Osječki matematički list 15 (2015), 145-153

Metoda promjene fokusa

Ružica Kolar-Šuper[*], Marčela Maričić[†]

Sažetak

U ovom radu je prezentirana metoda rješavanja problemskih zadataka promjenom fokusa. Glavna karakteristika ove metode je usmjeravanje pozornosti rješavača na elemente koji nisu direktno istaknuti u postavci zadatka, a čije promatranje će omogućiti uspješno, često i vrlo elegantno i brzo, rješavanje zadatka. Primjena i korisnost ove metode je ilustrirana na zadacima i tvrdnjama različitog karaktera.

Ključne riječi: *promjena fokusa, problemski zadatak, geometrija*

A different point of view

Abstract

In this paper we present the problem solving method by changing the point of view. The main characteristic of this method is to focus attention on the elements which are not directly emphasized in the posted problem, but considering of which will lead to an efficient and elegant solution. The application and efficiency of the method introduced in this paper is illustrated by various examples and statements.

Keywords: *a different point of view, problem, geometry*

[*]Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti, Sveučilište u Osijeku, email: rkolar@foozos.hr

[†]Diplomirana studentica Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti, Sveučilište u Osijeku, email: marcela.maricic@gmail.com

1 Uvod

Koja je razlika između savjeta i metode. Metoda je savjet koji možeš iskoristiti dva puta.

George Polya

Umijeće rješavanja zadataka je jedan od važnih ciljeva nastave matematike. Uvođenje zadataka koje je moguće riješiti na više načina je važan doprinos razvoju matematičkog mišljenja učenika, što je najvažnija zadaća nastave matematike. Upoznavanje različitih strategija rješavanja zadataka povećava uspješnost rješavanja zadataka i sudionika na matematičkim natjecanjima. Stoga je upoznavanje učenika s metodama i strategijama rješavanja zadataka važan dio pripreme učenika za matematička natjecanja. Povećavanju uspješnosti učenika na matematičkim natjecanjima svakako doprinosi priprema natjecatelja ne samo selekcijom i pomnim proučavanjem tema već i selekcija i proučavanje ideja i metoda rješavanja zadataka.

Kao što je naglasio George Polya (1887.–1985.), mađarski matematičar, kojega mnogi zovu ocem rješavanja problemskih zadataka u matematičkom obrazovanju:
"Čak i ako smo uspjeli pronaći zadovoljavajuće rješenje, mi još uvijek možemo biti zainteresirani za pronalaženje drugoga rješenja. Želimo se uvjeriti u točnost rješenja na dva različita načina kao što želimo doživjeti materijalne objekte na različite načine."

2 Promjena fokusa

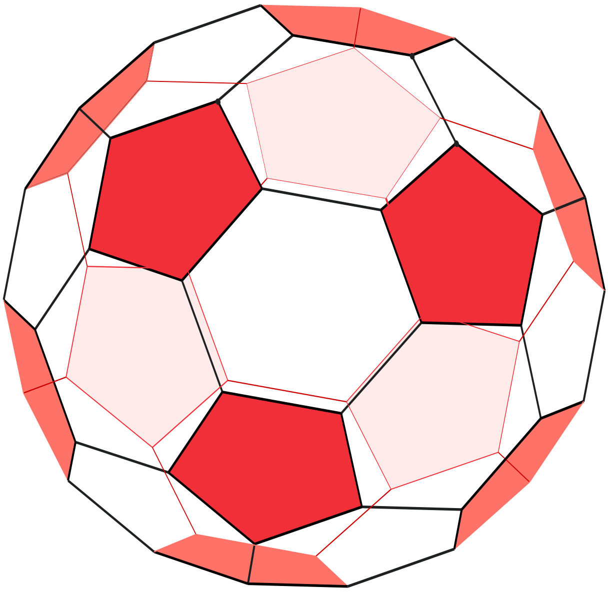
Važna i korisna metoda rješavanja problemskih zadataka je metoda promjene fokusa. Osnovna karakteristika ove metode je uočavanje elemenata i ideja koje nisu odmah vidljive iz postavke zadatka, a koje će omogućiti uspješno rješavanje postavljenog problema.

