Osječki matematički list 16 (2016), 15-25

Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje

Mihaela Ribičić Penava[*], Katarina Bošnjak[†]

Sažetak

U ovom radu prezentiran je težinski oblik diskretne Jensenove nejednakosti te je pokazano kako iz Jensenove nejednakosti slijedi čitav niz drugih važnih nejednakosti kao što su nejednakosti među sredinama, Youngova nejednakost, Cauchyjeva nejednakost, Hölderova nejednakost te nejednakost Minkowskog.

Ključne riječi: *Jensenova nejednakost, konveksne funkcije, nejednakosti među sredinama, Youngova nejednakost, Hölderova nejednakost*

Classical inequalities derived from the Jensen inequality

Abstract

In this paper, weighted discrete Jensen's inequality is presented. Some important inequalities such as mean inequalities, Young's inequality, the Cauchy inequality, Hölder's inequality and the Minkowski inequality are also proved using Jensen's inequality.

Keywords: *Jensen's inequality, convex functions, mean inequalities, Young's inequality, Hölder's inequality*

[*]Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: mihaela@mathos.hr

[†]Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: kbosnjak@mathos.hr

Charles Hermite (1822.–1901.), francuski matematičar

1 Konveksne funkcije

Prvi radovi o konveksnim funkcijama javljaju se krajem devetnaestoga i početkom dvadesetoga stoljeća. Francuski matematičar C. Hermite je u svome radu iz 1881. prvi uveo pojam konveksne funkcije. Međutim, tek 1906. godine danski matematičar J. L. W. V. Jensen je definirao konveksnu funkciju pomoću nejednakosti (1), odnosno na način kako je to danas uobičajeno definirati konveksnu funkciju. Cilj ovoga rada je pokazati kako se pomoću nekih konkretnih konveksnih funkcija i težinskog oblika Jensenove nejednakosti, koja vrijedi za konveksne funkcije, mogu dokazati mnoge druge važne nejednakosti. Pojam konveksne funkcije nam je potreban za razumijevanje Jesenove nejednakosti, stoga navedimo definiciju konveksne funkcije na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neke osnovne rezultate o konveksnim funkcijama. Osim u teoriji nejednakosti, konveksne funkcije imaju važnu ulogu i u različitim područjima primijenjene matematike, primjerice u optimizaciji. Zainteresirani čitatelji detaljnije informacije o primjenama konveksnih funkcija u teoriji optimizacije mogu pronaći u [1].

Definicija 1.1. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako za sve $x_1, x_2 \in I$ i svaki $\alpha \in [0,1]$ vrijedi

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2). \tag{1}$$

Ako za sve $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ i $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ vrijedi stroga nejednakost u (1) kažemo da je f strogo konveksna. Ako u (1) vrijedi suprotna nejednakost, kažemo da je funkcija f konkavna na intervalu I, odnosno ako je za sve $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ i $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ ta suprotna nejednakost stroga, kažemo da je f strogo konkavna.

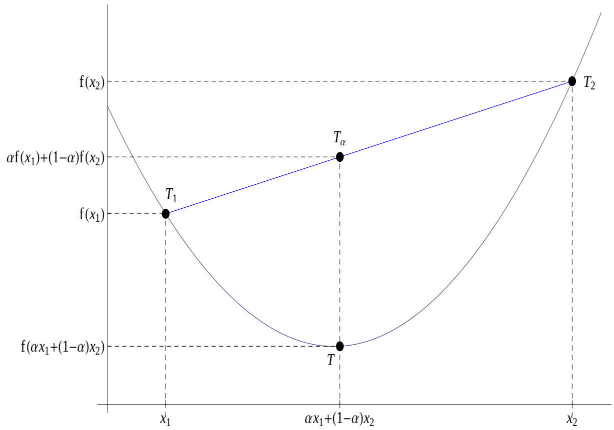
Slično možemo definirati i konveksnu funkciju na $\mathbb{R}^n$, odnosno na bilo kojem konveksnom skupu[1] koji se nalazi u domeni dane funkcije.
Prirodno se nameće pitanje postoji li funkcija koja je i konveksna i konkavna. Odgovor je potvrdan, afina funkcija $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je funkcija koja je istodobno i konveksna i konkavna.

Slika 1 prikazuje geometrijsku interpretaciju pojma konveksne funkcije. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija te neka su dane točke $T_1 = (x_1, f(x_1))$, $T_2 = (x_2, f(x_2))$, gdje su $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ i $T_\alpha = (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2))$, $\alpha \in [0,1]$, točka na spojnici točaka T_1 i T_2. Za funkcijsku vrijednost točke $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ vrijedi

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2),$$

[1] Skup $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan ako vrijedi $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in D$, za sve $x_1, x_2 \in D$ i $\alpha \in [0,1]$.

odnosno graf konveksne funkcije $f_{|[x_1,x_2]}$ se nalazi ispod ili na spojnici točaka T_1 i T_2.



