Matka 24 (2015./2016.) br. 93

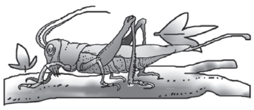
PA TO SE STALNO PONAVLJA!

Željko Brčić, Vinkovci

Jeste li ponekad, u rano jutro ili u kasni sumrak, čuli monotono i ponavljajuće glasanje nekih životinja? Sova se, primjerice, glasa jednolikim zvukom koji ljudi mogu oponašati frazom „HU HUU HUUU". Glasanje cvrčka, pak, može se predstaviti sa „CVRRRR". Slušajući takve zvukove, matematičaru odmah pada na pamet zadatak.

Primjer 1. Kad cvrčak tisućiti put izgovori glas (slovo) R, koji će glas u tome trenutku ispustiti sova? Pretpostavka je, naravno, da se obje životinje počnu glasati istodobno te da im za „izgovor" pojedinog glasa treba jednako vremena.

Rješenje: Ako je cvrčak tisuću puta izgovorio glas R, to znači da je 250 puta ponovio frazu CVRRRR, odnosno da je ukupno izgovorio 1 500 glasova (slova). Treba dakle izračunati koje je slovo na tisuću petstotom mjestu u beskonačnom nizu koji dobijemo tako da frazu HU HUU HUUU neprestano ispisujemo jednu iza druge. Ta se fraza sastoji od 9 slova. Kako je $1\,500 = 166 \cdot 9 + 6$, zaključujemo da će fraza biti 166 puta ispisana u cijelosti, te da će se nakon toga ispisati još 6 dodatnih slova. Očito je tisuću petstoto slovo cijeloga niza jednako šestom slovu sovine fraze, odnosno rješenje je slovo (glas) H.



Zadatci s beskonačnim nizovima (doduše najčešće brojeva, a ne slova) često se javljaju u nastavi matematike, a posebice na matematičkim natjecanjima. O nekim primjerima bit će riječi u nastavku članka. No, prvo malo teorije.

Nizom smatramo bilo koji skup (brojeva) u kojem znamo (ili po nekom pravilu možemo odrediti) redoslijed njegovih članova. Tada govorimo o prvom, drugom, trećem... i općenito n-tom članu niza. Niz je beskonačan kada ima beskonačno mnogo članova, a među njima su posebno zanimljivi periodički nizovi – u kojima postoje dijelovi koji se neprestano ponavljaju. Primjerice, niz 121231212312123... beskonačni je periodički niz jer se sastoji od beskonačno mnogo brojeva koji se neprestano ponavljaju. Točnije, ponavlja se dio niza sastavljen od znamenaka 12123, koji općenito zovemo *period niza*.

Primjer 2. Odredimo 914. decimalu u decimalnom zapisu razlomka $\frac{9}{14}$.

Rješenje: Decimalni zapis ovoga razlomka glasi $0.64\overline{285714}$. Riječ je o beskonačnom decimalnom broju koji ima dvoznamenkasti predperiod 64 (dio koji se ne ponavlja), nakon čega slijedi šesteroznamenkasti period 285714. Odmah ćemo eliminirati dvije početne decimale i potražiti 912. član beskonačnog niza brojeva koji slijedi iza njih. Kako je $912 : 6 = 152$, pri čemu nema ostatka, zaključujemo da će tražena decimala biti posljednja znamenka perioda, tj. znamenka 4.

Primjer 3. Dokažimo da je zbroj $2^{444} + 3^{666}$ djeljiv brojem 5.

Rješenje: Računajući redom potencije broja 2, primjećujemo da se znamenke jedinica tih brojeva periodički ponavljaju. Naime, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, pa zatim $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, i tako dalje. Znamenke jedinica čine beskonačni periodički niz brojeva s četveroznamenkastim periodom 2 486. Kako je ostatak pri dijeljenju broja 444 brojem 4 jednak 0, posljednja znamenka potencije 2^{444} jednaka je posljednjoj znamenki potencije 2^4, odnosno to je znamenka 6.