Jedan kriterij prema kojem se može usporediti rješavanje ovom metodom, u odnosu na druge pristupe, je jednostavnost.
Rješavanje zadataka ovom metodom je jednostavnije jer:

– može biti znatno kraće,
– za korištenje metode može biti potrebno poznavanje manje složenih i zahtjevnih pojmova i operacija,
– može smanjiti opseg računanja koje treba izvršiti,
– može smanjiti broj slučajeva koje treba razmatrati.

Najbolji put upoznavanja, razumijevanja i primjene metode je proučavanje konkretnih primjera. Stoga da bismo spoznali općenitu moć metode promjene fokusa proučimo rješavanje konkretnih primjera primjenom ove metode.

Zadatak 2.1. Odredite broj prostornih dijagonala krnjega ikozaedra.



Slika 1: Krnji ikozaedar

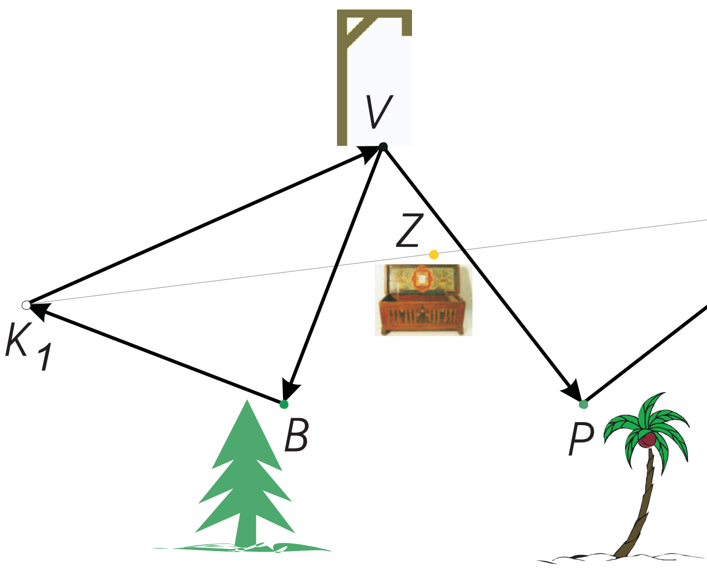
Rješenje. Prvi pristup rješavanju problema je direktno prebrojavanje dijagonala koje zadovoljavaju uvjete zadatka.

Rješavanje promjenom fokusa je pobrojavanje broja svih dijagonala i oduzimanje onih koje leže na stranama ikozaedra.
Strane krnjeg ikozaedra čini 12 peterokuta i 20 šesterokuta. Ukupan broj bridova krnjeg ikozaedra dobit ćemo ako ukupan broju stranica tih dvanaest peterokuta i dvadeset šesterokuta podijelimo s 2. Dakle, broj bridova jednak je $(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) : 2 = 90$.
Ukupan broj vrhova možemo izračunati iz Eulerove formule za poliedre $v - b + s = 2$ gdje je v broj vrhova poliedra, b broj bridova, a s broj strana. Uvrštavajući u formulu $s = 32$, $b = 90$ dobivamo $v = 60$.

Ukupan broj spojnica vrhova krnjega ikozaedra jednak je $(60 \cdot 59) : 2 = 1770$.

Broj dužina koje spajaju vrhove peterokuta jednak je $(5 \cdot 4) : 2 = 10$. Broj dužina koje spajaju vrhove šesterokuta jednak je $(6 \cdot 5) : 2 = 15$. Kako imamo dvanaest strana koje su peterokuti i dvadeset strana koje su šesterokuti imamo $12 \cdot 10 + 20 \cdot 15 = 420$ dužina koje spajaju vrhove na stranama krnjeg ikozaedra. Od tih dužina njih 90 predstavlja bridove krnjeg ikozaedra, pa su dakle računati dva puta. Dakle ukupan broj dužina koje spajaju vrhove krnjeg ikozaedra i leže na njegovim stranama jednak je $420 - 90 = 330$.
Stoga, ukupan broj unutrašnjih dijagonala krnjega ikozaedra iznosi $1770 - 330 = 1440$. ◀

Promotrimo sada sljedeći zadatak koji je postavio G. Gamow, tvorac teorije "velikog praska" o postanku svemira ([2]).



