MATEMATIKA IZVAN MATEMATIKE

Primjena simulacijskih modela za prognoziranje rezultata natjecanja u bowlingu

Dušan Munđar[1] i Dario Šamarija[2]

Sažetak – ovaj rad predstavlja uvod u područje simulacija i izradu samih simulacijskih modela. Osnovno težište rada čine simulacijski modeli primijenjeni za prognoziranje rezultata sportske igre. Bit će opisani koraci izrade simulacijskih modela, a značajniji rezultati modela bit će prikazani tablično i grafički. Ideja vodilja za pisanje rada je ukazivanje na široke mogućnosti primjene modeliranja uz korištenje simulacija.

Ključne riječi – sport, simulacija, prognoziranje, modeliranje

1. Uvod

Bowling je sport koji je vrlo sličan (u našim krajevima poznatijem) kuglanju. Cilj igre je, kao i kod kuglanja, prikupiti što više bodova. Glavna je razlika u veličini kugle kojom se ruše čunjevi i u načinu bodovanja. Bowling postaje sve popularniji, a kao rekreacija zanimljiv je gotovo svim naraštajima. U radu ćemo se poslužiti izradom simulacija da bismo prognozirali broj bodova koje bi osoba mogla ostvariti igrom. Time pokazujemo jednu od mnogih mogućnosti primjene simulacijskih modela.

U radu ćemo pokušati što jasnije odgovoriti na sljedeća pitanja:

1. Što su to računalne simulacije i gdje se primjenjuju?
2. Što su distribucije vjerojatnosti i kako se generiraju diskretni slučajni brojevi?
3. Kako izraditi simulacijski model prognoziranja ishoda igre u bowlingu?
4. Kako odrediti vjerojatnosti pobjede pojedinog igrača, uz poznate povijesti rezultata igara igrača, na primjeru triju igrača?

[1]Dušan Munđar, Fakultet organizacije i informatike, Sveučilište u Zagrebu

[2]Dario Šamarija, Fakultet organizacije i informatike, Sveučilište u Zagrebu

2. Računalne simulacije

Računalna simulacija računalni je program koji simulira ponašanje apstraktnog modela nekog realnog sustava. Računalne simulacije postale su važan dio matematičkog modeliranja realnih sustava iz područja matematike, fizike, ekonomije i drugih područja. Izrada simulacija pristup je koji se koristi u uvjetima nesigurnosti, kada ne možemo točno odrediti vrijednost neke varijable u budućnosti, ali možemo odrediti distribuciju vrijednosti varijable. Izvođenje simulacija naziva se eksperiment, a simulaciju treba izvesti više puta s različitim vrijednostima uz poštivanje poznatih početnih distribucija varijabli (replikacija eksperimenta).

Najčešća područja primjene simulacija:

- *redovi čekanja* – npr. u trgovinama ili bankama. Pomoću simulacije određujemo broj kupaca koje treba poslužiti u određenom vremenskom razdoblju te broj poslužitelja koji su potrebni da redovi čekanja ne bi bili predugi.
- *upravljanje zalihama* – odnosi se na problem određivanja optimalne količine zaliha koje su potrebne da bi se zadovoljila potražnja koja je slučajnog karaktera.
- *upravljanje proizvodnjom* – odnosi se na završavanje poslova koje je potrebno izvesti te simulaciju mogućih zastoja (zbog potencijalnih kvarova) koji imaju slučajni karakter.

Primjena simulacija u svrhu lakšeg predviđanja određenih ishoda, potreba ili kao potpore kod procesa odlučivanja vrlo je široka.

3. Distribucije vjerojatnosti i generiranje diskretnih slučajnih varijabli

Distribucije vjerojatnosti teorijski su modeli za izračunavanje vjerojatnosti nekog ishoda (događaja). Distribucije vjerojatnosti prema tipu varijable mogu biti:

- diskretne (npr. binomna i Poissonova distribucija),
- neprekidne (npr. normalna, uniformna, eksponencijalna).

Diskretne distribucije vjerojatnosti su one koje mogu poprimiti prebrojiv broj vrijednosti, dok neprekidne distribucije mogu poprimiti neprebrojivo beskonačan broj vrijednosti. Za izradu modela simulacija ishoda igre potrebno nam je generiranje slučajnog broja koji poštuje uniformnu neprekidnu distribuciju. Pomoću slučajnih brojeva odredit ćemo slučajne ishode igre koji poštuju diskretne slučajne distribucije.