Slika 1: Graf konveksne funkcije

Na osnovu prethodne definicije nije uvijek jednostavno provjeriti je li funkcija konveksna, stoga će nam dobro doći sljedeći kriterij za ispitivanje konveksnosti funkcije.

Teorem 1.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno derivabilna funkcija na I. Funkcija f je konveksna na I ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$. Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in I$, onda je f strogo konveksna na I.*

Kako bismo se uvjerili da ne vrijedi obrat posljednje tvrdnje teorema 1.1 dovoljno je pogledati strogo konveksnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ za koju vrijedi $f''(0) = 0$. Dokaz teorema 1.1 može se vidjeti u [4] (str. 153). Više detalja o konveksnim funkcijama i njihovim poopćenjima može se naći u [6] (str. 49–64) i [7].

2 Jensenova nejednakost

Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859.–1925.), danski matematičar

Danski matematičar Johan Ludwig William Valdemar Jensen je u svome radu "Sur les fonctions convexes et les intégalités entre les valeurs moyennes" objavljenom 1906. godine u časopisu Acta Mathematica proučavajući konveksne funkcije dokazao nejednakost koja mu je osigurala matematičku besmrtnost. Ista u njegovu čast nosi ime Jensenova nejednakost.

Teorem 2.1 (Diskretna Jensenova nejednakost). *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konveksna na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n \in I$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ takve da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ vrijedi*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i). \tag{2}$$

Dokaz. Kako je interval $I \subseteq \mathbb{R}$ konveksan skup on je zatvoren na konveksne kombinacije, odnosno ako su $x_1, \ldots, x_n \in I$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ takvi da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ onda je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in I$.

1. Ako pretpostavimo da vrijedi nejednakost (2), onda za $n = 2$ imamo nejednakost (1), pa slijedi da je f konveksna na I.

2. U svrhu dokaza obrata pretpostavimo da je f konveksna funkcija te metodom matematičke indukcije po $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dokažimo nejednakost (2). Iz definicije konveksne funkcije je jasno da nejednakost (2) vrijedi za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n, tj.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Neka su $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in I$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in [0,1]$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1} = 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je barem jedan $\alpha_i \neq 1$ (u suprotnom imamo trivijalnu nejednakost), dakle neka je $\alpha_{n+1} \neq 1$ pa vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 - \alpha_{n+1},$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} = 1.$$

Pomoću baze indukcije i pretpostavke indukcije, dokažimo istinitost tvrdnje za $n+1$:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i + \alpha_{n+1}x_{n+1}\right)\\
&= f\left((1-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}x_i + \alpha_{n+1}x_{n+1}\right)\\
&\leq (1-\alpha_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}x_i\right) + \alpha_{n+1}f(x_{n+1})\\
&\leq (1-\alpha_{n+1})\cdot\frac{1}{1-\alpha_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) + \alpha_{n+1}f(x_{n+1})\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f(x_i).
\end{aligned}$$

Na taj način smo dokazali da nejednakost (2) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. □

Napomena 2.1. Može se pokazati, da za strogo konveksnu funkciju f jednakost u 2 vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Iz definicije konveksne i konkavne funkcije, te teorema 2.1 zaključujemo ako je funkcija f konkavna onda u (2) vrijedi suprotna nejednakost. Osim (2) često se u primjenama koristi i ekvivalentan zapis težinskog oblika diskretne Jensenove nejednakosti

$$f\left(\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}s_i x_i\right) \leq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}s_i f(x_i), \tag{3}$$

gdje su $s_1, \ldots, s_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$ pozitivan realan broj. Primjenom supstitucije $\alpha_i = s_i/S$, $i = 1, \ldots, n$ je vidljivo da su zapisi (2) i (3) ekvivalentni.
U specijalnom slučaju za $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 1$ iz (3) slijedi netežinski oblik Jensenove nejednakosti

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Primjene netežinskog oblika Jensenove nejednakosti pri rješavanju zadataka vezanih uz gradivo srednje škole mogu se vidjeti u [3]. Zbog jednostavnosti u ovome radu će biti predstavljeni samo diskretni oblici kako Jensenove, tako i ostalih nejednakosti. Više detalja o integralnim oblicima spomenutih nejednakosti i njihovim dokazima može se naći u [5] i [7].

3 Nejednakosti izvedene iz Jensenove nejednakosti

Mnoge poznate nejednakosti kao što su nejednakosti među sredinama, Youngova nejednakost, Cauchyjeva nejednakost, Hölderova nejednakost te nejednakost Minkowskog mogu se dokazati pomoću Jensenove nejednakosti. Najprije ćemo definirati osnovne sredine.

