Osječki matematički list 16 (2016), 27-48

Vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$, normirane algebre i H–prostori

Matea Pavlek [*], Ozren Perše [†]

Sažetak

U ovom preglednom radu prezentiramo konstrukciju vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$, danu u radu P. F. McLoughlin, arXiv:1212.3515. Pokazujemo da vektorski produkt, definiran na prirodan način, postoji samo za $n = 0, 1, 3, 7$ (pritom s $\mathbb{R}^0$ označavamo nulprostor nad $\mathbb{R}$). Proučavamo vezu vektorskog produkta s Hurwitzovim teoremom o postojanju normiranih algebri samo za dimenzije $n = 1, 2, 4, 8$, te s Adamsovim teoremom o neprekidnim množenjima na sferi. Također, proučavamo mogućnosti generalizacije vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$, s funkcije dvije varijable na funkciju više varijabli.

Ključne riječi: *vektorski produkt, normirana algebra, H–prostor*

Cross product on $\mathbb{R}^n$, normed algebras and H–spaces

Abstract

[*] Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, email: mateapavlek@yahoo.com

[†] Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, email: perse@math.hr

Matea Pavlek , Ozren Perše

In this survey article, we present a construction of the cross product on $\mathbb{R}^n$, following the paper by P. F. McLoughlin, arXiv:1212.3515. We show that a naturally defined cross product exists only for $n = 0, 1, 3, 7$ (here $\mathbb{R}^0$ denotes the zero vector space over $\mathbb{R}$). We study the relationship between the cross product and Hurwitz's theorem on the existence of normed algebras only for dimensions $n = 1, 2, 4, 8$, and the relationship with Adams' theorem on continuous multiplications on spheres. Furthermore, we consider the possibilities of a generalization of the cross product on $\mathbb{R}^n$, from the function of two variables to the function of several variables.

Keywords: *cross product, normed algebra, H–space*

1 Uvod

Operacija vektorskog produkta na $\mathbb{R}^3$ vjerojatno je dobro poznata čitatelju. U ovom radu cilj je pokazati da li postoji, i ako da, kako izgleda vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$, za $n \neq 3$. Prije nego što odgovorimo na to pitanje, prisjetimo se osnovnih svojstava skalarnog i vektorskog produkta na $\mathbb{R}^3$. Označimo s

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

skalarni produkt, a s

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, e_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, e_3$$

vektorski produkt vektora $a = (a_1, a_2, a_3)$ i $b = (b_1, b_2, b_3)$ iz $\mathbb{R}^3$. Pritom je s $\{e_1, e_2, e_3\}$ označena kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Tada vrijedi:

(i) $a \cdot (a \times b) = 0$ i $b \cdot (a \times b) = 0$,

(ii) $(a \times b) \cdot (a \times b) + (a \cdot b)^2 = (a \cdot a)\,(b \cdot b)$,

(iii) $(\alpha a + \beta b) \times (\gamma c + \delta d) = \alpha\gamma(a \times c) + \alpha\delta(a \times d) + \beta\gamma(b \times c) + \beta\delta(b \times d)$,

za sve $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
Svojstvo (i) zovemo *okomitost vektorskog produkta*, a svojstvo (iii) *bilinearnost vektorskog produkta*. Primijetimo da svojstvo (ii) proizlazi iz:

$$a \cdot b = |a||b| \cos\theta$$

i

$$|a \times b| = |a||b| \sin\theta,$$

pri čemu je s θ označen kut između vektora a i b, i zbog toga nosi naziv *Pitagorino svojstvo*.
Napominjemo da vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$ zadovoljava i Jacobijev identitet:

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0,$$

za sve $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.
U ovom radu želimo poopćiti vektorski produkt, kao binarnu operaciju na $\mathbb{R}^n$, tako da zadrži svojstva (i), (ii) i (iii). Dakle, zanima nas kako definirati takvu funkciju, ako je to uopće moguće. Na $\mathbb{R}^3$, ona je definirana determinantom 3×3 matrice. Međutim, da li možemo proširiti vektorski produkt koristeći determinantu?