Generiranje vrijednosti slučajne varijable započinje generiranjem slučajnog broja na intervalu [0, 1] tj. broja iz uniformne distribucije s parametrima (0, 1). Vrijednosti slučajnih brojeva iz ostalih distribucija mogu se odrediti pomoću tog slučajnog broja. Slučajne brojeve u *MS Excelu* generira funkcija *RAND*(). Dobiveni slučajni broj za-tim se koristi u generiranju slučajne varijable sa zadanom distribucijom koristeći kumulativnu distribuciju vjerojatnosti. Kumulativna distribucija vjerojatnosti prikazuje vjerojatnost da varijabla poprimi vrijednost jednaku ili manju od zadane vrijednosti.

Primjer. Generiranje slučajnog broja X iz diskretne distribucije – broj srušenih čunjeva u jednom bacanju.

Neka igrač ima jednaku vjerojatnost da u jednom bacanju sruši nijedan, jedan, dva... ili deset čunjeva. Slučajnu varijablu koja prikazuje ishode bacanja zapisat ćemo na sljedeći način:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

Za potrebe generiranja slučajnog ishoda iz diskretne slučajne varijable odredit ćemo kumulativnu distribuciju vjerojatnosti $Y = F(X \leq x)$ koju možemo zapisati na sljedeći način:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1/11 & 2/11 & 3/11 & 4/11 & 5/11 & 6/11 & 7/11 & 8/11 & 9/11 & 10/11 & 11/11 \end{pmatrix}$$

Da bismo odredili ishod jedne slučajne varijable, pomoću ugrađene funkcije *RAND*() generiramo slučajni ishod iz uniformne distribucije s parametrima (0, 1). U Tablici 1. prikazan je slučajni broj srušenih čunjeva na temelju ishoda nekoliko slučajnih brojeva iz uniformne distribucije.

Ishod slučajnog broja iz uniformne distribucije (0,1)	**Pripadni interval kumulativne distribucije vjerojatnosti**	**Slučajni ishod srušenih čunjeva u jednom bacanju**
0.0002	$0.0002 \in (0, 1/11)$	0
0.2945	$0.2945 \in (3/11, 4/11)$	3
0.4865	$0.4865 \in (5/11, 6/11)$	5

Tablica 1. Povezivanje slučajnog broja s brojem srušenih čunjeva

4. Izrada simulacijskog modela ishoda igre *bowlinga*

Cilj igre je prikupiti maksimalan broj bodova. Broj ostvarenih bodova u jednoj igri u bowlingu nije jednak broju oborenih čunjeva jer postoji bonificirani način bodovanja. Pri svakom bacanju kugle cilj je srušiti sve postavljene čunjeve. U igri se ruši 10 postavljenih okvira (10 čunjeva postavljenih u obliku trokuta). Za potpuno rušenje jednog okvira imamo dostupno maksimalno dva pokušaja. Ukoliko su u prethodnom ili prethodna dva okvira srušeni svi čunjevi, dobivaju se bonus bodovi. Više o pravilima igre dostupno je na internetskim stranicama [5.] i [6.]. Igrač koji ostvari najveći broj bodova pobjednik je igre.

Primjer 1. Način izrade simulacija (Tablica 2.)

Pretpostavimo da igrač u prvome bacanju ima jednaku vjerojatnost da sruši nijedan, jedan itd. do maksimalno deset čunjeva. Neka je slučajni ishod 0.2945. Budući da je 0.2945 ∈ (3/11, 4/11), slučajni broj srušenih čunjeva je tri (detaljnije prikazano u Tablici 1). Budući da je nakon srušena tri čunja u okviru preostalo sedam čunjeva, u drugom bacanju igrač može srušiti od 0 do 7 čunjeva. Neka vjerojatnost da će igrač u drugome bacanju srušiti nijedan, jedan itd. do maksimalno sedam čunjeva iznosi 1/8. Neka je novi slučajni ishod bio 0.6823. Budući da je 0.6823 ∈ (5/8, 6/8), igrač u drugom bacanju ruši pet čunjeva. (Broj 6/8 prvi je od brojeva kumulativnih vjerojatnosti koji je veći od slučajnog ishoda te njegov pripadni broj čunjeva iznosi 5.) Provedemo isti postupak još devet puta kako bismo dobili konačne rezultate, odnosno odredili uspješnost igrača u prvoj igri.

