Osječki matematički list 16 (2016), 1-14

O Eulerovom teoremu o particijama

Ivica Martinjak*

Sažetak

U ovom radu prikazujemo Eulerov teorem o particijama, koji nam govori da je broj neparnih particija svakog prirodnog broja jednak broju striktnih particija tog broja. Najprije navodimo bijektivni dokaz ovog teorema te dokaz pomoću funkcija izvodnica. Opisujemo dvije Sylvesterove bijekcije koje ne samo da dokazuju Eulerov teorem već daju nekoliko daljnjih tvrdnji. Fineov teorem ilustriramo iterativnim postupkom Dysonove bijekcije na konkretnim primjerima.

Ključne riječi: *particija, Eulerov teorem, rang particije, bijekcija, funkcija izvodnica, Sylvesterova bijekcija, Dysonova bijekcija*

On the Euler's Partition Theorem

Abstract

In this paper, we present the Euler's partition theorem, which states that for every natural number the number of odd partitions is equal to the number of strict partitions. First, we prove this theorem bijectively and then using generating functions. We present two Sylvester's bijections which, besides proving Euler's theorem, also give a few other refinements. Fine's theorem is illustrated by using Dyson's bijection iteratively on concrete examples.

Keywords: *integer partition, Euler's theorem, rank of a partition, bijection, generating function, Sylvester's bijection, Dyson's bijection*

*Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: imartinjak@phy.hr

1 Uvod

Particija λ broja n je prikaz tog broja kao sume prirodnih brojeva, pri čemu je poredak sumanada irelevantan. Tako primjerice, postoji sedam particija broja 5,

$$(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,1,1),(1,1,1,1,1).$$

Teorija particija, koja se bazira na ovako definiranom pojmu, vrlo je bogata te duboko povezana s ostalim područjima matematike [1, 7], a također nalazi primjenu i u fizici [3].

Točnije, particiju broja $n \in \mathbb{N}$ definiramo kao niz $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ i pišemo $\lambda \vdash n$, pri čemu vrijedi

$$\lambda_i \in \mathbb{N}, \ \ \lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \text{ te}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n.$$

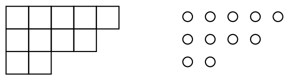
Brojeve λ_i nazivamo *dijelovima* particije a broj n *težina* particije. Broj dijelova l particije označujemo s $l(\lambda)$ i nazivamo *duljina* particije. Skup svih particija broja n označimo s $\mathcal{P}_n$,

$$\mathcal{P}_n := \{\lambda : \lambda \vdash n\}.$$

Broj particija od n označujemo s $p(n)$, $p(n) := |\mathcal{P}_n|$. Istaknuti podskupovi ovog skupa su podskupovi $\mathcal{O}_n$ particija čiji su svi dijelovi neparni, i njih ćemo zvati *neparnim particijama*, te $\mathcal{D}_n$ onih particija čiji su dijelovi međusobno različiti, i njih ćemo zvati *striktnim particijama*,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_n &:= \{\lambda \vdash n : \lambda_i \equiv 1 \pmod 2, \ i = 1, \ldots, l(\lambda)\} \\
\mathcal{D}_n &:= \{\lambda \vdash n : \lambda_i \neq \lambda_j, \ \forall i \neq j\}.
\end{aligned}$$

Particije često prikazujemo grafički, bilo pomoću Youngovog dijagrama bilo pomoću Ferrerovog grafa te ćemo i u ovom radu koristiti takve prikaze, posebno pri opisima bijektivnih preslikavanja. Youngov dijagram možemo definirati kao skup parova $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ takvih da $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq \lambda_i$. Youngov dijagram reprezentiramo geometrijski u ravnini $\mathbb{R}^2$, tako da točke i rastu u smjeru ordinate s orijentacijom prema ishodištu a točke j rastu u smjeru apscise s orijentacijom od ishodišta. Ekvivalentno definiramo Ferrerov graf (razlika je u tome da kod Youngovog dijagrama točku (i, j) crtamo kao kvadrat s centrom u toj točki). Slika 1 ilustrira obje te reprezentacije na primjeru particije $(5, 4, 2)$ broja 11.

