Osječki matematički list 15 (2015), 93-111

Gama i beta funkcije

Mihaela Ribičić Penava[*], Dino Škrobar [†]

Sažetak

U ovom radu prezentirana su neka osnovna svojstva gama i beta funkcija te iskazan Bohr-Mollerupov teorem. Osim toga, razmatrane su primjene gama i beta funkcija pri računanju integrala koje nije moguće izračunati uobičajenim metodama.

Ključne riječi: *gama funkcija, beta funkcija, Bohr-Mollerupov teorem, integracija*

Gamma and Beta functions

Abstract

In this paper, some properties of gamma and beta functions are given and the Bohr-Mollerup theorem is presented. Applications of gamma and beta functions in calculating integrals that cannot be solved by conventional methods are also considered.

Keywords: *gamma function, beta function, Bohr–Mollerup theorem, integration*

[*]Odjel za matematiku Sveučilište u Osijeku, email: mihaela@mathos.hr
[†]Odjel za matematiku Sveučilište u Osijeku, email: dskrobar@mathos.hr

1 Gama funkcija

1.1 Definicija i uvodni rezultati o gama funkciji

Leonhard Euler (1707.–1783.) švicarski matematičar i fizičar

Daniel Bernoulli[1] i Christian Goldbach[2] u svojim radovima bavili su se problemima interpolacije redova te su se susreli s problemom proširenja faktorijela na skup realnih brojeva. Leonhard Euler je pokušao pomoći u rješavanju tog problema čime započinje sustavno istraživanje gama funkcije. Spomenimo kako se gama funkcijom bavio i Legendre[3] koji je početkom devetnaestog stoljeća uveo naziv "gama funkcija" i oznaku $\Gamma(x)$. Zanimljivo je kako gama funkcija matematičare zaokuplja godinama pa su tako neki od važnih rezultata dokazani tek sredinom ili krajem dvadesetog stoljeća kao npr. Bohr-Mollerupov teorem o kojem će biti riječi u nastavku. Gama funkcija svoju primjenu ima u teoriji brojeva, konkretno u proučavanju prostih brojeva čime se bavio Riemann (vidjeti [8]), ali i u teoriji vjerojatnosti, gdje je susrećemo u funkciji gustoće poznate gama distribucije (vidjeti [9], str. 222. i [10], str. 265.). Navedimo definiciju gama funkcije.

Definicija 1.1. Funkciju $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zadanu formulom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t \tag{1}$$

zovemo gama funkcija.

Kao što vidimo, gama funkcija definirana je za pozitivne realne brojeve. Razlog je činjenica da (1) konvergira samo za pozitivne x (dokaz ove tvrdnje može se naći u [3]). U ovom radu se nećemo baviti time, ali valja napomenuti kako se gama funkcija može definirati za sve kompleksne brojeve kojima je realni dio pozitivan (vidjeti npr. [2] ili [7]). Graf gama funkcije kojoj je domena skup pozitivnih realnih brojeva prikazan je na slici 1.

Osim (1) često se u primjenama koristi i ekvivalentan zapis gama funkcije:

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty t^{2x-1} e^{-t^2} \mathrm{d}t. \tag{2}$$

[1]Daniel Bernoulli (1700.–1782.), švicarski matematičar i fizičar
[2]Christian Goldbach (1690.–1764.), njemački matematičar
[3]Adrien-Marie Legendre (1752.– 1833.), francuski matematičar

Naime, ako u (1) uvrstimo $t = u^2$ imamo sljedeći niz jednakosti:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty u^{2x-2}e^{-u^2}2u\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u,$$