Definicija 3.1. Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $s = (s_1, \ldots, s_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

(i) Aritmetička sredina $A(a;s)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$ definirana je izrazom

$$A(a;s) = \frac{s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n}{S}.$$

(ii) Geometrijska sredina $G(a;s)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$ definirana je izrazom

$$G(a;s) = (a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n})^{\frac{1}{S}}.$$

(iii) Harmonijska sredina $H(a;s)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$ definirana je izrazom

$$H(a;s) = \frac{S}{\frac{s_1}{a_1} + \ldots + \frac{s_n}{a_n}}.$$

(iv) Kvadratna sredina $K(a;s)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$ definirana je izrazom

$$K(a;s) = \sqrt{\frac{s_1 a_1^2 + \cdots + s_n a_n^2}{S}}.$$

Teorem 3.1. *Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $s = (s_1, \ldots, s_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$. Tada vrijedi*

$$K(a;s) \geq A(a;s) \geq G(a;s) \geq H(a;s)$$

s jednakostima ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Dokaz. 1. Promotrimo funkciju $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$. Kako je $f_1''(x) = 2 > 0$ funkcija f_1 je strogo konveksna na čitavoj svojoj domeni, pa za nju vrijedi Jensenova nejednakost (3)

$$\left(\frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i x_i \right)^2 \leq \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2.$$

Uz supstituciju $x_i = a_i$ za $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$\frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i a_i \leq \sqrt{\frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i a_i^2},$$

time smo dokazali da prva nejednakost vrijedi.

2. Za funkciju $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f_2(x) = e^x$ vrijedi $f_2''(x) = e^x > 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, pa je f_2 strogo konveksna na $\mathbb{R}$. Jensenova nejednakost (3) za funkciju f_2 uz supstituciju $x_i = \ln a_i$, $i = 1, \ldots, n$ glasi

$$e^{\frac{1}{S} \sum\limits_{i=1}^{n} s_i \ln a_i} \leq \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i e^{\ln a_i}. \tag{4}$$

Zbog svojstava logaritamske funkcije nejednakost (4) je ekvivalentna sljedećim nejednakostima

$$e^{\frac{1}{S} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln a_i^{s_i}} \leq \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i a_i,$$

$$e^{\ln \left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{s_i} \right)^{\frac{1}{S}}} \leq \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i a_i,$$

iz čega zaključujemo da je geometrijska sredina brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$ manja ili jednaka od aritmetičke sredine brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$, odnosno

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{s_i} \right)^{\frac{1}{S}} \leq \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i a_i.$$

3. Ako u prethodnoj nejednakosti brojeve $a_1, \ldots, a_n$ zamjenimo brojevima $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ dobijemo treću nejednakost, odnosno nejednakost između geometrijske sredine brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$ i harmonijske sredine brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$.

Iz napomene 2.1 je jasno da u sve tri nejednakosti vrijedi jednakost ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. $\square$

Osim toga, pomoću Jensenove nejednakosti se mogu pokazati i nejednakosti među potencijalnim sredinama (poopćenje pojma osnovnih sredina) zainteresirani čitatelji detalje dokaza mogu vidjeti u [2] (str. 112).
Jedna od nejednakosti, uz čiju primjenu se mogu pokazati mnoge druge nejednakost primjerice Hölderova nejednakost je Youngova nejednakost, koja je ime dobila po engleskom matematičaru W. H. Youngu.

William Henry Young (1863.–1942.), engleski matematičar

Teorem 3.2. *(Youngova nejednakost) Neka su a, b pozitivni realni brojevi te $1 < p, q < \infty$ takvi da je $1/p + 1/q = 1$. Tada vrijedi*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \tag{5}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a^p = b^q$.

Dokaz. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Kako je $f''(x) = -1/x^2 < 0$ funkcija f je strogo konkavna na čitavoj svojoj domeni, pa vrijedi suprotna Jensenova nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right). \tag{6}$$

Primjenom supstitucije $n = 2, \alpha_1 = 1/p, \alpha_2 = 1/q, x_1 = a^p$ i $x_2 = b^q$ slijedi

$$\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right),$$

odnosno

$$\ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

Djelujemo li na prethodnu nejednakost eksponencijalnom funkcijom $x \mapsto e^x$ koja je rastuća na čitavoj svojoj domeni, dobivamo nejednakost (5). Po napomeni 2.1 jednakost u (5) vrijedi ako i samo ako je $a^p = b^q$. $\square$

Augustin Louis Cauchy (1789.–1857.), francuski matematičar

U nastavku donosimo još jednu važnu nejednakost koje je u literaturi poznata kao Cauchyjeva ili Cauchy–Schwarzova[2] ili Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva[3] nejednakost.