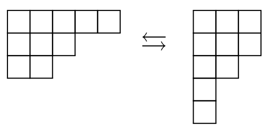


Slika 1: Youngov dijagram (lijevo) i Ferrerov graf (desno) za particiju $\lambda = (5, 4, 2)$.

Već na navedenom uvodnom primjeru možemo ilustrirati neke najočiglednije činjenice o broju particija s određenim uvjetima na dijelove. Broj particija $\lambda \vdash n$ s k dijelova označimo s $p_k(n)$. Pogledamo li pažljivije particije broja 5, zapažamo da postoje dvije particije koje se sastoje od tri sumanda, dakle $p_3(5) = 2$. Jednako je toliko i particija od 5 čiji je najveći dio 3. Ova pravilnost vrijedi općenito, za svaki $n \in \mathbb{N}$,

$$p_k(n) = |\{\lambda \vdash n : g(\lambda) = k\}|, \tag{1}$$

pri čemu je $g(\lambda)$ najveći dio u particiji λ, tj. $g(\lambda) = \lambda_1$. U to se lako uvjerimo na sljedeći način. Reprezentiramo particiju $\lambda \vdash n$, $l(\lambda) = k$, Youngovim dijagramom odnosno Ferrerovim grafom. Tada preslikamo Youngov dijagram tako da se dobije *konjugirana* particija $\mu \vdash n$, a njezin najveći sumand je jednak duljini početne particije (slika 2). Dakle, kažemo da je particija λ konjugirana obzirom na particiju μ ako su im Youngovi dijagrami simetrični obzirom na glavnu dijagonalu. Očito su takve particije jednakobrojne, tj. očito vrijedi relacija (1).



Slika 2: Par konjugiranih particija $\lambda = (5, 3, 2)$ i $\mu = (3, 3, 2, 1, 1)$.

Kažemo da je particija *samo-konjugirana* ako je jednaka svojoj konjugiranoj particiji. Lako se, na sličan način kao za jednakost (1), vidi da je broj samo-konjugiranih particija $\lambda \vdash n$ jednak broju particija $\mu \vdash n$ čiji su svi dijelovi različiti i neparni.

U propoziciji 1.1 donosimo još neke jednakosti. Dokaz za *i)* se može pronaći u [14], dokaz za *iii)* u [9] a *ii)* slijedi iz *i)*.

Propozicija 1.1. *Za svaki prirodni broj n*

i) $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$

ii) $p(n) = p_n(2n)$

iii) $p(n) = p_n^{(d)}(2n + d\binom{n}{2})$

gdje je $p_l^{(d)}(n) := |\{\lambda \vdash n : \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq d, i = 1, \ldots, l-1\}|$.

Relacije koje uključuju broj particija $p(n)$ su zasebna bogata i zanimljiva tema, pa ovdje objašnjavamo samo jedno osnovno brojevno svojstvo od $p(n)$. U tu svrhu navedimo tablično vrijednosti ove funkcije za nekoliko prvih prirodnih brojeva. Dogovorno uzimamo da je $p(0) = 1$.

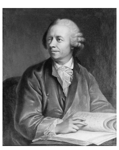
n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
0	1	5	7	10	42	15	176
1	1	6	11	11	56	16	231
2	2	7	15	12	77	17	297
3	3	8	22	13	101	18	385
4	5	9	30	14	135	19	490

Zapažamo da je svaka peta vrijednost $p(n)$ djeljiva brojem 5, pa naslućujemo da vrijedi

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5, \tag{2}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Ovu je kongruenciju otkrio i dokazao znameniti indijski matematičar S. Ramanujan, poznat po svojem istančanom osjećaju za brojeve (za detalje o dokazu vidjeti [1]). Štoviše, Ramanujan je dokazao i druge slične kongruencije za $p(n)$. Lak zadatak za čitatelja je pronaći u tablici kongruencije po modulu 7 i 11 te ih izraziti relacijama sličnima (2). Ramanujan je, zajedno s G. H. Hardyjem, 1918. godine pronašao i asimptotsku relaciju za $p(n)$,

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}. \tag{3}$$



Leonhard Euler (1707.–1783.) jedan od najznačajnijih matematičara u povijesti, poznat i po jednoj od najljepših jednakosti u matematici:

$e^{i\pi} + 1 = 0$

Do daljnjih rezultata u tom smjeru došao je H. Rademacher [13]. Jednako kao i Rademacherov izraz, netrivijalni su i eksplicitni izrazi za $p(n)$ koji su dobiveni tek nedavno a mogu se vidjeti u [5, 6].