1. **bacanje**			**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Vjerojatnost p1			1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11	1/11
Kumulativne vj. p1			1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11	11/11
Drugo bacanje	**0**	**P2**	1/11	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1/1
		Kum. P2	1/11	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1/1
	1	**P2**	1/11	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	
		Kum. P2	2/11	2/10	2/9	2/8	2/7	2/6	2/5	2/4	2/3	2/2	
	2	**P2**	1/11	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3		
		Kum. P2	3/11	3/10	3/9	3/8	3/7	3/6	3/5	3/4	3/3		
	3	**P2**	1/11	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4			
		Kum. P2	4/11	4/10	4/9	4/8	4/7	4/6	4/5	4/4			
	4	**P2**	1/11	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5				
		Kum. P2	5/11	5/10	5/9	5/8	5/7	5/6	5/5				
	5	**P2**	1/11	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6					
		Kum. P2	6/11	6/10	6/9	6/8	6/7	6/6					
	6	**P2**	1/11	1/10	1/9	1/8	1/7						
		Kum. P2	7/11	7/10	7/9	7/8	7/7						
	7	**P2**	1/11	1/10	1/9	1/8							
		Kum. P2	8/11	8/10	8/9	8/8							
	8	**P2**	1/11	1/10	1/9								
		Kum. P2	9/11	9/10	9/9								
	9	**P2**	1/11	1/10									
		Kum. P2	10/11	10/10									
	10	**P2**	1/11										
		Kum. P2	11/11										

Tablica 2. Pretpostavke o vjerojatnostima srušenih čunjeva u jednom okviru

Prikaz jedne igre dan je u Tablici 3. Na temelju slučajnih ishoda 20 brojeva određeno je da je igrač u prvoj igri osvojio 113 bodova. U prvom bacanju srušio je tri čunja, u drugome pet. Budući da je zbroj čunjeva u dva bacanja manji od 10, igrač ne dobiva bonus bodove. Na temelju srušenih čunjeva u prvom okviru igrač dobiva 3 + 5 = 8 bodova. Kod drugog okvira na temelju srušenih čunjeva (devet u prvom bacanju i nula u drugom bacanju) dobiva dodatnih devet bodova pa nakon odigrana dva okvira ima 9 + 8 = 17 bodova. Na temelju srušenih čunjeva u trećem okviru (šest u prvom bacanju i četiri u drugom bacanju) igrač osim dodatnih deset bodova dobiva i bonus bodove jer je srušio sve postavljene čunjeve. Bonus bodovi jednaki su broju srušenih čunjeva u prvom bacanju na sljedeći (četvrti) okvir. Ukupni bodovi za tri okvira, uz poznato prvo bacanje na četvrti okvir, su 17 + 10 + 9 = 36. Bodove pribrajamo analogno prema broju srušenih čunjeva u deset okvira.

Bacanje	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1. bacanje	3	9	6	9	8	8	9	6	6	8
2. bacanje	5	0	4	0	0	0	1	3	4	1
Bonus bodovi	0	0	9	0	0	0	6	0	8	***0***
Ostvareni bodovi	**8**	**17**	**36**	**45**	**53**	**61**	**77**	**86**	**104**	***113***

Tablica 3. Prikaz ukupnog rezultata koji je ostvario igrač u jednoj igri

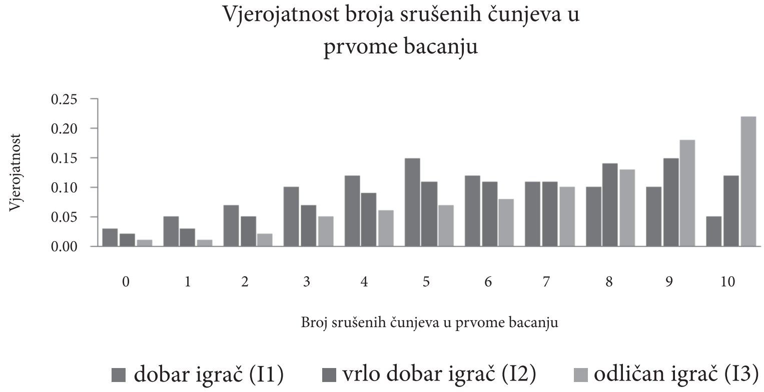
5. Određivanje vjerojatnosti pobjede pojedinog igrača

U ovome dijelu rada prikazat ćemo simulirane rezultate triju igrača ostvarene igranjem 50 igara. Igrače smo klasificirali prema njihovoj uspješnosti u igri, pa imamo tri tipa igrača: dobar (I1), vrlo dobar (I2) i odličan igrač (I3).

Neka su vjerojatnosti rušenja čunjeva za pojedine igrače u prvome krugu dane u Tablici 4. i grafički prikazane na Slici 1. Pretpostavit ćemo da je vjerojatnost uspješnosti rušenja čunjeva u drugome krugu za sve igrače jednaka i da je prikazana u Tablici 2.

Igrač/Ishod	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Dobar (I1)	0.03	0.05	0.07	0.10	0.12	0.15	0.12	0.11	0.10	0.10	0.05
Vrlo dobar (I2)	0.02	0.03	0.05	0.07	0.09	0.11	0.11	0.11	0.14	0.15	0.12
Odličan (I3)	0.01	0.01	0.02	0.05	0.06	0.07	0.10	0.12	0.14	0.20	0.22

Tablica 4. Vjerojatnosti broja srušenih čunjeva u prvome bacanju



Slika 1. Grafički prikaz vjerojatnosti prvog bacanja

Tablica 5. prikazuje rezultate pet igara (od 50 simuliranih igara) navedenih triju igrača i određuje pobjednika, drugoplasiranog i trećeplasiranog u tim igrama.