Slika 2:

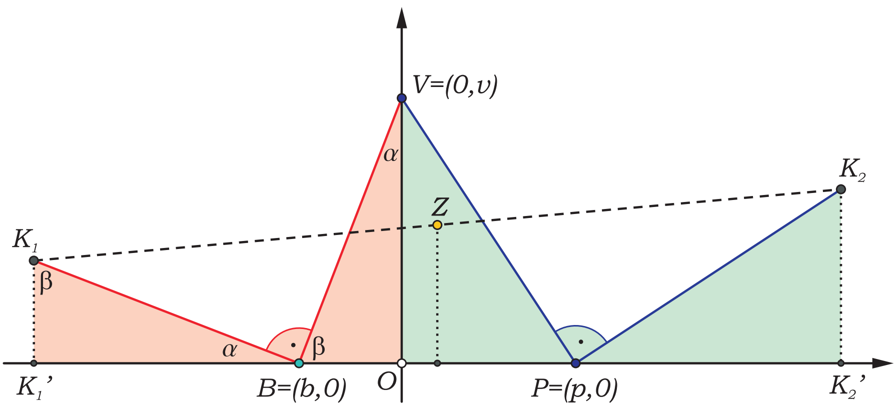
Zadatak 2.2. U jednoj staroj mornarskoj škrinji našli smo već jedva čitljivu, rukom izrađenu kartu, na kojoj je označeno mjesto gdje je zakopano blago poznatog gusarskog kapetana Kidda, uz detaljan opis kako se to mjesto može naći.

U "gusarskoj" uvali otoka Tortuga nalaze se vješala V, bor B i palma P. Kreni od vješala prema boru i broji korake, pa se kod bora okreni pod pravim kutom na desno i odbroji isto toliko koraka, te pobodi u zemlju kolčić K_1. Vrati se k vješalima, kreni od njih prema palmi brojeći korake, pa se kod palme okreni pod pravim kutom na lijevo i odbroji isto toliko koraka i pobodi u zemlju kolčić K_2. Blago ćeš naći na mjestu Z, koje je točno na pola puta između kolčića K_1 i K_2!

Otplovili smo na Tortugu, otišli do gusarske uvale, našli smo bor i palmu, ali na svoju veliku žalost, nismo našli ni traga od vješala. Što da radimo?

Rješenje. Zadatak je moguće riješiti na više načina. Mi ćemo ovdje ponuditi rješenje korištenjem pogodno odabranog koordinatnog sustava.

Na slici 3 pravokutni koordinatni sustav je izabran tako da je BP os apscisa i da se točka V (nekadašnja vješala) nalazi na osi ordinata. Neka je $B = (b, 0)$, $P = (p, 0)$ uz $b < p$ i $V = (0, v)$.

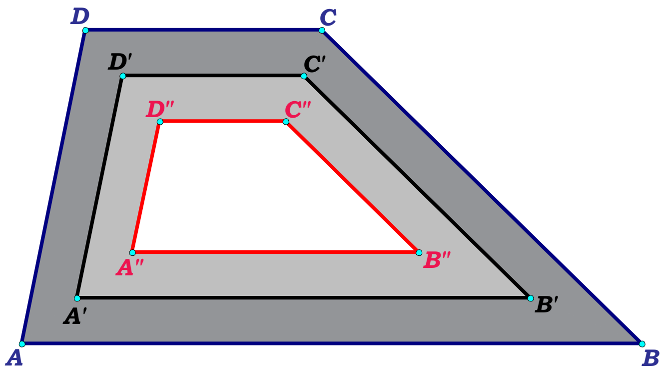


Slika 3:

Zbog $\triangle BOV \cong \triangle K_1K_1'B$ imamo $K_1(b - v, -b)$, analogno zbog $\triangle VOP \cong \triangle PK_2'K_2$ imamo $K_2(p + v, p)$, pa slijedi da polovište Z dužine $\overline{K_1K_2}$ ima koordinate $Z = (\frac{p+b}{2}, \frac{p-b}{2})$.