Sada ćemo iskazati Eulerov teorem, koji dovodi u vezu brojeve neparnih i striktnih particija a koji predstavlja jednu od osnovnih relacija za particije.

Teorem 1.1. (Euler) *Za svaki prirodni broj n, broj neparnih particija* $\lambda \vdash n$ *jednak je broju striktnih particija* $\mu \vdash n$,

$$|\mathcal{O}_n| = |\mathcal{D}_n|. \tag{4}$$

Razmotrimo bijektivni dokaz ovog teorema na primjeru particije $\mu = (6, 5, 4)$. Svaki parni dio u particiji rastavljamo na dva jednaka pribrojnika, i to ponavljamo sve dok ne dođemo do samih neparnih sumanada,

$$\begin{aligned}(6,5,4) &\rightarrow (3,3,5,2,2)\\ &\rightarrow (3,3,5,1,1,1,1)\\ &\rightarrow (5,3,3,1,1,1,1).\end{aligned}$$

Jasno je da ovim postupkom uvijek od polazne striktne particije $\mu \vdash n$ dobivamo neparnu particiju $\lambda \vdash n$.
U drugu ruku, ponavljanje zbrajanja jednakih dijelova u (neparnoj) particiji λ uvijek rezultira (striktnom) particijom iste težine. Dakle, u našem primjeru vrijedi

$$\begin{aligned}(5,3,3,1,1,1,1) &\rightarrow (5,6,2,2)\\ &\rightarrow (5,6,4)\\ &\rightarrow (6,5,4).\end{aligned}$$

Gornja razmatranja daju jednostavan bijektivni dokaz Eulerovog teorema. U nastavku ćemo vidjeti još neke dokaze ovog teorema, i to ne samo bijektivne. No, prije toga ilustrirajmo ovaj teorem jednim primjerom.

U primjeru 1.1 navodimo sve particije koje se nalaze u skupovima $\mathcal{O}_6$ i $\mathcal{D}_6$. Od 11 particija broja 6, svaki od tih podskupova skupa $\mathcal{P}_6$ broji četiri elementa. Dakle, sukladno Eulerovom teoremu vrijedi $|\mathcal{O}_6| = |\mathcal{D}_6|$. Prethodno opisana bijekcija neke particije preslikava same u sebe, kao što je to ovdje slučaj s $(5, 1)$.

Primjer 1.1.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_6 &= \{(5,1),(3,3),(3,1,1,1),(1,1,1,1,1,1)\}\\ \mathcal{D}_6 &= \{(6),(5,1),(4,2),(3,2,1)\}\end{aligned}$$

Do sada smo vidjeli jednostavan bijektivni dokaz Eulerovog teorema. No, sam Euler je istraživao particije pomoću *funkcija izvodnica*. Stoga ćemo prikazati i dokaz ovog teorema na taj način. U tu svrhu ćemo najprije, ukratko, objasniti ovaj važan kombinatorički koncept. Promatramo skup $S = \{1, 2, 3\}$. Sve moguće striktne particije prirodnih brojeva koje možemo formirati od elemenata ovog skupa su

$$(1), (2), (3), (2,1), (3,1), (3,2), (3,2,1).$$

Nadalje, pomnožimo li

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)$$

dobivamo polinom

$$1 + x + x^2 + x^{1+2} + x^3 + x^{1+3} + x^{2+3} + x^{1+2+3}$$

gdje eksponenti na desnoj strani ove jednakosti daju upravo sve moguće striktne particije s dijelovima iz skupa S. Dakle, ovdje imamo dvije particije broja 3 te po jednu particiju brojeva $1, 2, 4, 5$ i 6, s dijelovima iz S. Općenitije, kada je $S = \{1, 2, \ldots, r\}$ vrijedi