Pogledajmo kako bi izgledala naša determinanta u $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

Premda naprimjer, svojstvo okomitosti vrijedi, ovako definiran vektorski produkt nije binarna operacija, jer se pojavio i treći vektor u matrici. Budući da je determinanta funkcija nad kvadratnim matricama, ovaj problem je teško izbjeći na $\mathbb{R}^n$, za $n > 3$.
Ako bismo zahtijevali da vektorski produkt zadovoljava samo svojstva okomitosti i bilinearnosti, postojalo bi mnogo načina za definiciju takvog produkta. Na primjer, za $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ i $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, mogli bismo definirati $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1, 0)$. Tako definirani produkt na $\mathbb{R}^4$ zadovoljava svojstva okomitosti i bilinearnosti, i ta definicija bi se lako mogla poopćiti na $\mathbb{R}^n$. Međutim, tako definirani produkt ne bi zadovoljavao Pitagorino svojstvo.
Iako je možda iznenađujuće, vektorski produkt sa svojstvima okomitosti, bilinearnosti te Pitagorinim svojstvom, osim na $\mathbb{R}^3$, moguće je definirati na $\mathbb{R}^n$, samo za $n = 0$, 1 i 7. U ovom radu prezentiramo konstruktivni dokaz tog rezultata iz članka [5]. Dokaz je elementaran, odnosno koristi samo osnovno gradivo linearne algebre, pa je kao takav pristupačan široj publici. Ideja tog dokaza je pokazati da, ako za neki n postoji vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$, tada možemo naći ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ takvu da za $i \neq j$ postoji k za koji je $e_i \times e_j = ae_k$, gdje je $a = 1$ ili -1.
Zanimljivo je da je pojam vektorskog produkta povezan s kompliciranijim algebarskim strukturama kao što su normirane algebre, H–prostori, topološke (i Liejeve) grupe. U ovom radu prezentiramo konstrukciju normiranih algebri $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (kvaternioni) i $\mathbb{O}$ (oktonioni), pomoću Cayley-

Dicksonovog procesa udvajanja algebri. Korištenjem Hurwitzovog teorema, koji kaže da su to jedine (konačnodimenzionalne) normirane algebre nad $\mathbb{R}$, slijedeći [4], dajemo alternativni dokaz tvrdnje o postojanju vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$, samo za $n = 0, 1, 3$ i 7. Uspostavljamo direktnu vezu između množenja u tim algebrama i odgovarajućeg vektorskog produkta, odakle između ostalog slijedi, da je Jacobijev identitet za vektorski produkt povezan s asocijativnosti u pridruženoj algebri.
Normirane algebre i vektorski produkt su također prirodno povezani s neprekidnim množenjima na jediničnoj sferi S^n, odnosno sa strukturom H–prostora na S^n. Adamsov teorem, koji kaže da je sfera S^n H–prostor ako i samo ako je $n = 0, 1, 3$ i 7, nam omogućava da dokažemo teorem o egzistenciji vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$ samo za $n = 0, 1, 3$ i 7, uz nešto slabije pretpostavke (neprekidnost umjesto bilinearnosti).
Također, prirodno je postaviti pitanje o postojanju vektorskog produkta kao funkcije k varijabli, odnosno kao multilinearnog preslikavanja $(\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ $(1 \leq k \leq n)$, sa svojstvom okomitosti i prirodno poopćenim Pitagorinim svojstvom. U ovom radu, slijedeći [7], navodimo teorem o klasifikaciji takvih preslikavanja i konstruiramo ih u svakom od tih slučajeva: n paran i $k = 1$; n proizvoljan i $k = n - 1$; $n = 3$ ili 7 i $k = 2$; $n = 8$ i $k = 3$.

2 Vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$

Započnimo s definicijom skalarnog produkta na $\mathbb{R}^n$. Standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ je preslikavanje $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirano sljedećom formulom:

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \quad a = (a_1, a_2, ..., a_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n). \tag{1}$$

Za vektore $a, b \in \mathbb{R}^n$ kažemo da su okomiti ili ortogonalni, u oznaci $a \perp b$, ako je

$$a \cdot b = 0.$$

Standardna (euklidska) norma na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ je funkcija $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definirana s

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad a = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Za vektor $a \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je jedinični ili normiran ako je

$$\|a\| = 1,$$

odnosno ekvivalentno

$$a \cdot a = 1.$$

Svojstva vektorskog produkta na $\mathbb{R}^3$ navedena u Uvodu motiviraju sljedeću definiciju vektorskog produkta:

Definicija 2.1. Vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ je binarna operacija $\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ koja zadovoljava svojstva okomitosti, bilinearnosti te Pitagorino svojstvo:

(i) $a \cdot (a \times b) = 0$ i $b \cdot (a \times b) = 0$ (okomitost),

(ii) $(a \times b) \cdot (a \times b) + (a \cdot b)^2 = (a \cdot a)\,(b \cdot b)$ (Pitagorino svojstvo),

(iii) $(\alpha a + \beta b) \times (\gamma c + \delta d) = \alpha\gamma(a \times c) + \alpha\delta(a \times d) + \beta\gamma(b \times c) + \beta\delta(b \times d)$ (bilinearnost),

za sve $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Sljedeća svojstva slijede iz definicije vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$:

Lema 2.1. *Neka su a, b i c vektori iz $\mathbb{R}^n$. Ako vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ postoji, tada vrijede sljedeća svojstva:*

(1) $a \cdot (b \times c) = -b \cdot (a \times c)$,

(2) $a \times b = -b \times a$, *što povlači* $a \times a = 0$,

(3) $a \times (a \times b) = (a \cdot b)\,a - (a \cdot a)\,b$,

(4) $a \times (b \times c) = -((a \times b) \times c) + (c \cdot b)\,a + (a \cdot b)\,c - 2(a \cdot c)\,b$.

Dokaz leme 2.1 izostavljamo, zainteresirani čitatelj ga može naći u [6].

Korolar 2.1. *Neka su a, b i c ortogonalni jedinični vektori iz $\mathbb{R}^n$. Ako vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ postoji, tada mora imati sljedeća svojstva:*

(1) $a \times (a \times b) = -b$,

(2) $a \times (b \times c) = -((a \times b) \times c)$.

Dokaz. Koristeći lemu 2.1 dobivamo:

(1) $a \times (a \times b) = (a \cdot b)\,a - (a \cdot a)\,b = -b$.

(2) $a \times (b \times c) = -((a \times b) \times c) + (c \cdot b)\,a + (a \cdot b)\,c - 2(a \cdot c)\,b = -((a \times b) \times c)$.

U oba slučaja koristili smo ortogonalnost vektora, tj. $a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = 0$. □

Sada znamo osnovna svojstva vektorskog produkta kojeg tražimo. Sljedeći korak je konstrukcija tablice vektorskog množenja vektora ortonormirane baze za $\mathbb{R}^n$. U daljnjem tekstu, s u_i ćemo označavati jedinični vektor u $\mathbb{R}^n$. Uočimo da u $\mathbb{R}^3$ vrijedi $\{e_1, e_2, e_3\} = \{e_1, e_2, e_1 \times e_2\}$. Pogledajmo kako možemo poopćiti tu ideju. Definirajmo niz skupova S_k sa:

$$\begin{aligned} &S_0 = \{u_0\}, \\ &S_k = S_{k-1} \cup \{u_k\} \cup (S_{k-1} \times u_k), \text{ pri čemu je } u_k \perp S_{k-1}. \end{aligned}$$

Promotrimo skupove S_0, S_1, S_2 i S_3:
$S_0 = \{u_0\}$;
$S_1 = S_0 \cup \{u_1\} \cup (S_0 \times u_1) = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1\}$;
$S_2 = S_1 \cup \{u_2\} \cup (S_1 \times u_2) = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1, u_2, u_0 \times u_2, u_1 \times u_2, (u_0 \times u_1) \times u_2\}$;
$S_3 = S_2 \cup \{u_3\} \cup (S_2 \times u_3) = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1, u_2, u_0 \times u_2, u_1 \times u_2, (u_0 \times u_1) \times u_2, u_3, u_0 \times u_3, u_1 \times u_3, (u_0 \times u_1) \times u_3, u_2 \times u_3, (u_0 \times u_2) \times u_3, (u_1 \times u_2) \times u_3, ((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3\}$.
Primijetimo da S_1 konstrukcijski odgovara skupu $\{e_1, e_2, e_1 \times e_2\}$.
Definirajmo još i vektorski produkt skupova S_k sa

$$S_i \times S_j := \{u \times v \mid u \in S_i, v \in S_j\},$$

i skup

$$\pm S_i := S_i \cup (-S_i).$$

Sljedećim dvjema lemama ćemo pokazati da su skupovi S_n ortonormirani i zatvoreni s obzirom na vektorski produkt.

Lema 2.2. $S_1 = \{u_0, u_1, u_0 \times u_1\}$ *je ortonormirani skup. Nadalje,* $S_1 \times S_1 = \pm S_1$.