Teorem 3.3. *(Cauchyjeva nejednakost) Ako su $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ n-torke realnih brojeva, onda vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{7}$$

[2] H. A. Schwarz (1843.—1921.), njemački matematičar
[3] V. J. Buniakowsky (1804.—1869.), ukrajinski matematičar

Jednakost vrijedi ako i samo ako su n-torke a i b proporcionalne.

Dokaz. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, je strogo konveksna na $\mathbb{R}$, pa za nju vrijedi Jensenova nejednakost (3)

$$\left(\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^2 \leq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2.$$

Ako gornju nejednakost pomnožimo sa S^2 imamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^2 \leq S\sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2.$$

Uz supstituciju $x_i = a_i/b_i$ i $s_i = b_i^2$ za $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Po napomeni 2.1 jednakost u (7) vrijedi ako i samo ako je $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$, odnosno jednakost vrijedi ako i samo ako su a i b proporcionalne. □

Njemački matematičar Otto Hölder je dokazao da vrijedi sljedeće poopćenje Cauchyjeve nejednakosti.

Teorem 3.4. *(Hölderova nejednakost) Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i p, q dva realna broja različita od nule takva da je $1/p + 1/q = 1$. Tada za $p > 1$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{8}$$

za $p < 1$ vrijedi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako su a^p i b^q proporcionalne n-torke.

Otto Hölder (1859.–1937.), njemački matematičar

Dokaz. Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/p}$, $p \neq 0$ je za $p > 1$ strogo konkavna, a za $p < 1$ strogo konveksna. Stoga za $p > 1$ iz suprotne Jensenove nejednakosti slijedi

$$\left(\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i x_i^{\frac{1}{p}}.$$

Ako prethodnu nejednakost pomnožimo sa S i iskoristimo identitet $1/p + 1/q = 1$ imamo

$$\sum_{i=1}^{n} s_i x_i^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uvrstimo $x_i = a_i^p / b_i^q$ i $s_i = b_i^q$ za $i = 1, \ldots, n$ te dobijemo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

čime je dokazana nejednakost (8). Za $p < 1$ i $p \neq 0$ funkcija f je strogo konveksna te iz Jensenove nejednakosti analognim razmatranjem slijedi suprotna nejednakost u (8). Kako za strogo konveksnu funkciju jednakost u Jensenovoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, onda jednakost u (8) i njoj suprotnoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako su $a^p = (a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p)$ i $b^q = (b_1^q, b_2^q, \ldots, b_n^q)$ proporcionalne n-torke. □

Pomoću teorema 3.4 i nejednakosti trokuta[4] može se dokazati da za realne n-torke $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ te $p > 1$ takve da $1/p + 1/q = 1$ vrijedi

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{9}$$

Hermann Minkowski (1864.–1909.), njemački matematičar

Primijetimo da je Cauchyjeve nejednakosti (7) specijalni slučaj nejednakosti (9) za $p = q = 2$.
Na kraju pokažimo još kako pomoću Jensenove nejednakosti možemo dokazati i nejednakost Minkowskog.

Teorem 3.5. *(Nejednakost Minkowskog) Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dvije pozitivne n-torke. Tada za $p > 1$ vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{10}$$

a za $p < 1$ $(p \neq 0)$ vrijedi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako su a i b proporcionalne n-torke.

[4] Za svaka dva realna broja a i b vrijedi $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Dokaz. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(1 + x^{1/p}\right)^p$, gdje je $p \neq 0$ i njenu drugu derivaciju

$$f''(x) = -\frac{p-1}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2}.$$

Za $p > 1$ funkcija f je strogo konkavna, stoga možemo primijeniti suprotnu Jensenovu nejednakost pa imamo

$$\left(1 + \left(\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i \left(1 + x_i^{\frac{1}{p}}\right)^p,$$

odnosno

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{i=1}^{n} s_i \left(1 + x_i^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

Supstitucijom $x_i = a_i^p / b_i^p$ i $s_i = b_i^p$ za $i = 1, \ldots, n$ iz prethodne nejednakosti slijedi nejednakost (10). U slučaju $p < 1$ funkcija f je stogo konveksna pa pomoću Jensenove nejednakosti sličnim razmatranjem dobijemo suprotnu nejednakost u (10). Po napomeni 2.1 jednakost u oba slučaja vrijedi ako i samo ako su n-torke a i b proporcionalne. $\square$

Literatura

[1] S. Boyd, L. Vandenbergher, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] Z. Cvetkovski, *Inequalities Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, New York, 2012.

[3] I. Ilišević, *Jensenova nejednakost*, Osječki matematički list 5 (2005), 9–19.

[4] S. Kurepa, *Matematička analiza II*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[5] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993.

[6] J. E. Pečarić, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996.

[7] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, New York, 1992.