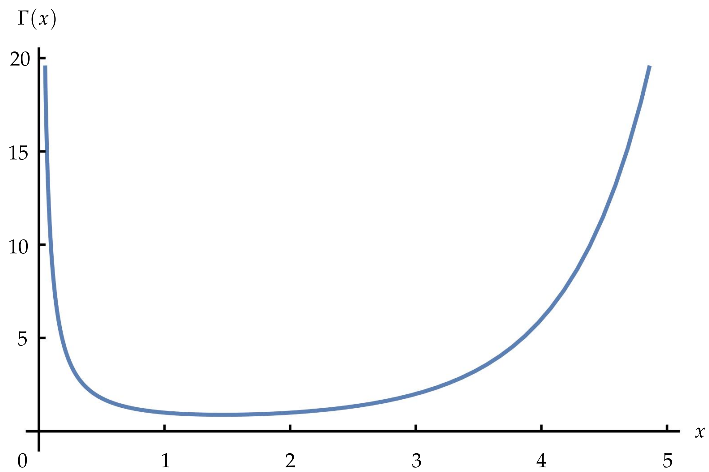
iz kojih je vidljivo da su zapisi (1) i (2) ekvivalentni.

Primjer 1.1. Izračunajmo vrijednost gama funkcije $\Gamma(1)$.

Rješenje. Kako se izračunavanje vrijednosti gama funkcije $\Gamma(1)$ svodi na rješavanje nepravog integrala, vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[-e^{-t}|_0^n\right] = \lim_{n\to\infty}(-e^{-n}+1) \\ &= 0+1 = 1.\end{aligned}$$

◀



Slika 1: Graf gama funkcije

Sljedeći teorem jedan je od najbitnijih rezultata o gama funkciji. Zahvaljujući njemu računanje vrijednosti gama funkcije postaje jednostavnije.

Teorem 1.1. *Za* $x \in \mathbb{R}_+$ *vrijedi*

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x). \tag{3}$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći parcijalnu integraciju.
Neka je $x \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int\limits_0^\infty t^{x+1-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = t^x & \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = xt^{x-1}\mathrm{d}t & v = -e^{-t} \end{matrix} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(-t^x e^{-t}\Big|_0^n - \int\limits_0^n -xt^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\Big) \\ &= -\lim_{n\to\infty} n^x e^{-n} + \lim_{n\to\infty} x\int\limits_0^n t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Uzastopnom primjenom L'Hospitalovog pravila dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} n^x e^{-n} = 0.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} x\int_0^n t^{x-1}e^{-t}dt = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$$

slijedi da je $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. □

Gama funkcija nije jedina funkcija koja zadovoljava funkcijsku jednadžbu (3), naprimjer funkcije $x \mapsto \sin(2k\pi x)\,\Gamma(x), k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ također zadovoljavaju jednadžbu (3). Trebalo je proći gotovo dva stoljeća od otkrića gama funkcije da Harald Bohr[4] i Johannes Mollerup[5] pronađu uvjet pod kojim će gama funkcija biti jedina funkcija koja zadovoljava (3).

Teorem 1.2. ***(Bohr-Mollerupov teorem)*** *Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funkcija za koju vrijedi:*

(i) $f(1) = 1$,

(ii) $f(x+1) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R}_+$,

(iii) $\log f$ *je konveksna funkcija na* $\mathbb{R}_+$[6].

Tada je $f(x) = \Gamma(x), \forall x \in \mathbb{R}_+$.

[4]Harald Bohr (1887.– 1951.), danski matematičar. Dvije zanimljivosti vežu se uz Bohra: brat je nobelovca Nielsa Bohra te je 1908. nastupio na Olimpijskim igrama za nogometnu reprezentaciju Danske.
[5]Johannes Mollerup (1872.– 1937.), danski matematičar
[6] Funkcija $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je konveksna na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako vrijedi $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$, za sve $x, y \in \langle a,b\rangle$ i $\lambda \in [0,1]$.

Dokaz Bohr-Mollerupov teorema nije složen, ali zahtjeva posve drugi pristup definiranju i proučavanju gama funkcije. Taj pristup detaljno je razrađen u [2] (str. 1– 60). Dokaz Bohr-Mollerupovog teorema također se nalazi u [2] (str. 35).

Zaključak prethodnog teorema je da je gama funkcija jedina funkcija koja zadovoljava uvjete (i), (ii) i (iii).