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + x^i) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{D}_n^{(r)}| x^n$$

gdje je $\mathcal{D}_n^{(r)}$ skup striktnih particija od n s dijelovima iz skupa S. Znači, u slučaju da želimo generirati particije za proizvoljni n, skup S treba sadržavati sve prirodne brojeve. Tada vrijedi

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{D}_n| x^n,$$

pa je

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i) \tag{5}$$

funkcija izvodnica za brojeve $|\mathcal{D}_n|$ particija iz skupa $\mathcal{D}_n$, $n \geq 0$. Razmotrimo sada particije kod kojih je dopušteno ponavljanje dijelova. Ako, primjerice, dopustimo da se svaki element skupa $S = \{1, 2, 3\}$ može pojaviti najviše dva puta u particiji, onda umnožak

$$(1 + x^1 + x^{1+1})(1 + x^2 + x^{2+2})(1 + x^3 + x^{3+3})$$

daje polinom

$$1 + x + x^1 + x^{1+1} + x^2 + x^{2+2} + \cdots + x^{1+1+2+2+3+3},$$

gdje eksponenti predstavljaju sve moguće particije s dijelovima iz S koji se ponavljaju najviše dva puta. Općenitije, ako je $S = \{1, 2, \ldots, r\}$ a pojedini se dio može ponoviti najviše d puta, onda umnožak

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + x^i + x^{2i} + \cdots + x^{di})$$

daje funkciju izvodnicu za brojeve takvih particija. Konačno, dopustimo li da suma u faktorima bude beskonačna te da S bude skup prirodnih brojeva, tada vrijedi

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i + x^{2i} + \cdots) = \sum_{n\geq 0} |\mathcal{P}_n| x^n.$$

Time dobivamo

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i} = \sum_{n>0} |\mathcal{P}_n| x^n,$$

što znači da je lijeva strana ove jednakosti funkcija izvodnica za brojeve $p(n) = |\mathcal{P}_n|$ particija od n. Sličnim razmatranjem se vidi da je $G(x)$,

$$G(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2i-1}}, \tag{6}$$

funkcija izvodnica za brojeve $|\mathcal{O}_n|$, tj. brojeve neparnih particija, [14].

Sada imamo

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i) &= \frac{(1-x^2)}{(1-x)} \frac{(1-x^4)}{(1-x^2)} \frac{(1-x^6)}{(1-x^3)} \frac{(1-x^8)}{(1-x^4)} \cdots \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)\cdots} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2i-1})},\end{aligned}$$

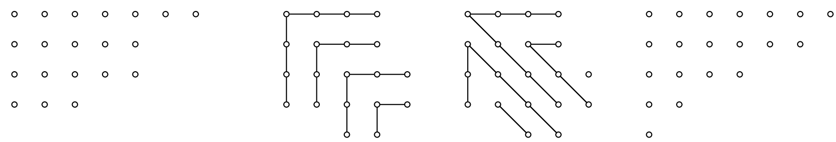
što dokazuje Eulerov teorem.

2 Sylvesterova bijekcija

James Joseph Sylvester (1814.–1897.) engleski matematičar, poznat po doprinosima u teoriji matrica, teoriji brojeva i kombinatorici.

Dokažimo sada Eulerov teorem pomoću bijekcije koju je pronašao engleski matematičar J. Sylvester. Neka je $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n$ neparna particija od n s dijelovima $\lambda_i = 2m_i + 1$, $m_i \in \mathbb{N}$. Tada dio λ_i u Ferrerovom grafu možemo reprezentirati s m_i horizontalnih vrhova, m_i vertikalnih i jednim vrhom koji povezuje ta dva dijela. U sljedećem koraku, horizontalne i pripadne dijagonalne vrhove povezujemo u dijelove, jednako kao i vertikalne i pripadne dijagonalne. Tako dobiveni brojevi će biti međusobno različiti. Naime, dijelovi s vertikalnim krakom imaju najviše onoliko točaka na dijagonali koliko i njihov prethodnik a barem jednu točku manje u kraku.

Dijelovi s vodoravnim kracima također su uvijek manji od prethodnika. Naposljetku, od tih dijelova konstruiramo standardni Youngov dijagram, koji reprezentira striktnu particiju $\mu \vdash n$. Lako se vidi da obrnuti slijed ovog postupka daje neparnu particiju, čime zaključujemo dokaz.