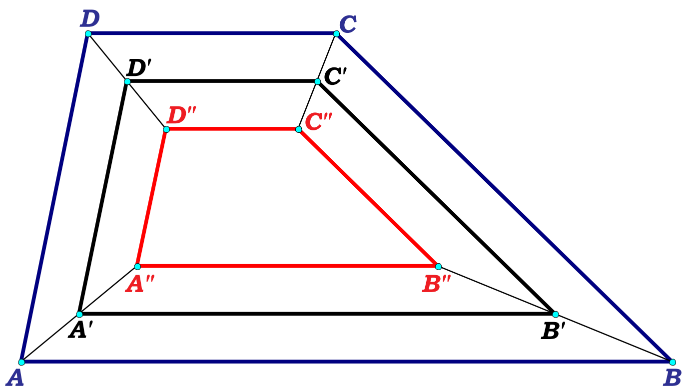
Iz apscise ove točke zaključujemo da je Z na simetrali dužine $\overline{BP}$, a njezina ordinata jednaka je polovici duljine $p - b$ dužine $\overline{BP}$, što znači da je Z baš u središtu kvadrata konstruiranog s lijeve (gornje) strane nad dužinom $\overline{BP}$. Dakle, položaj mjesta na kojem je blago uopće ne ovisi o položaju vješala V. ◀

Zadatak 2.3. Nađite površinu osjenčanoga područja između trapeza $ABCD$ i $A''B''C''D''$ ako su odgovarajuće stranice triju trapeza sa slike 4 paralelne i udaljene međusobno za 1 cm, tj. $d(\overline{AB}, \overline{A'B'}) = d(\overline{A'B'}, \overline{A''B''}) = 1$ cm i analogno za udaljenosti ostalih odgovarajućih stranica. Trapez $A'B'C'D'$ leži između dva trapeza i duljine njegovih osnovica iznose 10 cm i 4 cm, a duljine krakova su 5 cm i 7 cm.



Slika 4:

Rješenje. Jedan način traženja površine osjenčanoga dijela je da se od površine velikoga trapeza oduzme površina maloga trapeza, što je dosta složeno.



Slika 5:

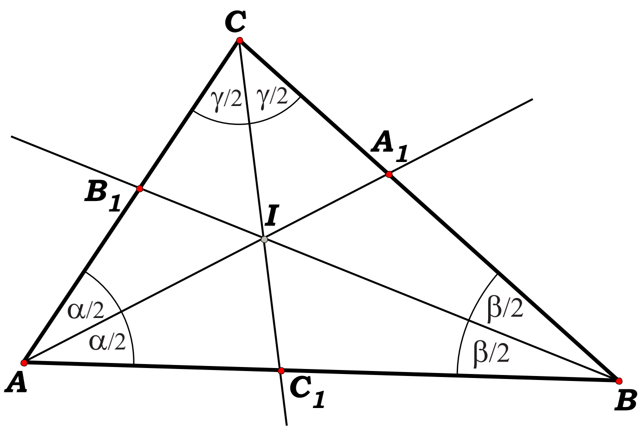
Pristupimo rješavanju problema promjenom fokusa i promatrajmo traženo područje kao uniju četiri trapeza (slika 5). Dakle tražena površina jednaka je zbroju površina trapeza $ABB''A''$, $BCC''B''$, $CDD''C''$, $DAA''D''$ čije duljine visina iznose 2 cm, a duljine srednjica su redom 10 cm, 7 cm, 4 cm i 5 cm. Dakle tražena površina iznosi

$$P = 10 \cdot 2\,\text{cm}^2 + 7 \cdot 2\,\text{cm}^2 + 4 \cdot 2\,\text{cm}^2 + 5 \cdot 2\,\text{cm}^2 = 52\,\text{cm}^2. \qquad \blacktriangleleft$$

Mnoge tvrdnje iz područje geometrije često je moguće dokazati koristeći drugačiji pristup. Navest ćemo dokaze dobro poznatih tvrdnji koristeći promjenu fokusa.

Teorem 2.1. *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Tvrdnju je moguće dokazati korištenjem teorema o simetrali kuta i njegovog obrata.
Ovdje ćemo navesti dokaz kod kojeg ćemo pažnju usmjeriti na omjer u kojem simetrala unutarnjeg kuta dijeli nasuprotnu stranicu.



Slika 6: Sjecište simetrala unutarnjih kutova trokuta.