Korolar 1.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi sljedeća jednakost:*

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{4}$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zbog (3) imamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)\\ &= (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1)\\ &= (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot 1\\ &= (n-1)!.\end{aligned}$$

□

Korolar 1.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \langle 0,1\rangle$. Vrijedi sljedeća jednakost:*

$$\Gamma(n+x) = (n+x-1)(n+x-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x). \tag{5}$$

Dokaz. Jednakost se dobije uzastopnom primjenom (3) dokle god je argument gama funkcije pozitivan. □

Prethodni korolari izuzetno su bitni jer pokazuju da se gama funkcija uistinu može smatrati proširenjem faktorijela na pozitivne realne brojeve.

1.2 Proširenje gama funkcije na negativne realne brojeve

Nameće se pitanje, postoji li način da se gama funkcija definira u svim realnim brojevima, dakle ne samo pozitivnima. Prisjetimo se da je u definiciji 1.1 gama funkcija definirana za $x \in \mathbb{R}_+$ jer (1) konvergira samo za pozitivne x. Stoga je ideja iskoristiti identitet (3), ali zapisan na sljedeći način:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{6}$$

Iz (6) odmah slijedi da se gama funkcija neće moći definirati u 0. Razlog je i više nego očit, u nazivniku zdesna ne može biti 0.

Zbog istog razloga, gama funkciju nećemo moći definirati niti u negativnim cijelim brojevima. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da možemo definirati gama funkciju u točki $-n$. Tada bismo koristeći (6) imali sljedeće:

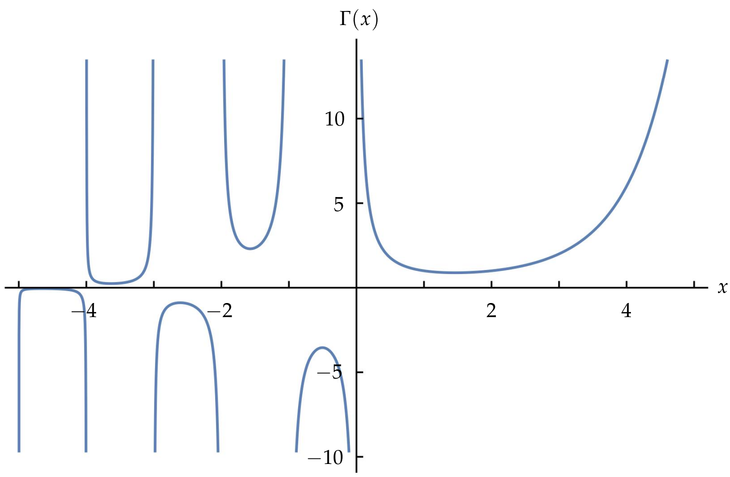
$$\begin{aligned}\Gamma(-n) &= \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} = \frac{\Gamma(-n+2)}{-n(-n+1)} \\ &= \cdots = \frac{\Gamma(-n+n+1)}{-n(-n+1)\cdots(-n+n)} = \frac{\Gamma(1)}{0}.\end{aligned}$$

Kako nula ne može biti u nazivniku, opet zaključujemo kako nećemo moći definirati gama funkciju u negativnim cijelim brojevima.

Sada kada smo pokazali da gama funkciju nećemo moći definirati u nuli i negativnim cijelim brojevima, sličnim razmišljanjem kao u dokazu korolara 1.2 dobili bismo da za $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi:

$$\Gamma(-n-x) = \frac{\Gamma(1-x)}{(-n-x)(-n-x+1)(-n-x+2)\cdots(-x)}. \tag{7}$$

Grafički prikaz gama funkcije nakon proširenja na negativne realne brojeve može se vidjeti na slici 2.



Slika 2: Graf gama funkcije proširene na negativne realne brojeve

Već smo spomenuli ranije da je gama funkcija općenito definirana za sve kompleksne brojeve kojima je realni dio pozitivan. Na prethodno opisan način gama funkcija može se proširiti da bude definirana u kompleksnim brojevima kojima je realni dio negativan i nije cijeli broj.

Za daljnja razmatranja bit će nam još bitna sljedeća dva rezultata:

Teorem 1.3. ***Eulerova produktna formula***
Neka je $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\})$. Tada vrijedi sljedeća formula:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{8}$$

Dokaz ovog teorema izrazito je složen i postoje razni pristupi njegovom dokazivanju. Najjednostavniji pristup je (vidjeti [4] ili [5]) da se prvo dokaže Euler-Wallisova formula

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

i onda se koristeći tu formulu dokaže (8).

