

## MATEMATIKA U ŽONGLIRANJU

Tomislav Babić, XV. gimnazija, Zagreb

Žongliranje je vještina koja uključuje manipulaciju predmetima. Drugim riječima, žongler baca različite predmete u zrak, a potom ih hvata (slika 1.). Najčešće se žonglira lopticama, ali mogu se koristiti i drugi predmeti, čak i zapaljeni. Što više predmeta žongler baca, to je izvedba dojmljivija. Vjerujem da ste svi barem jednom, ako ne uživo barem na internetu, vidjeli žongliranje. Žonglirati se može za rekreaciju ili se njime može profesionalno baviti. Iako je žongliranje naizgled nasumično bacanje predmeta u zrak, to nije točno. Žongler mora dobro razraditi plan (prvo na papiru) kako će bacati predmete. To je kao da smišlja plesnu točku. U toj razradi žongler se koristi „Jugglingsequenceom”, dijagramima i matematičkim metodama.



Slika 1. Žongliranje

### „Jugglingsequence“

Žongler žonglira na određeni pravilni ritam. Svaki predmet ostaje u zraku točno određen broj udaraca (doba). Postoji više različitih uzoraka, a najjednostavniji su osnovni uzorci. Osnovni uzorci, poznati kao „N – ball”, uzorci su u kojima svaki predmet ostaje u zraku točno  $n$  udaraca. U složenim uzorcima svaki predmet u zraku ostaju različiti brojevi doba. Ti se uzorci zapisuju pomoću „Jugglingsequence”. Primjer „Jugglingsequencea” za osnovni uzorak u kojemu se koristi  $n$  loptica i svaka u zraku ostaje 5 doba je 5. Primjer složenog uzorka s 2 loptice u kojemu se prva baci na prvu dobu i u zraku ostaje 5 doba, na drugu dobu se niti jedna loptica ne baca, a na treću se baca jedna loptica koja u zraku ostaje jednu dobu je: 5, 0, 1. „Jugglingsequence” se ponavljaju u krug. Zbog toga je 5, 0, 1 isto kao i 5, 0, 1, 5, 0, 1, ali je isto kao i 0, 1, 5 i 1, 5, 0. No, problem je u tome što se ne može svaki „Jugglingsequence” napisan na papiru žonglirati. Kako bismo provjerili može li se neki „Jugglingsequence” žonglirati, možemo koristiti dijagrame žongliranja ili matematičku metodu.

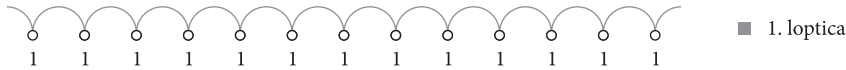
### Dijagrami žongliranja

Dijagrami žongliranja su grafički prikazi „Jugglingsequencea”. Oni moraju biti dovoljno dugački kako bi se vidjelo svojstvo „Jugglingsequencea” da odmah nakon kraja isti kreće ponovno (na primjer nakon 5, 0, 1 ponovno ide 5, 0, 1).

Na slici 2. prikazan je dio dijagrama žongliranja za „Jugglingsequence” 1. Taj „Jugglingsequence” sastoji se od bacanja jedne crvene loptice. Kao što

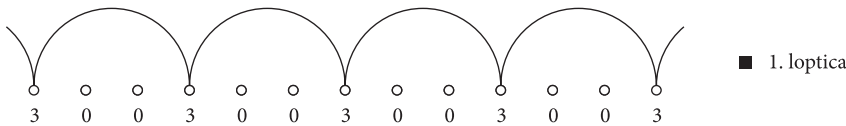


možete vidjeti na dijagramu, na svaku dobu crvena loptica padne žongleru u ruku, nakon čega je on ponovno baci.