Analogno se računa i posljednja znamenka potencije 3^{666}. Ponovno imamo beskonačni periodički niz brojeva, ovaj put s četveroznamenkastim periodom 3 971. Pri dijeljenju broja 666 brojem 4 dobijemo ostatak 2, što znači da je posljednja znamenka ista kao i kod 3^2, odnosno da je to 9.

Budući da prva potencija završava znamenkom 6, a druga znamenkom 9, njihov zbroj mora završavati znamenkom 5, što ujedno znači da je taj zbroj djeljiv brojem 5.

Primjer 4. Za poznati x_n računamo x_{n+1} prema formuli $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$. Ako je $x_1 = 3$, koliko je x_{1111}?

Rješenje: U primjeru se radi o nizu brojeva u kojem se svaki sljedeći član niza računa pomoću njegova prethodnika (tzv. rekurzivni niz). No, da bismo dobili 1111. član niza nije potrebno računati sve njegove prethodnike jer je i ovaj niz periodički. Iz $x_1 = 3$ dobije s $x_2 = -2$, a zatim $x_3 = -\frac{1}{3}$ i $x_4 = \frac{1}{2}$. Sljedeći članovi niza periodički se ponavljaju $x_5 = 3$, $x_6 = -2$... Da bismo odredili traženi član niza, potrebno je odrediti ostatak pri dijeljenju broja 1111 brojem 4. Budući da vrijedi $1111 = 277 \cdot 4 + 3$, zaključujemo da je $x_{1111} = x_3 = -\frac{1}{3}$.

Primjer 5. Broju 2 015 dopisujemo znamenke zdesna na sljedeći način: zbrojimo znamenku jedinice, znamenku desetice i znamenku stotice te znamenku jedinice zbroja dopišemo. Zatim to isto ponovimo za novodobiveni broj i tako redom 1 000 puta. Postoje li u dobivenom broju s 1 004 znamenke u zapisu redom, jedna do druge, znamenke 1, 5 i 3 (odnosno ...153...)?[1]

Rješenje – prvi način: Zanemarimo na početku navedene brojeve te samo promatramo jesu li oni parni (P) ili neparni (N). Naš niz počinje s PPNN. Lako se vidi da zbrajanjem posljednja tri člana niza (P + N + N) moramo dobiti parni broj (P), zatim (uz skraćeni zapis!) N + N + P = P, pa N + P + P = N i P + P + N = N. Bez obzira koje znamenke dobili, njihova parnost/neparnost mora biti kao na početku PPNN, a to se ponavlja i dalje. Radi se, dakle, o beskonačnom nizu PPNNPPNNPPNN. ... u kojem se periodički izmjenjuju po dvije parne i dvije neparne znamenke. Očito je da se u tom nizu ne mogu pojaviti redom tri neparne znamenke NNN, pa ni konkretno ...153.

Rješenje – drugi način: Zadatak se može riješiti na sličan način, promatrajući niz „unazad". Pretpostavimo da se u zadanom nizu u nekom trenutku pojavljuju znamenke ...153... i pogledajmo koje parnosti mora biti znamenka neposredno prije 1. Kako su i 1 i 5 neparni brojevi, njihov je zbroj paran, a da bismo njegovim zbrajanjem s nepoznatom znamenkom dobili neparan broj (koji završava znamenkom 3), ta znamenka također mora biti neparna. Pokazali smo da neposredno prije tri neparna broja NNN također mora niti neparan broj, a generaliziranjem tog zapažanja slijedi da sve znamenke koje prethode ...153 moraju biti neparne. No, kako naš niz počinje s dvije parne znamenke (20), to je očito nemoguće. Zaključujemo, dakle, da naša pretpostavka nije točna, odnosno da se u zadanom nizu znamenke ...153... ne mogu pojaviti.

[1]Ovaj je zadatak bio postavljen na Državnom natjecanju 2015. god. u Trogiru u konkurenciji petih razreda, a može se riješiti na nekoliko načina.