Slika 3: Sylvesterova bijekcija za $\lambda = (7, 5, 5, 3)$, $\mu = (7, 6, 4, 2, 1)$.

Slika 3 prikazuje opisani postupak. Spomenimo da se ova bijekcija ponekad naziva i *konstrukcija udice* (engl. fish-hook construction).

Teorem 2.1. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $\mu \vdash n$ striktna particija i $g(\mu) = m$. Tada je broj neparnih particija $\lambda \vdash n$ za koje vrijedi $g(\lambda) + 2l(\lambda) = 2m + 1$ jednak broju particija μ.*

Dokaz. Iz opisane bijekcije, koja je na slici 3 prikazana na konkretnom primjeru, slijedi

$$g(\mu) = \frac{g(\lambda) - 1}{2} + l(\lambda).$$

Iz ovog izraza odmah dobivamo

$$\begin{aligned} 2g(\mu) &= g(\lambda) - 1 + 2l(\lambda) \\ g(\lambda) + 2l(\lambda) &= 2m + 1, \end{aligned}$$

čime je teorem dokazan. □

Sljedeći primjer prikazuje tvrdnju teorema 2.1 u konkretnom slučaju. Promatramo neparne particije broja 10 tj. particije u skupu $\mathcal{O}_{10}$ kao i striktne particje, tj. particije u skupu $\mathcal{D}_{10}$ te ih razvrstavamo u podskupove obzirom na vrijednost m najvećeg dijela particija u $\mathcal{D}_{10}$. Pri tome, primjerice, za particiju $\lambda = (7, 1, 1, 1)$ vrijedi $7 + 2 \cdot l(\lambda) = 15$ pa se ona nalazi u podskupu od $\mathcal{O}_{10}$ definiranim s $m = 7$. Taj podskup broji dva elementa obzirom da postoje dvije particije u $\mathcal{D}_{10}$ čiji je najveći član 7. Čitatelju prepuštamo da primijeni opisanu Sylvesterovu bijekciju kako bi vidio u koju će se particiju preslikati dotična $(7, 1, 1, 1)$.

Primjer 2.1.

m	$\mathcal{O}_{10}$	$\mathcal{D}_{10}$
10	$(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$	(10)
9	$(3,1,1,1,1,1,1,1)$	$(9,1)$
8	$(5,1,1,1,1,1)$	$(8,2)$
7	$(7,1,1,1),(3,3,1,1,1,1)$	$(7,3),(7,2,1)$
6	$(9,1),(5,3,1,1)$	$(6,4),(6,3,1)$
5	$(7,3),(3,3,3,1)$	$(5,3,2),(5,4,1)$
4	$(5,5)$	$(4,3,2,1)$

Sylvesterova bijekcija je vrlo značajna u teoriji particija, ne samo zato što pomoću nje dokazujemo Eulerov teorem i teorem 2.1 nego ona omogućuje profiniti Eulerov teorem i na druge načine [10].

3 Jednakost broja različitih neparnih dijelova i broja nizova

Sylvester je pronašao još jednu prekrasnu bijekciju koja ne samo da dokazuje Eulerov teorem nego pokazuje i više. Promotrimo li, primjerice, particiju

