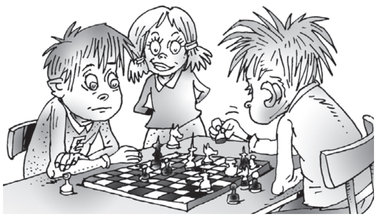
# ŠAHOMATEMATIKA – MATEMATIČKO-ŠAHOVSKA RAZONODA

Siniša Režek, Zagreb

U Hrvatskoj je u tijeku prorada iznimno vrijedne inicijative – šah u škole. Ako se to ostvari, bilo bi mudro da se ne obuhvate samo igrački sadržaji, nego i probrane teme iz domene problema o šahu. Pri tome šahomatematika zaslužuje posebnu pažnju, a to je ovdje *radni naziv* za ukupnost zadaća, problema i poučaka koji izviru iz svojstava same šahovnice, odnosa nje i pojedinih vrsta figura, osebujnosti figura, te matematičkih aspekata pravih šahovskih problema. Povijesno sve ostvareno uvrštava se zasad, kao po pravilu, u prostor *razonodne* i / ili *rekreativne* matematike.



Prisjetimo se da se šahovnica sastoji od mreže 8 × 8 polja sa 64 jednaka kvadrata, naizmjence svijetla („bijela" polja) i tamna („crna" polja). Zanimljivo, većina brojeva koji se mogu naći na šahovskoj ploči u broju 64 djelitelji su ili višekratnici od 8. Osam okomitih nizova polja nazivaju se „linije". Osam vodoravnih nizova polja nazivaju se „redovi". Ravni niz polja iste boje, koji idu od jednog ruba ploče do susjednog ruba, naziva se „dijagonala". Osam linija (s lijeva na desno za bijelog, odnosno s desna na lijevo za crnog) označavaju se malim slovima, redom a, b, c, d, e, f, g i h, dok se osam redova (od dna do vrha za bijelog, odnosno od vrha do dna za crnog) numeriraju redom 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8.

Prema gore navedenom opisu šahovnicu možemo vizualizirati kao koordinatnu mrežu, gdje su umjesto točke kvadrati (polja). Kao posljedica prethodnih opisa svako od 64 polja nepromjenljivo je označeno jedinstvenom kombinacijom slova i broja.

Pred vama se nalaze zadatci vezani uz šah i šahovsku ploču. Pomoću njih možete izvježbati i izoštriti svoje geometrijske i računske sposobnosti.

1. *Tko je pobjednik?* – Antun, Barbara i Cvjetko organizirali su šahovski tromeč. Prije natjecanja dali su prognoze o redoslijedu na kraju natjecanja. Antun je prognozirao redoslijed: Antun, Barbara, Cvjetko. Barbara je prognozirala: Barbara, Antun, Cvjetko. Cvjetko je prognozirao redoslijed: Cvjetko, Antun, Barbara. Na završetku tromeča ispostavilo se da je samo jedan natjecatelj pogodio točno mjesto samo jednog natjecatelja, a sve ostale prognoze bile su netočne. Kakav je bio redoslijed na kraju tromeča?
2. *Koliko ih ima?* – Na šahovskome natjecanju odigrano je 45 partija. Koliko je natjecatelja sudjelovalo ako je svaki sa svakim odigrao samo po jednu partiju?
3. *Kralj i kraljica* – Na koliko načina možemo različito obojene kralja i kraljicu staviti nasumice na šahovsku ploču, te koliko je pritom takvih pozicija „pogubnih" po kralja?



Matka 93N.indd 24 12.9.2015. 11:46:20

4. *Opseg i površina šahovskog polja* – Jedna šahovska ploča od 8 × 8 polja ima površinu 17 $dm^2$ i 64 $cm^2$. Kolika je površna i koliki je opseg jednoga polja ako udaljenost između rubova šahovske ploče i rubova krajnjih polja iznosi 1 cm?

5. *Brojevi na šahovskoj ploči* – U polja šahovske ploče od 8 × 8 polja upisani su redom neparni brojevi. U prvom redu upisani su brojevi: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15; u drugom redu brojevi: 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 tako da je 17 iznad broja 1, 19 iznad broja 3, itd.; u trećem redu brojevi: 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47... i tako redom do popune ploče. Među njima je izabrano 8 brojeva tako da se u svakoj liniji i svakome redu nalazi točno jedan od njih. Koliki je zbroj tih brojeva i koliko različitih vrijednosti zbrojeva postoji bez obzira na način biranja tih brojeva?

Nakon što zadatak riješite, provjerite ga u donjem odlomku. Ako ste točno odgovorili, prijeđite na sljedeći zadatak. Ukoliko zadatak ne znate riješiti, razmislite ili potražite pomoć prvo prijatelja, a tek onda učitelja. Ova rješenja također sadrže kratku uputu i to bi vam trebalo biti dovoljno da zadatak riješite. Nemojte prerano koristiti Rješenja! Tek ako i nakon nekoliko uzastopnih pokušaja niste uspjeli riješiti zadatak, pročitajte potpuno rješenje. Rješenja su zapisana riječima, ali i slikovno, tako da zorno možete uvidjeti rješenja.