Slika 2. Dijagram žongliranja za „Jugglingsequence” 1

Na slici 3. prikazan je dio dijagrama žongliranja za „Jugglingsequence” 3, 0, 0. Taj „Jugglingsequence” sastoji se od bacanja jedne plave loptice. Na dijagramu možete vidjeti da na jednu dobu žongler baci lopticu, a ona je sljedeće tri dobe u zraku. Nakon toga loptica padne žongleru u ruku, nakon čega je on ponovno baca.



Slika 3. Dijagram žongliranja za „Jugglingsequence” 3, 0, 0

### Zadatak

Odredite je li loptica u ruci ili u zraku na sedmu dobu, na jedanaestu dobu, 145. dobu i 231. dobu.

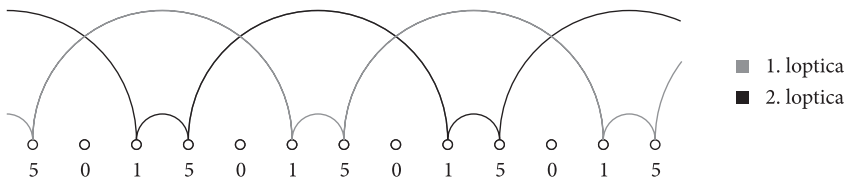
### Zadatak

Nacrtajte dijagram žongliranja za „Jugglingsequence” 5, 0, 0, 0, 0 i 0, 0, 1.

Do sada smo imali jednu lopticu. Što ako istodobno bacamo dvije loptice? Promotrimo „Jugglingsequence” u kojem bacamo dvije loptice – crvenu i plavu. Na prvu dobu žongler baci crvenu lopticu koja u zraku ostaje pet doba. Na drugu dobu ne baca ništa. Na treću dobu baca plavu lopticu koja mu u četvrtoj dobi padne u ruku. Na četvrtu dobu ponovno baca plavu lopticu, ali ona ovaj put u zraku ostaje pet doba. Na šestu dobu u ruku mu padne crvena loptica te ju on ponovno baca, ali ovaj put ona u zraku ostaje jednu dobu.



„Jugglingsequence” za ovo žongliranje je 5, 0, 1, a na slici 4. prikazan je dio dijagrama žongliranja.



Slika 4. Dijagram žongliranja za „Jugglingsequence” 5, 0, 1



**Zadatak**

Zapišimo dobe na kojima je crvena loptica u ruci: 1, 6, 7, 12, 13... Nastavite niz. Odredite je li crvena loptica u ruci ili u zraku na 30. dobu, na 122. dobu, 145. dobu i 163. dobu.

Napišite niz doba na kojima je plava loptica u ruci.

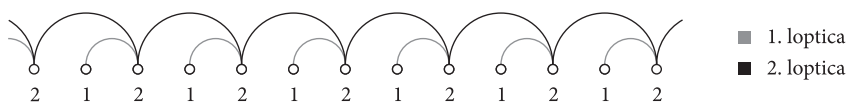
**Kako se crtaju dijagrami žongliranja?**

Dijagram žongliranja crta se tako da pomoću točkica prvo nacrtamo vremensku lentu, a svaka točkica predstavlja jednu dobu. Zatim, počevši od prve točkice potpišemo zadani „Jugglingsequence”. Nakon što jednom napišemo cijeli „Jugglingsequence”, krenemo ponovno (ako je zadano 5, 0, 1 potpisujemo 5, 0, 1, 5, 0, 1...) sve dok ne dođemo do kraja lente vremena. Lenta ne treba biti predugačka, ali neka bude barem dva do tri puta dulja od najvećeg broja u „Jugglingsequence”. Onda iz svake točkice, počevši iz prve, nacrtamo luk koji se proteže u desno točno onoliko točkica koliki broj piše ispod točkice iz koje kreće. To ponovimo za sve točkice.