Korolar 1.3. *Gama funkcija nema nultočaka.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji x takav da je $\Gamma(x) = 0$. Prema Eulerovoj produktnoj formuli imamo

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Kako je $\Gamma(x) = 0$ slijedi

$$0 = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

što je nemoguće jer desna strana nikada neće biti 0. □

Više detalja o svojstvima gama funkcije može se vidjeti u [3] i [11].

Primjer 1.2. Odredimo vrijednost gama funkcije u točki $1/2$.

Rješenje. Ako u Eulerovu produktnu formulu uvrstimo $x = 1/2$ dobit ćemo:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi,$$

iz čega slijedi

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{9}$$

◀

Primjer 1.3. Odredimo vrijednost gama funkcije u točkama $5/2$ i $-5/2$.

Rješenje. Prema definiciji je

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \int\limits_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Ovaj integral ne može se riješiti nekom od uobičajenih metoda integracije. Zato iskoristimo (5) i pojednostavnimo dobiveni izraz na sljedeći način:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Dakle, problem smo sveli na izračunavanje vrijednosti $\Gamma\left(1/2\right)$.
Izračunajmo vrijednost $\Gamma\left(-5/2\right)$.
Za izračunavanje $\Gamma(-5/2)$ iskoristimo (7):

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} \\
&= -\frac{8}{15}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

◀

1.3 Specijalne vrijednosti gama funkcije

U ranijim smo primjerima već pokazali da je

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 1, \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ i $k \in \mathbb{N}$. Uočimo da zbog (5) vrijedi:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + \frac{1}{k}\right) &= \left(n + \frac{1}{k} - 1\right)\left(n + \frac{1}{k} - 2\right) \cdots \left(n + \frac{1}{k} - n\right) \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(nk + 1 - k)}{k} \cdot \frac{(nk + 1 - 2k)}{k} \cdots \frac{1 + k}{k} \cdot \frac{1}{k} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(nk + 1 - k) \cdot (nk + 1 - 2k) \cdots (1 + k) \cdot 1}{k^n} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Specijalno, za $k = 2, 3, 4$ imamo sljedeće izraze:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \tag{10}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) = \frac{1\cdot 4\cdots(3n-5)(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) = \frac{1\cdot 5\cdots(4n-7)(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Analognim se razmišljanjem može pokazati da za $n \in \mathbb{N}_0$ i $k \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća jednakost (cijeli izvod može se vidjeti u [1]):

$$\Gamma\left(-n-\frac{1}{k}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot k^{n+1}}{1\cdot(1+k)\cdots(nk+1-k)(nk+1)}\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Stoga za $k = 2$ imamo:

$$\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{n+1}}{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)}\sqrt{\pi}.$$

Dosada nisu pronađene točne vrijednosti gama funkcije u točkama $1/n, n \in \mathbb{N}, n > 2$. Ono što se zna je da su $\Gamma(1/3)$ i $\Gamma(1/4)$ transcendentni brojevi. Te tvrdnje dokazali su Le Lionnais 1983. i Chudovsky 1984. Ipak, postoje rezultati (vidjeti npr. [2] ili [5]) koji omogućavaju približno izračunavanje vrijednosti gama funkcije u tim točkama. Navodimo neke od približno izračunatih vrijednosti

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2.6789385347077476337,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.6256099082219083119,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \approx 4.5908437119988030532,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \approx 5.5663160017802352043.$$

2 Beta funkcija

Definicija 2.1. Funkciju $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zadanu formulom

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \tag{11}$$

zovemo beta funkcija.

Naziv beta funkcija uveo je 1839. Jacques Binet. Beta funkcija često se naziva i Eulerov integral prve vrste dok se gama funkcija naziva Eulerovim integralom druge vrste (vidjeti [2]). U nastavku navodimo osnovna svojstva beta funkcije.