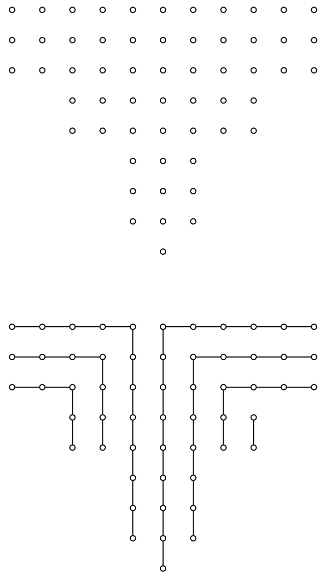
$$\lambda = (11,11,11,7,7,3,3,3,1)$$

vidimo da se radi o neparnoj particiji broja 57 pri čemu se javljaju četiri različita sumanda. Prikazat ćemo ovu particiju pomoću modificiranog Ferrerovog grafa, na način da pojedini redak broji onoliko vrhova koliki je pojedini sumand particije, a dobiveni graf je simetričan obzirom na središnju os, kao što prikazuje slika 4 (gore). Sada ćemo na tom istom grafu vrhove povezati u dijelove particije na način kako prikazuje slika 4 (dolje). Time dobivamo particiju $\mu = (14,12,11,7,6,5,2)$. Dakle, sumand u dobivenoj particiji je jednak broju vrhova u pravom kutu (koji je sastavljen od povezanih vrhova). Ovako dobiveni dijelovi će uvijek biti različiti te vrijedi i obrat. Stoga zaključujemo da se radi o novoj bijekciji koja dokazuje Eulerov teorem.

Primijetimo sada da particija μ sadrži četiri maksimalna niza čiji su članovi uzastopni brojevi,

$$(14),(12,11),(7,6,5),(2),$$

te da particija λ ima upravo četiri različita sumanda. Detaljnijim razmatranjem opisane bijekcije uvjerit ćemo se da ovakva jednakost vrijedi općenito, za svaku težinu particije. Definiramo da je centralni pravi kut onaj čiji je



Slika 4: Preslikavanje particije $(11, 11, 11, 7, 7, 3, 3, 3, 1)$ s četiri različita neparna sumanda u striktnu particiju $(14, 12, 11, 7, 6, 5, 2)$, koja sadrži također četiri niza uzastopnih brojeva.

vertikalni krak u centru i ima najveći broj vrhova. Drugi u slijedu je kut s lijevim susjednim vertikalnim krakom, treći onaj sa desnim susjednim vertikalnim krakom itd. Obzirom da je razmatrani graf simetričan, pravi kut čiji je horizontalni krak na lijevoj strani ima:

- barem jedan vrh manje u horizontalnom kraku nego njegov prethodnik,
- najviše onoliko vrhova u vertikalnom kraku koliko i njegov prethodnik.

Pravi kut čiji je horizontalni krak na desnoj strani ima:

- barem jedan vrh manje u vertikalnom kraku nego njegov prethodnik,
- najviše onoliko vrhova u horizontalnom kraku koliko i njegov prethodnik.

Drugim riječima, pravi kut ima točno jedan vrh manje od prethodnika ukoliko im vertikalni kraci počinju u istom retku (gledajući odozdo) a horizontalni kraci su sastavljeni od jednakih dijelova početne particije. Iz ovog slijedi da se niz, s dotičnim uvjetom, nastavlja sve dok desni pravi kutovi počinju u istom retku (gledajući odozdo) a horizontalni krak im je sastavljen od jednakih dijelova originalne particije. Ovim razmatranjem smo dokazali da će se svaka particija s k različitih dijelova preslikati u particiju s k nizova uzastopnih brojeva. Kako vrijedi i obrat [1], u čije se obrazlaganje ovdje nećemo upuštati, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.1. *Broj neparnih particija $\lambda \vdash n$ koje imaju k međusobno različitih dijelova jednak je broju striktnih particija $\mu \vdash n$ čiji dijelovi formiraju k maksimalnih nizova uzastopnih brojeva.*

4 Fineovo profinjenje

Definiramo pojam *ranga* particije λ, u oznaci $r(\lambda)$, kao razliku najvećeg sumanda $g(\lambda)$ i broja dijelova $l(\lambda)$,

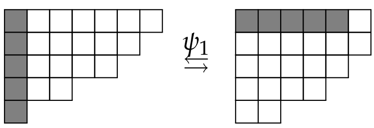
$$r(\lambda) := g(\lambda) - l(\lambda).$$

Ovaj je pojam uveo engleski fizičar i matematičar F. Dyson motiviran nalaženjem kombinatornog objašnjenja spomenutog Ramanujanovog teorema koji kaže da je $p(5n+4)$ djeljiv s 5 za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ovdje ćemo vidjeti kako taj pojam omogućuje daljnje, jače, tvrdnje. Skup particija $\lambda \vdash n$ ranga r označimo sa $\mathcal{P}_{n,r}$. Nadalje, skup particija od n ranga manjeg ili jednakog r označimo sa $\mathcal{H}_{n,r}$ a skup particija od n ranga većeg ili jednakog r označimo $\mathcal{G}_{n,r}$. Lako se možemo uvjeriti da vrijedi

$$p(n,r) = h(n,r) - h(n,r-1) \tag{7}$$
$$g(n,r) = h(n,-r) \tag{8}$$

gdje su $p(n,r), h(n,r), g(n,r)$ redom veličine prethodno definiranih skupova.