Broj igre/Tip igrača	*Dobar (I1)*	*Vrlo dobar (I2)*	*Odličan (I3)*	*Pobjednik*	*Drugo-plasirani*	*Treće-plasirani*
1	66	92	142	***I3***	***I2***	***I1***
2	75	95	116	***I3***	***I2***	***I1***
3	101	105	97	***I2***	***I1***	***I3***
4	75	105	104	***I2***	***I3***	***I1***
5	104	107	109	***I3***	***I2***	***I1***

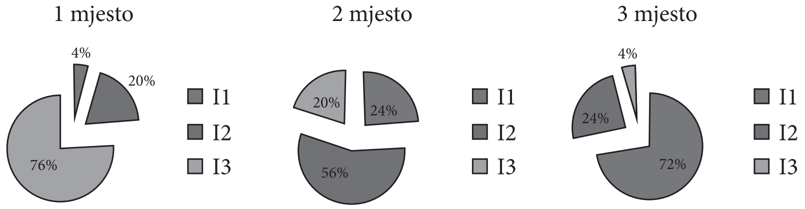
Tablica 5. Tablični prikaz rezultata 5 igara triju igrača (od 50 odigranih igara)

Na temelju dobivenih rezultata od kojih su neki prikazani u Tablici 5. možemo odrediti koliko je puta koji igrač osvojio prvo, drugo ili treće mjesto. Tablica 6. prikazuje uspješnost pojedinog igrača čije smo rezultate grafički prikazali. Prvo mjesto najčešće je osvajao *odličan igrač* – I3, koji je pobijedio u 38 od 50 igara, deset puta pobijedio je *vrlo dobar igrač* – I2, dok je *dobar igrač* – I1 zabilježio samo dvije pobjede. Kod osvajanja drugog mjesta najbolji je bio vrlo dobar igrač koji je 28 puta osvojio drugo mjesto, 12 puta drugo mjesto osvojio je dobar igrač, dok je deset puta drugo mjesto osvojio odličan igrač. Treće mjesto najčešće je osvajao dobar igrač, i to čak 36 puta, vrlo dobar igrač 12 puta, te odličan dva puta.

Osvojeno mjesto/tip igrača	1 mjesto	2 mjesto	3 mjesto
Dobar (I1)	2	12	36
Vrlo dobar (I2)	10	28	12
Odličan (I3)	38	10	2

Tablica 6. Tablični prikaz osvojenih mjesta

Slika 2. daje grafički prikaz uspješnosti igrača i zorno prikazuje koliko je puta koji od igrača osvojio prvo, drugo ili treće mjesto. Dakle, u 50 igara najviše prvih mjesta očekivano je osvojio *odličan igrač – I3*, drugo mjesto najčešće je osvajao *vrlo dobar igrač – I2*, dok je treće mjesto uvjerljivo osvajao *dobar igrač – I1*. Možemo zaključiti da nije došlo do velikih iznenađenja. U dva slučaja dogodilo se da je u igri pobijedio *dobar igrač.* Ovakvi su scenariji rijetki, no pokazuju da su iznenađenja moguća.



Slika 2. Grafički prikaz uspješnosti igrača prema ostvarenom mjestu

6. Zaključak

U radu smo prezentirali izgradnju jednostavnog simulacijskog modela i primjenu rezultata na određivanje vjerojatnosti pobjede pojedinog igrača u bowlingu. Igra se odvijala između tri igrača različitih karakteristika. Da bismo opisali model, trebali smo uvesti distribucije vjerojatnosti, opisati način generiranja slučajnih brojeva iz diskretnih slučajnih varijabli te opisati igru na jednostavan način. Izrađeni model omogućava nam procjenu vjerojatnosti završetka igre pojedinog igrača na određenom mjestu – prvom, drugom ili trećem na temelju simuliranih rezultata više igara. Značajnije rezultate grafički prikazujemo radi lakše predodžbe rezultata.

Literatura

1. Banks, J. and J. Carson. *Discrete-Event Simulation*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1984.
2. Sarapa, N., *Teorija vjerojatnosti*,Školska knjiga, Zagreb, 2005.
3. Turban E., Meredith, J.R., *Fundamentals of management science*, IRWIN, Boston, 1991.
4. Winston, W.L., *Operations Research: Applications and Algorithms*, Duxbury Press, Belmont California, 1994.
5. http://www.bowling-hr.com/O_bowlingu/pravila_bowl (13. 4. 2015.)
6. http://www.bowl.com/rules (13. 4. 2015.)