Propozicija 2.1. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi*

$$B(x,y) = B(y,x). \tag{12}$$

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Prema (11) je

$$B(y,x) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Sada supstitucijom $u = 1 - t$ imamo

$$B(y,x) = -\int_1^0 (1-u)^{y-1}u^{x-1}\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\mathrm{d}u = B(x,y). \qquad \square$$

Dakle, beta funkcija je simetrična.

Propozicija 2.2. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi*

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Uvedimo supstituciju $t = \sin^2\varphi$. Tada je $(1 - t) = \cos^2\varphi$, a $\mathrm{d}t = 2\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$. Primijenimo to pa imamo:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(x-1)}\varphi\cos^{2(y-1)}\varphi \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\varphi\cos^{2y-1}\varphi\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \qquad \square$$

U sljedećoj tvrdnji je dana veza između beta i gama funkcije.

Teorem 2.1. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi:*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{14}$$

Dokaz. Pomoću (2) dobivamo sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u \cdot 2\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}\mathrm{d}v \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Nakon toga, uvedemo polarne koordinate $u = r\cos\varphi$ i $v = r\sin\varphi$ (o uvođenju polarnih koordinata vidjeti [6], str. 70) pa vrijedi

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r^{2(x+y)-1}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,$$

što možemo rastaviti na dva integrala

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}\mathrm{d}r \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

Očito je prema (2)

$$2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}\mathrm{d}r = \Gamma(x+y).$$

Također, vidimo da je prema (13)

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi\mathrm{d}\varphi = B(y,x) = B(x,y).$$

Prema tome dobili smo

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y)$$

pa vrijedi

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Kako prema korolaru 1.3 gama funkcija nema nultočaka ovaj izraz je dobro definiran. $\square$

Uočimo da zbog prethodnog teorema možemo beta funkciju proširiti tako da bude definirana u negativnim realnim brojevima. Kako smo ranije pokazali da gama funkciju nije moguće proširiti tako da bude definirana u negativnim cijelim brojevima i nuli, možemo zaključiti da beta funkciju ne možemo definirati u točkama:

- $(x,y) : x,y \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$,
- $(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\}), x+y=0$,
- $(x,y) : x,y \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{0\}), x+y \in \mathbb{Z}_-$.

Korolar 2.1. *Neka su $x,y \in \mathbb{R}_+$. Tada vrijedi*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y). \tag{15}$$

Dokaz. Prema (14) za $x+1$ i y imamo

$$B(x+1,y) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)},$$

što je prema (3) jednako

$$B(x+1,y) = \frac{x\Gamma(x)\Gamma(y)}{(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{x}{x+y}B(x,y). \qquad \square$$

3 Primjene gama i beta funkcija na integriranje

Gama i beta funkcije imaju brojne primjene u vjerojatnosti i teoriji brojeva. Mogu se, također, koristiti i za izračunavanje određenih integrala koji se ne mogu riješiti nekom od uobičajenih metoda. U ovom poglavlju bavimo se primjerima takvih integrala.

Primjer 3.1. Neka je (W_n) niz realnih brojeva i neka je opći član zadan na sljedeći način

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odredimo točnu vrijednost članova niza (W_n). [7]

Rješenje. Ako u (13) uzmemo $x = \dfrac{n+1}{2}$ i $y = \dfrac{1}{2}$ dobit ćemo sljedeći izraz:

$$B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \mathrm{d}t$$

$$B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2W_n. \tag{16}$$

Sada primjenom jednakosti (14) imamo:

$$B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Moramo razlikovati dva slučaja u ovisnosti je li n paran ili neparan broj. Ako je $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0$, onda vrijedi

$$B\left(\frac{2k+1+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = B\left(k+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)}.$$

[7]Integrali W_n nazivaju se Wallisovi integrali prema matematičaru Johnu Wallisu koji je prvi uspio točno odrediti vrijednosti tih integrala. Te vrijednosti izračunao je i Euler znatno jednostavnijom metodom koristeći gama i beta funkcije.

