Osječki matematički list 15 (2015), 85-91

Baricentričke koordinate 2
Metrička svojstva

Vladimir Volenec*

Sažetak

Autor u radu uvodi pojmove duljine dužine, mjere kuta i okomitosti kako bi bilo omogućeno proučavanje metričkih odnosa u ravnini. Najprije se uvodi pojam skalarnog produkta dvaju vektora. Dokazane su zanimljive jednakosti koje povezuju neke značajne elemente geometrije trokuta.

Ključne riječi: *trokut, baricentričke koordinate*

Barycentric coordinates 2
Metrical properties

Abstract

In this paper, the author introduces the concepts of the length of a segment, the measure of an angle and the concept of perpendicularity, which enable one to consider the metric properties in the plane. First, the concept of the scalar product of two vectors is introduced. Interesting equalities are proven that connect some significant elements of the geometry of the triangle.

Keywords: *triangle, barycentric coordinates*

*Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička cesta 30, HR-10 000 Zagreb, email: volenec@math.hr

U prvom dijelu članka [2] promatrali smo samo položajne odnose točaka i pravaca u ravnini trokuta ABC, gdje imamo tzv. afine pojmove: točka, pravac, spojnica točaka, sjecište pravaca, paralelnost, vektor, omjer orijentiranih površina trokuta. Da bismo mogli proučavati metričke odnose u ravnini, moramo uvesti npr. pojmove: duljina dužine, mjera kuta, okomitost, a počet ćemo s izračunavanjem skalarnog produkta dvaju vektora.

Neka dani trokut ABC (tzv. **temeljni trokut** baricentričkih koordinata) ima duljine stranica $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, a neka su mjere njegovih kuteva uz vrhove A, B, C označene također sa A, B, C, jer ćemo kotangense tih kuteva označiti sa α, β, γ, tj. neka je

$$\alpha = ctgA, \quad \beta = ctgB, \quad \gamma = ctgC. \tag{1}$$

Tada imamo npr.

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\,cosA = 2bc\,sinA\,ctgA = 4\triangle\alpha$$

i zato

$$b^2 + c^2 - a^2 = 4\triangle\alpha, \quad c^2 + a^2 - b^2 = 4\triangle\beta, \quad a^2 + b^2 - c^2 = 4\triangle\gamma, \tag{2}$$

gdje je $\triangle$ površina trokuta ABC.

Zbrajanjem po dvije od jednakosti (2) dobivamo dalje

$$a^2 = 2\triangle(\beta+\gamma), \quad b^2 = 2\triangle(\gamma+\alpha), \quad c^2 = 2\triangle(\alpha+\beta). \tag{3}$$

Sada možemo dokazati sljedeći važan teorem.

Teorem 1. *Skalarni produkt vektora* $\mathbf{v}_i = [x_i, y_i, z_i]$ $(i = 1, 2)$ *dan je formulom*

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 2\triangle(\alpha x_1 x_2 + \beta y_1 y_2 + \gamma z_1 z_2), \tag{4}$$

gdje je $\triangle$ *površina temeljnog trokuta* ABC*, a brojevi* α, β, γ *su dani formulama* (1).

Dokaz. Kvadriranjem jednakosti $\overrightarrow{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ dobivamo $c^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, tj. $2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - c^2$, a slično vrijede i jednakosti $2\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2 - a^2$, $2\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{C}^2 - b^2$. Zbog jednakosti $x_i + y_i + z_i = 0$