Freeman Dyson (1923.-...) engleski teorijski fizičar i matematičar, poznat po svom radu iz kvantne termodinamike, astronomije i fizike čvrstih tijela.



Slika 5: Dysonova bijekcija za slučaj $\lambda = (7,6,5,3,1) \in \mathcal{H}_{22,r+1}$, $\mu = (6,6,5,4,2) \in \mathcal{G}_{22+r,r-1}$.

Lema 4.1. *Broj particija $\lambda \vdash n$ ranga $r(\lambda) \leq 1 + r$ jednak je broju particija $\mu \vdash n + r$ ranga $r(\mu) \leq 1 - r$,*

$$h(n, 1 + r) = h(n + r, 1 - r). \tag{9}$$

Dokaz. Neka je $\psi_r : \mathcal{H}_{n,r+1} \to \mathcal{G}_{n+r,r-1}$ funkcija koja prvi stupac u Youngovom dijagramu particije $\lambda \in \mathcal{H}_{n,r+1}$ premjesti iznad prvog retka ostatka dijagrama, te ga produlji za r kvadrata (slika 5). Kako bismo dokazali da je dobivena particija $\mu \in \mathcal{G}_{n+r,r-1}$ trebamo se uvjeriti da vrijedi

$$|\mu| = n + r \text{ te}$$
$$r(\mu) \geq r - 1,$$

od čega je prvi uvjet očigledno ispunjen. Kako je duljina particije μ manja ili jednaka $l(\lambda) + 1$ vrijedi

$$r(\mu) = g(\mu) - l(\mu) = l(\lambda) + r - l(\mu) \geq r - 1,$$

čime je i drugi uvjet ispunjen. Naposljetku koristimo relaciju (8). Obrat ovog postupka također vrijedi te time zaključujemo dokaz. □

Iterativnim korištenjem Dysonove bijekcije može se dokazati sljedeći teorem N. Finea [10]. Vidjet ćemo da ne samo da vrijedi $|\mathcal{O}_n| = |\mathcal{D}_n|$ nego možemo formirati podskupove oba ova skupa, obzirom na rang, i njihove će veličine biti jednake.

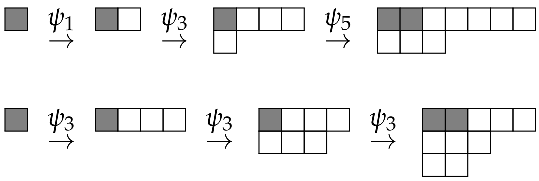
Teorem 4.1. (Fine) *Neka je $r \in \mathbb{N}_0$. Broj neparnih particija $\lambda \vdash n$ s najvećim dijelom jednakim $2r + 1$, jednak je broju striktnih particija $\mu \vdash n$ čiji je rang $r(\mu) = r$ ili $r(\mu) = 2r + 1$.*

Primjer 4.1 prikazuje deset neparnih particija broja 10, te 10 striktnih particija, koje su razvrstane u pet podskupova obzirom na rang. Vidljivo je da podskupovi od $\mathcal{O}_{10}$ i $\mathcal{D}_{10}$ pridruženi pojedinoj vrijednosti r sadrže jednak broj particija. Tako u svakom podskupu za $r = 4$ imamo po jednu particiju, za $r = 3$ su dvije particije itd.