Koristeći (3), (5) i (10) dobivamo

$$\begin{aligned} B\left(k+1,\frac{1}{2}\right) &= \frac{k!\sqrt{\pi}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{k!\sqrt{\pi}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{2^{k+1}k!}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}. \end{aligned}$$

Sada je zbog (16)

$$\begin{aligned} W_{2k+1} &= \frac{1}{2}B\left(k+1,\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2^{k+1}k!}{1\cdot 3\cdots(2k+1)} \\ &= \frac{2^k k!}{1\cdot 3\cdots(2k+1)}. \end{aligned}$$

Ako je $n=2k, k\in\mathbb{N}$, onda vrijedi

$$B\left(\frac{2k+1}{2},\frac{1}{2}\right)=B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+1\right)}.$$

Opet primjenom (3) i (5) te prema (10) dobivamo

$$\begin{aligned} B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \frac{\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{k!} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)\pi}{2^k k!}. \end{aligned}$$

Po (16) slijedi

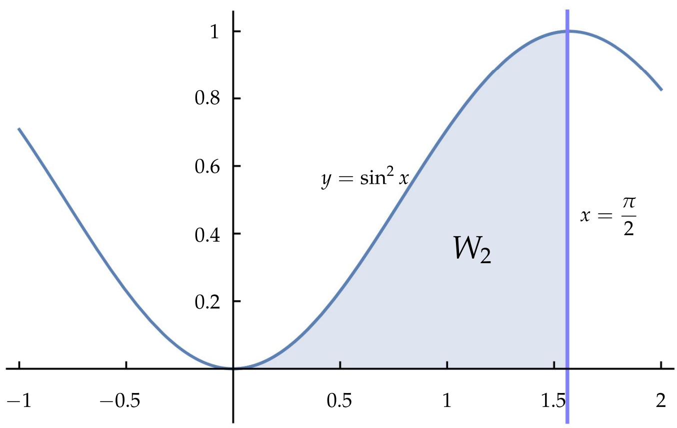
$$W_{2k}=\frac{1}{2}B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^{k+1}k!}\pi.$$

Sada konačno možemo vrlo jednostavno odrediti vrijednosti Wallisovih integrala. U tablici 1 su dane vrijednosti Wallisovih integrala za $n=0,1,2,4,$ $5,6.$

n	0	1	2	3	4	5	6
W_n	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5\pi}{32}$

Tablica 1: Vrijednosti Wallisovih integrala za $n = 0, 1, 2, 4, 5, 6$

Uočimo da za $n = 0$ vrijednost Wallisovog integrala predstavlja površinu polukruga radijusa 1, dok za $n = 2$ predstavlja četvrtinu površine kruga radijusa 1. Wallisov integral za $n = 2$ prikazan je na slici 3.



Slika 3: Wallisov integral za $n = 2$ predstavlja površinu omeđenu krivuljom $y = \sin^2 x$, pravcima $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$ i osi apscisa.

◀

Primjer 3.2. Izračunajmo vrijednost integrala

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\sqrt[4]{x}} \mathrm{d}x.$$

Rješenje. Ovaj se integral vrlo elegantno može riješiti pomoću gama funkcije.
Uvedimo supstituciju $x = t^4$. Uočimo da se granice integracije ne mijenjaju.

Početni integral tada postaje:

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t} 4t^3 \mathrm{d}t = 4\int_0^\infty t^5 e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Dobiveni integral jednak je specijalnom slučaju integrala (1) iz definicije gama funkcije za $x = 6$. Prema tome je

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\sqrt[4]{x}} \mathrm{d}x = 4\Gamma(6) = 4 \cdot 5! = 480. \qquad \blacktriangleleft$$

Primjer 3.3. Izračunajmo vrijednost integrala

$$\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{27 - x^3}} \mathrm{d}x.$$

Rješenje. Napravimo sljedeću transformaciju zadanog integrala:

$$\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{27\left(1 - \frac{x^3}{27}\right)}} \mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^3}} \mathrm{d}x.$$

Uvođenjem supstitucije $u = \frac{x}{3}$ dobijamo $x = 3u$ i $\mathrm{d}x = 3\mathrm{d}u$. Uočimo da granice integracije postaju 0 i 1. Integral sada nakon sređivanja ima oblik:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{u}{1 - u^3}} \mathrm{d}u.$$