$(i=1,2)$ i jednakosti (3) dobivamo redom

$$\begin{aligned}
2\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 &= 2(x_1\mathbf{A}+y_1\mathbf{B}+z_1\mathbf{C})(x_2\mathbf{A}+y_2\mathbf{B}+z_2\mathbf{C})\\
&= 2x_1x_2\mathbf{A}^2+2y_1y_2\mathbf{B}^2+2z_1z_2\mathbf{C}^2+(x_1y_2+y_1x_2)(\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2-c^2)\\
&\quad+(x_1z_2+z_1x_2)(\mathbf{A}^2+\mathbf{C}^2-b^2)+(y_1z_2+z_1y_2)(\mathbf{B}^2+\mathbf{C}^2-a^2)\\
&\quad(x_1+y_1+z_1)(x_2\mathbf{A}^2+y_2\mathbf{B}^2+z_2\mathbf{C}^2)+(x_2+y_2+z_2)(x_1\mathbf{A}^2+y_1\mathbf{B}^2\\
&\quad+z_1\mathbf{C}^2)-a^2(y_1z_2+z_1y_2)-b^2(x_1z_2+z_1x_2)-c^2(x_1y_2+y_1x_2)\\
&= -2\triangle[(\beta+\gamma)(y_1z_2+z_1y_2)+(\gamma+\alpha)(z_1x_2+x_1z_2)\\
&\quad+(\alpha+\beta)(x_1y_2+y_1x_2)]\\
&= -2\triangle\{\alpha[x_1(y_2+z_2)+(y_1+z_1)x_2]+\beta[y_1(z_2+x_2)+(z_1+x_1)y_2]\\
&\quad+\gamma[z_1(x_2+y_2)+(x_1+y_1)z_2]\}\\
&= -2\triangle[\alpha(-2x_1x_2)+\beta(-2y_1y_2)+\gamma(-2z_1z_2)]\\
&= 4\triangle(\alpha x_1x_2+\beta y_1y_2+\gamma z_1z_2). \qquad \square
\end{aligned}$$

Korolar 1. *Duljina vektora* $\mathbf{v}=[x,y,z]$ *dana je formulom* $|\mathbf{v}|^2=2\triangle(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)$.

Korolar 2. *Kut između dvaju vektora* $\mathbf{v}_i=[x_i,y_i,z_i]$ $(i=1,2)$ *dan je formulom*

$$cos\sphericalangle(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=\frac{1}{\Omega_1\Omega_2}(\alpha x_1x_2+\beta y_1y_2+\gamma z_1z_2),$$

gdje je $\Omega_i^2=(\alpha {x_i}^2+\beta {y_i}^2+\gamma {z_i}^2)$ $(i=1,2)$.

Korolar 3. *Dvije točke* $P_i=(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2)$ *imaju udaljenost danu formulom*

$$|P_1P_2|^2=2\triangle[\alpha(x_1-x_2)^2+\beta(y_1-y_2)^2+\gamma(z_1-z_2)^2].$$

Posebno, uz $P_1=P=(x,y,z)$ i $P_2=A=(1,0,0)$ ili $P_2=B=(0,1,0)$ ili $P_2=C=(0,0,1)$ dobivamo dalje:

Korolar 4. *Za bilo koju točku* $P=(x,y,z)$ *vrijede jednakosti*

$$|AP|^2=2\triangle[\alpha(1-x)^2+\beta y^2+\gamma z^2],$$

$$|BP|^2=2\triangle[\alpha x^2+\beta(1-y)^2+\gamma z^2],$$

$$|CP|^2=2\triangle[\alpha x^2+\beta y^2+\gamma(1-z)^2].$$

Teorem 2. *Za točku* $P=(x,y,z)$ *i bilo koju točku* S *vrijedi jednakost*

$$|SP|^2=x\cdot|SA|^2+y\cdot|SB|^2+z\cdot|SC|^2-a^2yz-b^2zx-c^2xy.$$

Dokaz. Neka je S ishodište. Kvadrirajući jednakost $\mathbf{P} = x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C}$ i koristeći jednakosti iz dokaza teorema 1 dobivamo redom

$$\begin{aligned}|SP|^2 = \mathbf{P}^2 &= x^2\mathbf{A}^2 + y^2\mathbf{B}^2 + z^2\mathbf{C}^2 + yz(\mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2 - a^2) + zx(\mathbf{A}^2 + \mathbf{C}^2 - b^2) \\ &\quad + xy(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - c^2) \\ &= (x+y+z)(x\mathbf{A}^2 + y\mathbf{B}^2 + z\mathbf{C}^2) - a^2yz - b^2zx - c^2xy,\end{aligned}$$

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.–1716.) njemački matematičar i filozof

pa zbog $x + y + z = 1$ slijedi naša tvrdnja. □

Uzmemo li $P = G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, tada iz teorema 2 slijedi:

Korolar 5. *(Leibniz) Za težište G trokuta ABC i bilo koju točku S vrijedi jednakost*

$$3 \cdot |SG|^2 = |SA|^2 + |SB|^2 + |SC|^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Ako je O središte opisane kružnice trokuta ABC, tada je $|OA| = |OB| = |OC| = R$, gdje je R polumjer te kružnice, pa iz teorema 2 uz pomoć formula (3) slijedi:

Korolar 6. *Za bilo koju točku $P = (x, y, z)$ i opisanu kružnicu (O, R) temeljnog trokuta ABC vrijedi jednakost*

$$|OP|^2 = R^2 - a^2yz - b^2zx - c^2xy = R^2 - 2\triangle\Pi,$$

gdje je

$$\Pi = (\beta + \gamma)yz + (\gamma + \alpha)zx + (\alpha + \beta)xy = \frac{1}{2\triangle} \cdot (a^2yz + b^2zx + c^2xy). \quad (5)$$

Uz $S = P$ iz teorema 2 slijedi:

Korolar 7. *Za točku $P = (x, y, z)$ vrijedi jednakost*

$$x \cdot |AP|^2 + y \cdot |BP|^2 + z \cdot |CP|^2 = 2\triangle\Pi,$$

gdje je Π broj dan formulom (5).

Jednakosti iz korolara 4 mogu se pisati i u drukčijem obliku zbog formula

(5) i (3) i jednakosti $x+y+z=1$. Dobivamo redom npr.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\triangle}\cdot|AP|^2 &= \alpha(1-x)^2+\beta y^2+\gamma z^2\\
&= \alpha-2\alpha x+\alpha x(1-y-z)+\beta y(1-z-x)+\gamma z(1-x-y)\\
&= \alpha-\alpha x+\beta y+\gamma z-(\beta+\gamma)yz-(\gamma+\alpha)zx-(\alpha+\beta)xy\\
&= \alpha(y+z)+\beta y+\gamma z-\Pi=\frac{1}{x}\cdot[(\gamma+\alpha)zx+(\alpha+\beta)xy]-\Pi\\
&= \frac{1}{x}\cdot[\Pi-(\beta+\gamma)yz]-\Pi=\frac{1}{x}\cdot[\Pi(1-x)-(\beta+\gamma)yz]\\
&= \frac{1}{x}\cdot[\Pi(y+z)-\frac{a^2}{2\triangle}\cdot yz].
\end{aligned}$$

Dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 3. *Za bilo koju točku $P=(x,y,z)$ vrijede jednakosti*

$$x\cdot|AP|^2=2\triangle\Pi(y+z)-a^2yz,$$

$$y\cdot|BP|^2=2\triangle\Pi(z+x)-b^2zx,$$

$$z\cdot|CP|^2=2\triangle\Pi(x+y)-c^2xy,$$

gdje je Π broj dan formulom (5).

Za bilo koju točku $P=(x,y,z)$ na opisanoj kružnici (O,R) temeljnog trokuta ABC imamo $|OP|=R$ i po korolaru 6 slijedi tada $\Pi=0$. Zato jednakosti iz teorema 3 u ovom slučaju imaju oblik

$$|AP|^2=-a^2\cdot\frac{yz}{x},\quad |BP|^2=-b^2\cdot\frac{zx}{y},\quad |CP|^2=-c^2\cdot\frac{xy}{z}. \tag{6}$$

Dokazali smo:

Teorem 4. *Opisana kružnica temeljnog trokuta ABC ima jednadžbu $(\beta+\gamma)yz+(\gamma+\alpha)zx+(\alpha+\beta)xy=0$ ili $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$. Za bilo koju točku $P=(x,y,z)$ (osim točaka A,B,C) na toj kružnici vrijede jednakosti (6).*

Iz teorema 1 slijedi tvrdnja:

Korolar 8. *Dva vektora $\mathbf{v}_i=[x_i,y_i,z_i]$ $(i=1,2)$ su okomita ako i samo ako je*

$$\alpha x_1x_2+\beta y_1y_2+\gamma z_1z_2=0, \tag{7}$$

gdje su brojevi α, β, γ dani formulama (1). Jednakost (7) je uvjet okomitosti za dva pravca s beskonačno dalekim točkama (x_i,y_i,z_i) $(i=1,2)$.

Teorem 5. *Pravci okomiti na pravac s beskonačno dalekom točkom* $(x : y : z)$ *(gdje je* $x + y + z = 0$*) imaju beskonačno daleku točku*

$$((\beta y - \gamma z) : (\gamma z - \alpha x) : (\alpha x - \beta y)). \tag{8}$$

Dokaz. Točka (8) je očito beskonačno daleka, a okomitost slijedi po korolaru 8 jer je

$$\alpha x(\beta y - \gamma z) + \beta y(\gamma z - \alpha x) + \gamma z(\alpha x - \beta y) = 0.$$

□

Pravci BC, CA, AB imaju redom beskonačno daleke točke $(0 : 1 : -1)$, $(-1 : 0 : 1)$, $(1 : -1 : 0)$, pa iz teorema 5 slijedi:

Korolar 9. *Pravci okomiti na pravce* BC*,* CA*,* AB *imaju redom beskonačno daleke točke*

$$\begin{aligned} N_a &= (-(\beta + \gamma) : \gamma : \beta), \\ N_b &= (\gamma : -(\gamma + \alpha) : \alpha), \\ N_c &= (\beta : \alpha : -(\alpha + \beta)). \end{aligned} \tag{9}$$

Pravac $(0 : -\beta : \gamma)$ prolazi kroz točku $A = (1 : 0 : 0)$ i kroz točku N_a iz (9), pa je taj pravac visina iz vrha A trokuta ABC. Analogno, visine iz vrhova B i C su pravci $(\alpha : 0 : -\gamma)$ i $(-\alpha : \beta : 0)$. Sve tri visine očito prolaze kroz točku $H = (\beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta)$, ortocentar trokuta ABC.
Pravac $((\beta - \gamma) : -(\beta + \gamma) : (\beta + \gamma))$ prolazi kroz polovište $(0 : 1 : 1)$ stranice BC, kroz točku N_a i kroz točku

$$O = (\alpha(\beta + \gamma) : \beta(\gamma + \alpha) : \gamma(\alpha + \beta)). \tag{10}$$

Doista, imamo bez zajedničkog faktora $\beta + \gamma$ jednakosti $-(\beta - \gamma) - \gamma + \beta = 0$ i $\alpha(\beta - \gamma) - \beta(\gamma + \alpha) + \gamma(\alpha + \beta) = 0$. Zato je taj pravac simetrala stranice BC, a slično izgledaju preostale dvije simetrale stranica. Dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 6. *Temeljni trokut* ABC *ima visine* $AH = (0 : -\beta : \gamma)$*,* $BH = (\alpha : 0 : -\gamma)$*,* $CH = (-\alpha : \beta : 0)$*, ortocentar* $H = (\beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta)$ *i središte* O *opisane kružnice dano jednakošću* (10)*, a simetrale stranice* BC*,* CA*,* AB *su redom pravci*

$$\begin{gathered} ((\beta - \gamma) : -(\beta + \gamma) : (\beta + \gamma)), \\ ((\gamma + \alpha) : (\gamma - \alpha) : -(\gamma + \alpha)), \\ (-(\alpha + \beta) : (\alpha + \beta) : (\alpha - \beta)). \end{gathered}$$

Kako imamo redom jednakosti

$$-\alpha = -ctgA = ctg(\pi - A) = ctg(B + C) = \frac{ctgB \cdot ctgC - 1}{ctgB + ctgC} = \frac{\beta\gamma - 1}{\beta + \gamma},$$

to odmah slijedi temeljna jednakost

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 1, \tag{11}$$

koja povezuje brojeve α, β, γ. Zbog te jednakosti imamo preciznije formule $H = (\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta)$ i

$$\begin{aligned} O &= \left(\frac{1}{2}\alpha(\beta + \gamma), \frac{1}{2}\beta(\gamma + \alpha), \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}(1 - \beta\gamma), \frac{1}{2}(1 - \gamma\alpha), \frac{1}{2}(1 - \alpha\beta)\right). \end{aligned}$$

Prethodni sadržaj ovog članka i članka [2] je bitni dio (bez nekih usko specijalnih rezultata) iz članka [3], a prikazani rezultati su korišteni u člancima [4] i [5], gdje su na kraju u baricentričkim koordinatama tabelarno prikazani mnogi karakteristični elementi (točke, pravci, kružnice, krivulje 2. stupnja), izraženi pomoću temeljnih brojeva α, β, γ i $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$. Pritom je $\sigma = ctg\omega$, gdje je ω tzv. **Brocardov kut** temeljnog trokuta ABC.

Literatura

[1] C. Kimberling, *Central points and central lines in the plane of a triangle*, Math. Mag. **67**(1994), 163–187.

[2] V. Volenec, *Baricentričke koordinate 1 – Afina svojstva, Osječki Mat. List* **15**(2015), br. 1, 1–11.

[3] V. Volenec, *Metrical relations in barycentric coordinates*, Math. Communications **8**(2003), 55–68.

[4] V. Volenec, *Circles in barycentric coordinates*, Math. Communications **9**(2004), 79–89.

[5] V. Volenec, *$\alpha\beta\gamma\delta$-technology in the triangle geometry*, Math. Communications **10**(2005), 159–167.