Primjer 4.1.

r	$\mathcal{O}_{10}$	$\mathcal{D}_{10}$
4	$(9, 1)$	(10)
3	$(7, 3), (7, 1, 1, 1)$	$(8, 2), (9, 1)$
2	$(5, 5), (5, 3, 1, 1), (5, 1, 1, 1, 1, 1)$	$(6, 4), (7, 2, 1), (7, 3)$
1	$(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (3, 3, 1, 1, 1, 1), (3, 3, 3, 1)$	$(5, 3, 2), (5, 4, 1), (6, 3, 1)$
0	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$(4, 3, 2, 1)$

Umjesto formalnog dokaza teorema 4.1, primijenit ćemo Dysonovu bijekciju na neke slučajeve. Particija $\lambda = (5, 3, 1, 1)$ će se iterativnom primjenom ove bijekcije preslikati u $(7, 3)$ na sljedeći način. Budući da je drugi najmanji dio particije λ jednak 1, primijenimo najprije funkciju ψ_1 na najmanji dio particije koji je u ovom slučaju 1. Sada na dobivenu particiju primijenimo funkciju ψ_3 te na koncu primjenjujemo ψ_5. Taj je postupak prikazan na slici 6. Na istoj slici vidimo i kako Dysonova bijekcija particiju $\lambda' = (3, 3, 3, 1)$ preslika u $\mu' = (5, 3, 2)$.



Slika 6: Iterativna primjena Dysonove bijekcije za slučajeve $\lambda = (5, 3, 1, 1) \to \mu = (7, 3)$ i $\lambda' = (3, 3, 3, 1) \to \mu' = (5, 3, 2)$.

Općenito, ako je početna particija $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ u i-toj iteraciji primjenjujemo funkciju $\psi_{\lambda_{l-i}}$, $i = 1, \dots, l-1$. Pritom, postupak uvijek počinjemo s najmanjim dijelom particije λ.

Na isti način lako primijenimo Dysonovu bijekciju na ostale particije, u pojedinom podskupu. Dobiveni parovi za podskup određen s $r = 2$ su

$$\begin{aligned} (5, 3, 1, 1) &\rightleftarrows (7, 3), \\ (5, 5) &\rightleftarrows (6, 4), \\ (5, 1, 1, 1, 1, 1) &\rightleftarrows (7, 2, 1). \end{aligned}$$

Ovime završavamo prikaz Eulerovog teorema o particijama. Vidjeli smo da ne samo da je broj neparnih particija nekog broja jednak broju striktnih particija tog broja već pritom vrijede i druge jednakosti. Prikazali smo bijekcije koje dokazuju jednakosti obzirom na najveći sumand kod striktnih particija, obzirom na broj različitih dijelova kod neparnih particija te obzirom na rang particije. Kao što je već u tekstu sugerirano, postoje i druge zanimljive tvrdnje i proširenja ovog Eulerovog teorema odnosno prikazanih bijekcija.

Literatura

[1] G.E. Andrews, K. Eriksson, *Integer partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK 2004.

[2] G.E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK 1998.

[3] A. Berkovich, B.M. McKoy, *Rogers-Ramanujan identities: A century of progres from mathematics to physics*, Doc. Math. J. DMV, Extra Volume ICM, III(1998), 163–172

[4] M. Bona, *A Walk Through Combinatorics*, World Scientific Publishing, Singapore 2011.

[5] K. Bringmann, K. Ono, *An arithmetic formula for the partition function*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**(2007), 3507–3514

[6] J.H. Bruinier, K. Ono, *Algebraic formulas for the coefficients of half-integral weight harmonic weak Maass forms*, Advances in Mathematics, **246**(2013), 198–219

[7] D. Fuchs and S. Tabachnikov, *Mathematical Omnibus. Thirty Lectures on Classic Mathematics*, American Mathematical Soc., Providence, Rhode Island 2007.

[8] N.A. Loehr, *Bijective Combinatorics*, CRC Press, Boca Raton, USA 2011.

[9] I. Martinjak, D. Svrtan, *Some Families of Identities for Integer Partition Function*, Mathematical Communications, **20**(2), 2015, 193–200

[10] I. Pak, *On Fine's partition theorems, Dyson, Andrews and missed opportunities*, Mathematical Intelligencer, **25**(2003), 10–16

[11] I. Pak, *A generalization of Sylvester's identity*, Discrete Mathematics, **178**(1998), 277–281

[12] I. Pak, *Partition bijection, a survey*, Ramanujan Journal, **12**(2006), 5–75

[13] H. Rademacher, *On the Expansion of the Partition Function in a Series*, Annals of Mathematics, **44**(1943), 416–422

[14] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb 2001.