Kako simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru duljina preostalih stranica to za simetrale AA_1, BB_1, CC_1 unutarnjih kutova trokuta ABC (slika 6) vrijedi jednakost

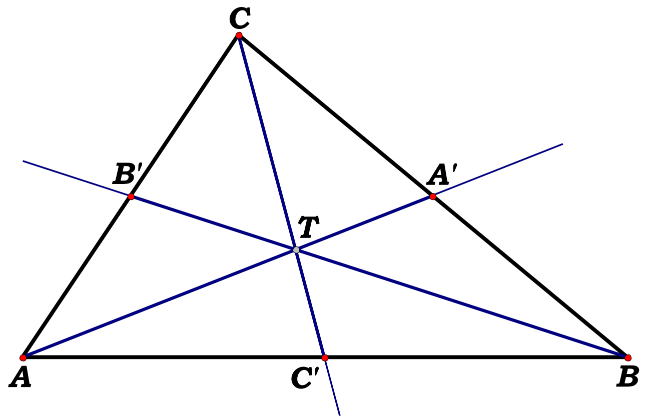
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} = 1,$$

odakle prema Cevinom teoremu slijedi da se simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku u jednoj točki. □

Teorem 2.2. *Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Tvrdnju je moguće dokazati korištenjem teorema o srednjici trokuta i teorema o sličnosti trokuta.

Navedimo dokaz u kojem ćemo pozornost obratiti na omjere u kojem težišnice dijele odgovarajuće nasuprotne stranice. Dakle, dokaz ćemo provesti primjenom Cevinog teorema.



Slika 7: Težište trokuta.

Ako su A', B', C' redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ tada vrijedi

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1,$$

odakle prema Cevinom teoremu slijedi da se sve tri težišnice trokuta sijeku u jednoj točki. □

Na kraju navedimo primjere za čije rješavanje je također korištena metoda promjene fokusa.

Zadatak 2.4. Nađite znamenku jedinica vrijednosti sljedećeg izraza kada je $x \in \mathbb{Z}$

$$(x-12)(x-11)(x-10)\cdots(x-4)(x-3).$$

Rješenje. Umjesto pronalaska umnoška ovih deset izraza možemo uočiti da ćemo uvrštavanjem bilo kojega cijeloga broja u gornji izraz dobiti kao jedan od faktora 0 ili višekratnik broja 10. Dakle, broj će završavati s 0, tj. znamenka jedinica je 0. ◀

Zadatak 2.5. Jedno selo ima 5800 stanovnika i prosječno se taj broj godišnje smanji za 90, dok drugo selo ima 4000 stanovnika i njihov se broj godišnje poveća za prosječno 60. Nakon koliko će godina broj stanovnika u oba sela biti jednak?

Rješenje. Zadatak je moguće riješiti na više načina.
1. način
Rješavanjem jednadžbe

$$5800 - 90x = 4000 + 60x,$$

gdje x predstavlja broj godina za koje će se broj stanovnika oba sela izjednačiti.
Rješenje je 12 godina.

2. način
Nacrtati grafove funkcija $y = 5800 - 90x$, $y = 4000 + 60x$ i naći točku presjeka dobivenih pravaca. To je točka čije je apscisa jednaka 12.

3. način
Iako su oba ova načina traženja rješenja zadovoljavajuća možemo pronaći rješenje zadatka fokusirajući se na ukupnu promjenu u broju stanovnika oba sela godišnje. Naime ako se broj stanovnika prvog sela smanji za 90 ljudi, a broj drugoga sela poveća za 60 ukupna promjena je 150 ljudi godišnje. Kako je razlika u broju stanovnika sela 1800 ljudi to će biti potrebno $1800 : 150 = 12$ godina da se izjednači broj stanovnika. ◀

Literatura

[1] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, New Mathematical Library, volume 19, The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.

[2] G. Gamow, *One, Two, Three ... Infinity*, Viking Press, 1947.

[3] G. Polya, *How to solve it*, 2nd ed., Princeton University Press, 1957.

[4] A. S. Posamentier, S. Krulik, *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: Grades 6-12: A Resource for the Mathematics Teacher*, California: Corwin Press, 1998.