji su učinili sve što je bilo u njihovoj moći da ispune nemoguće zahtjeve programa. Primjerice, kad u poglavlju o integriranju zamjenom varijabli u udžbeniku za 4. razred gimnazije [1] pišu:

   Metodom zamjene varijabli integral računamo ovako:

   1. *odaberemo u kao funkciju varijable x,*
   2. *izrazimo x preko u,*
   3. *povežemo diferencijale du i dx,*
   4. *zamijenimo podintegralnu funkciju i dx s izrazima po varijabli u izračunamo integral. Ukoliko to nije moguće, pokušamo odrediti drugu zamjenu,*
   5. *po završetku integracije rezultat napišemo kao funkciju varijable x.*

Oni svjesno propuštaju spomenuti da funkcija $u(x)$ mora biti (neprekidno) derivabilna bijekcija. Čine to s punom pedagoškom odgovornošću, znajući da učenici nisu u stanju pratiti toliku množinu pojmova.

Uostalom, autori udžbenika stalno se pokušavaju izboriti za promjene i preispitivanje programa [5] i [6].

Nasušnu potrebu funkcionalnog uvođenja matematičkih pojmova, bez pretrpavanja suvišnim sadržajima koji otežavaju njihovo razumijevanje i logično povezivanje, ilustrirat ćemo za kraj dvama zadatcima koji koriste gradivo bijekcije za četvrti razred gimnazije. U prvome zadatku diskutiramo o pogrešci koju je učinio učenik, u drugome o pogrešci uobičajenoj i među profesionalcima.

Zadatak 1. Riješite integral $I=\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^2\cdot\sqrt{x^4}}\,dx$.

Diskusija. Ovo je primjer tabličnog integrala koji se nakon sređivanja lako rješava direktnom integracijom: $I=\int_{-1}^{1}x^{\frac{4}{3}}dx=2\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^1=\frac{6}{7}$.

Dogodilo se, međutim, da se daroviti učenik dosjetio integral rješavati supstitucijom pa je dobio:

$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^2\cdot\sqrt{x^4}}\,dx=\begin{bmatrix}x=u^6\\ dx=6u^5du\end{bmatrix}=6\int_{1}^{1}\sqrt[3]{u^{12}}\cdot\sqrt[6]{u^{12}\cdot\sqrt{u^{24}}}\cdot u^5du=6\int_{1}^{1}u^{13}\,du=0\,.$$

Rješavati integral supstitucijom $x = u^6$ je pogrešno, jer ta funkcija nije bijekcija na interval $[-1, 1]$, pa se u ovom integralu ne može koristiti. Ako bismo integral ipak htjeli riješiti na taj (teži) način, mogli bismo uočiti da je podintegralna funkcija parna.

$$I=2\int_{0}^{1}\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^2\cdot\sqrt{x^4}}\,dx=\begin{bmatrix}x=u^6\\ dx=6u^5du\end{bmatrix}=12\int_{0}^{1}\sqrt[3]{u^{12}}\cdot\sqrt[6]{u^{12}\cdot\sqrt{u^{24}}}\cdot u^5du=12\int_{0}^{1}u^{13}\,du=\frac{6}{7}$$

Zadatak 2. Zadana je funkcija $f(x)=\sqrt{\frac{3^x-9}{4\cdot3^x+1}}$. Odredite inverznu funkciju funkcije *f* i prirodnu domenu te inverzne funkcije.

Diskusija. Rješenje potječe iz radnih materijala postavljenih na internetu. Autor je uobičajenim postupkom dobio da je inverzna funkcija $f^{-1}(x)=\log_3\frac{x^2+9}{1-4x^2}$. Nakon toga je krenuo odrediti prirodno područje definicije dobivene funkcije. Postavljanjem uvjeta $\frac{x^2+9}{1-4x^2}>0$ zaključio je da mora biti $1-4x^2>0$, pa je iz toga dobio $D(f^{-1})=\left\langle-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$.

Međutim, iz izraza $f(x)=\sqrt{\frac{3^x-9}{4\cdot 3^x+1}}$ jasno je da je funkcija f uvijek pozitivna, odakle izlazi da je $D(f^{-1})\neq I(f)$, što ne može biti istina. U čemu je pogreška? Funkcija $f^{-1}(x)$ je restrikcija funkcije $y=\log_3\frac{x^2+9}{1-4x^2}$ na jedan dio njenog prirodnog područja definicije. Postupnim građenjem slike funkcije f iz njenog prirodnog područja definicije $D(f)=\left[2,+\infty\right\rangle$ dobiva se da je $I(f)=D(f^{-1})=\left[0,\frac{1}{2}\right\rangle$.

Literatura

1. B. Dakić, N. Elezović: Matematika 1, 2, 3, 4 – udžbenik i zbirka zadataka, Element, Zagreb, 2013.

www izvori

2. http://gowers.wordpress.com/2011/10/11/injections-surjections-and-all-that/ (14. 4. 2014.)
3. http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/1966/Razvoj%20pojma%20funkcije.pdf?sequence=1 (14. 4. 2014.)
4. http://www.vus.hr/Nastavni%20materijali/Matematika/8.predavanje-FUNKCIJE.pdf (14. 4. 2014.)
5. http://mis.element.hr/fajli/884/49-07.pdf (14. 4. 2014.)
6. http://www.stmath.hr/d/sites/default/files/Pojam%20funkcije%20u%20nastavi%20matematike.ppt (14. 4. 2014.)