**Rješenja:**

1. Pretpostavimo prognoze u obliku Antun-Barbara-Cvjetko – ABC, BAC i CAB. Vidi se da je svatko prognozirao svoju pobjedu. Dakle, pobjednik tromeča pogodio je svoj plasman, a nitko nije dobro prognozirao drugoplasiranog i trećeplasiranog. Iz prognoza se vidi da nitko nije predvidio da je Cvjetko drugi, niti da je Antun treći. Prema tome na kraju tromeča redoslijed je bio: Barbara, Cvjetko i Antun (BCA).

| Prognoza | 1. mjesto | 2. mjesto | 3. mjesto |
|---|---|---|---|
| **Antuna** | A | B | C |
| **Barbare** | B | A | C |
| **Cvjetka** | C | A | B |
| **Točna** | **B** | **C** | **A** |

2. Ako je na natjecanju sudjelovalo $x$ natjecatelja, onda je svaki natjecatelj odigrao $x - 1$ partiju (nije igrao sam sa sobom, zato je jedna partija manje od broja natjecatelja).
Ukupan broj partija dobiva se kada se
$$(x - 1) \cdot x \text{ podijeli brojem } 2$$
(partija je računata dvaput kao A protiv B i B protiv A).
Značí, ukupan broj partija na tome natjecanju je:
$$(x - 1) \cdot x : 2 = 45, \text{ tj.}$$
$$(x - 1) \cdot x = 90.$$
Kako su $x$ i $(x - 1)$ dva uzastopna prirodna broja, da bi njihov umnožak bio 90, treba biti 9 i 10.
Dakle, na natjecanju je sudjelovalo 10 natjecatelja.



Matka 93N.indd 25 12.9.2015. 11:46:20

**3.** Jasno je da kralja i kraljicu možemo postaviti na ploču $8 \cdot 8$ polja na $64 \cdot 63 = 4\,032$ načina. Kako kraljica s ukupno 28 polja napada po 21 polje, s 20 polja napada po 23 polja, s 12 polja napada po 25 polja, a s 4 polja po 27 polja – za kralja je od ta 4 032 načina pogubno njih $28 \cdot 21 + 20 \cdot 23 + 12 \cdot 25 + 4 \cdot 27 = 1\,456$ načina.

**4.** Kako šahovska ploča ima oblik kvadrata čija je površina 17 dm$^2$ i 64 cm$^2$ = 1 764 cm$^2$, duljina jedne stranice tog kvadrata je 42 cm. Kada se od 42 cm oduzmu 2 cm, koliko iznose obje udaljenosti od ruba ploče, ostaje 40 cm – što predstavlja ukupnu duljinu svih 8 stranica šahovskih polja u jednom redu. Prema tome, duljina stranice jednog polja je 5 cm, pa je površina jednog polja 25 cm$^2$, a opseg 20 cm.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 |
| 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 |
| 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 |
| 65 | 67 | 69 | 71 | 73 | 75 | 77 | 79 |
| 81 | 83 | 85 | 87 | 89 | 91 | 93 | 95 |
| 97 | 99 | 101 | 103 | 105 | 107 | 109 | 111 |
| 113 | 115 | 117 | 119 | 121 | 123 | 125 | 127 |

**5.** Na primjer:

$$1 + 29 + 47 + 59 + 73 + 87 + 101 + 115 = 512 \text{ ili}$$
$$3 + 17 + 37 + 55 + 73 + 91 + 109 + 127 = 512.$$

Zbroj je 512 i konstantan je bez obzira na način biranja tih brojeva. Pogledajmo zašto. Prvo, odredimo koji je broj zapisan koordinatama $(i, j)$. Neka su elementi skupa 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 – dakle brojimo od 0. Kad bi to bili brojevi redom od 0, dakle 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... lako se vidi da bi na $(i, j)$ mjestu (u $i$-tom retku i $j$-tom stupcu) bio broj $8 \cdot i + j$ ($8 \cdot i$ su brojevi u redovima iznad, a $j$ brojevi lijevo). Ovako, s obzirom na to da imamo neparne brojeve 1, 3, 5, 7, 9..., zamijenimo $n$ s $2 \cdot n + 1$, pa na mjestu $(i, j)$ piše

$$2 \cdot (8 \cdot i + j) + 1 =$$
$$= 16 \cdot i + 2 \cdot j + 1.$$

Sada recimo da su odabrane pozicije $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_8, j_8)$. Ne znamo pojedine $i$-jeve i $j$-ove ni njihov odnos, ali ono što sigurno znamo jest da je u svakom stupcu točno jedan broj odabran, dakle $j$-ovi su međusobno različiti. No kako ih ima 8 iz 8-članog skupa 0...7, ispada da je skup $\{j_1, j_2, \ldots, j_8\}$ upravo jednak $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, odnosno (zbog komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja) zbroj

$$j_1 + j_2 + j_3 + \ldots + j_8 =$$
$$= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 =$$
$$= 7 \cdot 4 =$$
$$= 28.$$

Potpuno jednako (u svakom retku je točno jedan) dobijemo

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_8 = 28.$$

Zbroj svih odabranih brojeva je

$$(16 \cdot i_1 + 2 \cdot j_1 + 1) + (16 \cdot i_2 + 2 \cdot j_2 + 1) + \ldots + (16 \cdot i_8 + 2 \cdot j_8 + 1) =$$
$$= 16 \cdot (i_1 + i_2 + \ldots + i_8) + 2 \cdot (j_1 + j_2 + \ldots + j_8) + (1 + 1 + \ldots + 1) =$$
$$= 16 \cdot 28 + 2 \cdot 28 + 8 =$$
$$= 18 \cdot 28 + 8 =$$
$$= 504 + 8 =$$
$$= 512.$$



Matka 93N.indd 26 12.9.2015. 11:46:20