Svaka točkica na dijagramu označava jednu dobu. Početak luka označava trenutak u kojem je loptica bačena u zrak, a kraj luka trenutak u kojemu je ta loptica sletjela nazad u ruku žonglera. Točkice preko kojih luk prolazi označavaju dobe u kojima je loptica u zraku.



Na slici 5. prikazan je dio dijagrama žongliranja za „Jugglingsequence” 2, 1.



Slika 5. Dijagram žongliranja za „Jugglingsequence” 2, 1

**Zadatak**

Koliko je loptica u ruci na 1., 3., 5., ... dobu? Što se događa s crvenom lopticom na treću dobu? Što mislite o ovom žongliranju?

**Može li se „Jugglingsequence” žonglirati?**

Pretpostavite može li se „Jugglingsequence” 2, 1 žonglirati? A 5, 0, 1? Ako ste rekli da se 2, 1 ne može žonglirati, a 5, 0, 1 može – bili ste u pravu. Kako dolazimo do tog zaključka? Vjerojatno ste sami došli do jednog ili oba pravila koja se koriste kako bi se odredilo može li se „Jugglingsequence” žonglirati:



1. Dijagram žongliranja mora se širiti beskonačno na obje strane, tj. ne smije iz jedne točke počinjati luk ako nije u njoj jedan završio i ne smije u jednoj točki završavati luk ako u njoj jedan ne počinje. Dopušteno je da u nekim točkama ne počinje niti završava niti jedan luk.

OBJAŠNJENJE: Ako luk završava u jednoj točki, a novi ne počinje u toj istoj, to bi značilo da je loptica pala, a nije poletjela, tj. nestala je. Ako bi luk počeo u točki u kojoj niti jedan luk nije završio, to bi značilo da se loptica niotkuda stvorila u ruci žonglera.

2. Na svaku dobu najviše jedna loptica smije pasti i biti bačena

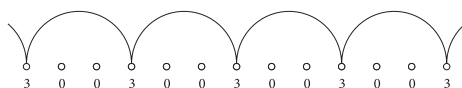
OBJAŠNJENJE: U jednoj dobi ne može pasti i poletjeti više od jedne loptice s obzirom da žongler to ne može fizički izvesti.

## Zadaci

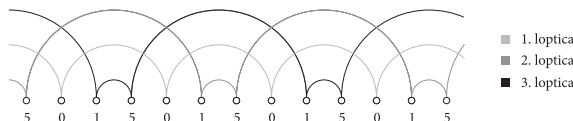
1. Nacrtajte dijagram žongliranja za „Jugglingsequence” 0, 0, 3.
2. Korištenjem dijagrama žongliranja objasnite zašto se „Jugglingsequence” 2, 1 ne može žonglirati.
3. Nacrtajte dijagram žongliranja za „Jugglingsequence” 5, 3, 1 i pomoću dijagrama objasnite može li se taj niz žonglirati.
4. Koliko se loptica nalazi u zraku u 5. dobi „Jugglingsequencea” 5, 0, 1?

## Rješenja zadataka

1. Dijagram žongliranja za „Jugglingsequence” 0, 0, 3 izgleda potpuno jednako kao i za „Jugglingsequence” 3, 0, 0 (slika 3.)



2. Na dijagramu prikazanom na slici 5. može se jasno uočiti da se na dobu ispod koje piše jedan stvori prva loptica i bude bačena, a onda na dobu ispod koje piše dva padne i nestane. To je nemoguće te se iz tog razloga „Jugglingsequence” 2, 1 ne može žonglirati.
3. Na slici je prikazan dijagram žongliranja za „Jugglingsequence” 5, 3, 1:



Dijagram se širi beskonačno na obje strane te na ni jednu dobu nije palo ili poletjelo više od jedne loptice. To znači da se „Jugglingsequence” 5, 3, 1 može žonglirati. Pokušajte.

4. U 5. dobi „Jugglingsequence” 5, 0, 1 u zraku se nalaze dvije loptice (pogledajte sliku 4.).