Rješenje – treći način: Primijetimo da se način rješavanja zadatka uopće ne bi promijenio da su umjesto brojeva 2015 i 153 navedene neke druge znamenke iste parnosti. No, zadatak se može rješavati koristeći baš te navedene brojeve, samo pri tome treba imati malo više strpljenja. Pretpostavimo, ponovno, da se u zadanome nizu u nekom trenutku pojavljuju znamenke ...153... i računajmo redom koje su se znamenke morale pojaviti prije 153. Kako je 1 + 5 = 6, ispred 1 mora biti 7, da bi 7 + 6 dalo 13, što rezultira znamenkom 3 iza 15. Na identičan način može se zaključiti da ispred znamenke 7 mora opet biti znamenka 7 i tako dalje. Nakon dugotrajnog, ali relativno jednostavnog računanja dobit ćemo ovakav niz brojeva:

...1539795151731157355331719773777153...

Nakon tridesetak računanja ponovno se pojavila početna trojka ...153..., pa daljnje računanje nije potrebno jer se i ostale znamenke ponavljaju. Riječ je, dakle, o beskonačnom periodičnom nizu brojeva čiji se period sastoji od 31 znamenke. Kako se među znamenkama perioda ne pojavljuje kombinacija 2 015, ona se očito ne može pojaviti nigdje unutar toga niza, pa ni na početku traženog niza od 1 004 znamenke.

Još je zanimljivije ako se znamenke računaju počevši od broja 2 015 jer tada, da bi se pokazala periodičnost niza, stvarno treba biti jako uporan. Niz jest periodički, ali mu se period sastoji od 124 znamenke. Prva znamenka 2 je predperiod (ne ponavlja se), a zatim slijedi ponavljajući niz znamenaka koji, naravno, započinje s 015..., a s kojim troznamenkastim brojem završava – izračunajte sami.

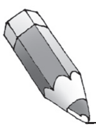
Na samome kraju ovoga teksta o beskonačnim periodičkim nizovima slijedi pet zadataka (po jedan od 4. do 8. razreda), postavljenih na nekim prijašnjim matematičkim natjecanjima.

1. U jednoj bari raste pet lopoča. Najdraža razonoda žabice Zelenike je skakanje s lopoča na lopoč, što uvijek radi na isti način. Njezin prvi skok je s prvog lopoča na drugi, drugi skok je s drugog lopoča na treći, treći skok je s trećeg lopoča na četvrti, četvrti skok s četvrtog lopoča na peti lopoč, nakon čega se vraća nazad – s petog na četvrti lopoč, s četvrtog na treći, s trećeg na drugi, s drugog na prvi lopoč i opet ispočetka. Na kojem će se lopoču nalaziti žabica Zelenika nakon što je izvela 2 002 skoka? (Školsko natjecanje, 4. razred, 2002.)

2. Maja je krenula od kuće brojeći korake. Prvo je koračala 10 koraka naprijed pa 3 koraka natrag, 10 koraka naprijed i 2 koraka natrag, 10 koraka naprijed i 1 korak natrag. Taj postupak Maja ponavlja pri koračanju. Koliko koraka Maja mora učiniti da bi se od kuće udaljila 2 014 koraka? (Državno natjecanje, 5. razred, 2014.)

3. Koja se znamenka nalazi na 2001. decimalnom mjestu u decimalnom zapisu razlomka $\frac{469}{1998}$? (Regionalno natjecanje, 6. razred, 2001.)

4. Iz zadanog broja x_1 računamo $x_2 = \frac{1+x_1}{1-x_1}$. Dobiveni rezultat koristimo za računanje $x_3 = \frac{1+x_2}{1-x_2}$ i tako dalje sve do $x_{2015} = \frac{1+x_{2014}}{1-x_{2014}}$. Ako je dobiveni $x_{2015} = \frac{1}{5}$, koliki je bio x_1? (Državno natjecanje, 7. razred, 2015.)



5. Dokažite da je $5^{2002} + 7^{2002} + 9^{2n}$ djeljivo brojem 5 za svaki prirodni broj n. (Županijsko natjecanje, 8. razred, 2002.)