Uvedemo novu supstituciju $v = u^3$ te dobijamo $u = \sqrt[3]{v}$ i $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}v}{3\sqrt[3]{v^2}}$. Granice integracije se ne mijenjaju pa je novodobiveni integral oblika:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{v}}{\sqrt{1 - v}\sqrt[3]{v^2}} \mathrm{d}v &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v}\sqrt{1 - v}} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 v^{-\frac{1}{2}} (1 - v)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}v. \qquad (17) \end{aligned}$$

Usporedimo li (17) i (11) vidimo da je integral dobiven u (17) vrijednost beta funkcije u $x = y = 1/2$. Prema tome je (17) jednako

$$\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

što je pak prema teoremu 2.1 jednako

$$\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

◀

Primjer 3.4. Odredimo vrijednost integrala

$$\int\limits_0^1 x^2(1-x)^3 \ln x \mathrm{d}x.$$

Rješenje. Integral

$$\int\limits_0^1 x^2(1-x)^3 \ln x \mathrm{d}x$$

može se riješiti parcijalnom integracijom ali je sam postupak dosta dugačak. No uzmemo li recimo supstituciju $x = e^{-y}$ dobijemo $\mathrm{d}x = -e^{-y}\mathrm{d}y$. Također, uočimo da se mijenjaju granice integracije u ∞ i 0. Stoga imamo sljedeći integral:

$$\int\limits_\infty^0 e^{-2y}(1-e^{-y})^3 y e^{-y}\mathrm{d}y,$$

što nakon kubiranja zagrade i sređivanja postaje

$$\int\limits_\infty^0 (e^{-3y} - 3e^{-4y} + 3e^{-5y} - e^{-6y})y\mathrm{d}y.$$

Zamijenimo granice integracije te napišemo prethodni integral kao sumu više njih pa dobijemo sljedeće:

$$-\Big(\int\limits_0^\infty e^{-3y}y\mathrm{d}y - 3\int\limits_0^\infty e^{-4y}y\mathrm{d}y + 3\int\limits_0^\infty e^{-5y}y\mathrm{d}y - \int\limits_0^\infty e^{-6y}y\mathrm{d}y\Big).$$

Uvedemo u prvom integralu supstituciju $u = 3y$ iz čega slijedi $\mathrm{d}y = (1/3)\mathrm{d}u$. Na analogan način uvedemo supstituciju u preostala tri integrala, dakle na način da supstituiramo izraz u eksponentu eksponencijalne funkcije. Dobit ćemo sljedeće:

$$-\Big(\frac{1}{9}\int\limits_0^\infty e^{-u}u\mathrm{d}u - 3\cdot\frac{1}{16}\int\limits_0^\infty e^{-u}u\mathrm{d}u + 3\cdot\frac{1}{25}\int\limits_0^\infty e^{-u}u\mathrm{d}u - \frac{1}{36}\int\limits_0^\infty e^{-u}u\mathrm{d}u\Big)$$
$$= -\Big(\frac{19}{1200}\int\limits_0^\infty e^{-u}u\mathrm{d}u\Big).$$

Dobiveni integral je prema (1) vrijednost gama funkcije u točki 2. Kako je $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$, rješenje je $-19/1200$. ◀

Literatura

[1] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Function*, Dover Publications, New York, 1964.

[2] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] E. Artin, *The Gamma Function*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[4] R.El Attar, *Special Functions and Orthogonal Plynomials*, Lulu Press, USA, 2006.

[5] W.W. Bell, *Special functions for Scientists and Engineers*, D. Van Nostrand Company Ltd, Reinhold, New York, 1969.

[6] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek , 2000.

[7] H. Kraljević, *Odabrana poglavlja teorije analitičkih funkcija*, PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2010., (javno dostupno: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/an_funk_2010_11.pdf`)

[8] B. Riemann, *Über die Anzal der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859.

[9] S. Ross, *A First Course in Probability*, Prentice Hall, New Jersey, 1998.

[10] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2000.

[11] P. Sebah, X. Gourdon, *Introduction to the Gamma Function*, 2002., (javno dostupno:
`http://www.csie.ntu.edu.tw/~b89089/link/gammaFunction.pdf`)