Dokaz. Ortogonalnost slijedi iz definicije vektorskog produkta i definicije skupa S_1:

$$\begin{aligned} u_0 \cdot (u_0 \times u_1) &= 0, \\ u_1 \cdot (u_0 \times u_1) &= 0, \\ u_0 \cdot u_1 &= 0; \end{aligned}$$

a normiranost iz definicije S_1 i svojstava (1), (2), (3) iz leme 2.1:

$$\begin{aligned} &u_0 \cdot u_0 = u_1 \cdot u_1 = 1, \\ &(u_0 \times u_1) \cdot (u_0 \times u_1) = u_0 \cdot (u_1 \times (u_0 \times u_1)) = u_0 \cdot u_0 = 1. \end{aligned}$$

Pokažimo još da je $S_1 \times S_1 = \pm S_1$. Po svojstvu (2) iz leme 2.1 i svojstvu (1) iz korolara 2.1 imamo:

$$u_1 \times (u_0 \times u_1) = u_0 \in \pm S_1,$$
$$u_0 \times (u_0 \times u_1) = -u_1 \in \pm S_1.$$

□

Lema 2.3. *S_k je ortonormirani skup. Nadalje, $S_k \times S_k = \pm S_k$ i $|S_k| = 2^{k+1} - 1$.*

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po k. Za $k = 1$, tvrdnja vrijedi po prethodnoj lemi. Pretpostavimo da je S_{k-1} ortonormirani skup, te da vrijedi da je $S_{k-1} \times S_{k-1} = \pm S_{k-1}$ i $|S_{k-1}| = 2^k - 1$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za S_k. Neka su $b_1, b_2 \in S_{k-1}$. Po definiciji, svaki element iz S_k je oblika b_1, u_k ili $b_1 \times u_k$. Iz svojstava (1) i (2) iz leme 2.1, te svojstva (1) iz korolara 2.1 slijedi:

$$b_1 \cdot (b_2 \times u_k) = u_k \cdot (b_1 \times b_2) = 0, \text{ zbog } u_k \perp S_{k-1} \text{ i } b_1 \times b_2 \in S_{k-1},$$

i

$$(b_1 \times u_k) \times (b_2 \times u_k) = u_k \cdot ((u_k \times b_1) \times b_2) = -u_k \cdot (u_k \times (b_1 \times b_2)) = 0,$$

pa zaključujemo da je S_k ortogonalan skup. Po pretpostavci indukcije, svi elementi iz S_{k-1} su normirani, u_k je normiran po definiciji, a po svojstvu (1) iz leme 2.1 i svojstvu (1) iz korolara 2.1, za $b_1 \times u_k$ vrijedi :

$$(b_1 \times u_k) \cdot (b_1 \times u_k) = b_1 \cdot (u_k \times (b_1 \times u_k)) = b_1 \cdot b_1 = 1.$$

Dakle, vrijedi da je i S_k normiran. Da bi pokazali da vrijedi $S_k \times S_k = \pm S_k$, sjetimo se da je $S_k = S_{k-1} \cup \{u_k\} \cup (S_{k-1} \times u_k)$ i $\pm S_k = S_k \cup (-S_k)$. Po pretpostavci indukcije $S_{k-1} \times S_{k-1}$ je $S_{k-1} \cup (-S_{k-1}) \subseteq \pm S_k$, po definiciji je $S_{k-1} \times u_k \subseteq \pm S_k$, a $u_k \times (b_1 \times u_k) = b_1 \in S_{k-1} \subseteq \pm S_k$. Još preostaje pokazati sljedeće:

$$b_1 \times (b_2 \times u_k) = -((b_1 \times b_2) \times u_k) \in \pm S_k \text{ i } b_1 \times (b_1 \times u_k) = -u_k \in \pm S_k,$$
$$(b_1 \times u_k) \times (b_2 \times u_k) = -b_1 \times (u_k \times (b_2 \times u_k)) = -b_1 \times b_2 \in \pm S_k.$$

Slijedi da je S_k ortonormirani skup, $S_k \times S_k = \pm S_k$ i $|S_k| = 2|S_{k-1}| + 1 = 2(2^k - 1) + 2 = 2^{k+1} - 1$. □

Lema 2.3 nam pokazuje kako konstruirati tablicu množenja za vektorski produkt. Dakle, zbog bilinearnosti, vektorski produkt je moguće definirati na $\mathbb{R}^n$, samo ako mu je S_k baza, za neki k. Sada je jasno da u tom slučaju vrijedi $n = |S_k|$, odnosno $n = 2^{k+1} - 1$.
Za $k = 1$, promatramo $\mathbb{R}^3$. Uz oznake $e_1 = u_0$, $e_2 = u_1$ i $e_3 = u_0 \times u_1$, dobivamo sljedeću tablicu množenja:

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Koristeći tu tablicu i bilinearnost, možemo izračunati vektorski produkt dvaju proizvoljnih vektora $a = (a_1, a_2, a_3)$ i $b = (b_1, b_2, b_3)$:

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, e_3,$$

što je standardni vektorski produkt na $\mathbb{R}^3$, proučavan u Uvodu.
Pogledajmo kako bi izgledala tablica za $k = 2$, uz odgovarajuću bazu $\{e_1, e_2, \ldots, e_7\}$ za $\mathbb{R}^7$. Uz pomoć leme 2.3, generiramo bazu:

$$\begin{aligned} &e_1 = u_0,\ e_2 = u_1,\ e_3 = u_0 \times u_1,\ e_4 = u_2,\\ &e_5 = u_0 \times u_2,\ e_6 = u_1 \times u_2,\ e_7 = (u_0 \times u_1) \times u_2, \end{aligned}$$

a zatim služeći se svojstvom (2) iz leme 2.1, te svojstvima (1) i (2) iz korolara 2.1 možemo izračunati sve elemente tablice vektorskog množenja:

$\times$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

Koristeći tablicu i bilinearnost vektorskog produkta, možemo izraziti eksplicitnu formulu za računanje vektorskog produkta u $\mathbb{R}^7$. Za vektore $a = (a_1, a_3, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ i $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$ njihov vektorski produkt jednak je:

$$\begin{aligned} a \times b = &\,(-a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_5 b_4 + a_4 b_5 - a_6 b_7 + a_7 b_6)\, e_1 + \\ &+ (-a_1 b_3 + a_3 b_1 - a_6 b_4 + a_4 b_6 - a_7 b_5 + a_5 b_7)\, e_2 + \\ &+ (-a_2 b_1 + a_1 b_2 - a_7 b_4 + a_4 b_7 - a_5 b_6 + a_6 b_5)\, e_3 + \\ &+ (-a_1 b_5 + a_5 b_1 - a_2 b_6 + a_6 b_2 - a_3 b_7 + a_7 b_3)\, e_4 + \\ &+ (-a_4 b_1 + a_1 b_4 - a_2 b_7 + a_7 b_2 - a_6 b_3 + a_3 b_6)\, e_5 + \\ &+ (-a_7 b_1 + a_1 b_7 - a_4 b_2 + a_2 b_4 - a_3 b_5 + a_5 b_3)\, e_6 + \\ &+ (-a_5 b_2 + a_2 b_5 - a_4 b_3 + a_3 b_4 - a_1 b_6 + a_6 b_1)\, e_7. \end{aligned} \tag{2}$$

Teorem 2.1. *Formulom* (2) *definiran je vektorski produkt na* $\mathbb{R}^7$*.*

Dokaz. Dokazuje se direktnom provjerom svojstava (i), (ii) i (iii) iz definicije 2.1. Preskačemo detalje dokaza zbog tehničke kompliciranosti. □

Napomena 2.1. Za razliku od vektorskog produkta na $\mathbb{R}^3$, vektorski produkt na $\mathbb{R}^7$ ne zadovoljava Jacobijev identitet, što se lako provjeri iz definicije. Obrazloženje tog fenomena u terminima normiranih algebri, dat ćemo u poglavlju 3.

Do sada smo pokazali da, ako vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ postoji, tada je $n = 2^{k+1} - 1$ i lema 2.3 nam govori kako konstruirati tablicu množenja za računanje vektorskog produkta. Sljedeće dvije leme će nam pokazati kako za $k > 2$, ne možemo definirati vektorski produkt, a da isti zadrži sva svojstva iz definicije.

Lema 2.4. *Neka su* $u = u_0 \times u_1 + u_1 \times u_3$ *i* $v = u_1 \times u_2 - ((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3$*. Tada je* $u \times v = 0$ *i* $u \perp v$*.*

Dokaz. Koristimo svojstvo (2) iz leme 2.1, te svojstva (1) i (2) iz korolara 2.1:

$$\begin{aligned}
u \times v &= (u_0 \times u_1 + u_1 \times u_3) \times (u_1 \times u_2 - ((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3) \\
&= (u_0 \times u_1) \times (u_1 \times u_2) - (u_0 \times u_1) \times (((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3) + \\
&\quad + (u_1 \times u_3) \times (u_1 \times u_2) - (u_1 \times u_3) \times (((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3) \\
&= u_0 \times u_2 - u_2 \times u_3 - u_3 \times u_2 - u_0 \times u_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Za drugi dio tvrdnje, uočimo da su $u_0 \times u_1, u_1 \times u_3, u_1 \times u_2$ i $((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3$ redom elementi od S_k, za $k > 2$, a po lemi 2.3 znamo da su onda međusobno ortogonalni. □

Lema 2.5. *Neka su* $u = u_0 \times u_1 + u_1 \times u_3$ *i* $v = u_1 \times u_2 - ((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3$*. Tada je* $(u \cdot u)(v \cdot v) \neq (u \times v) \cdot (u \times v) + (u \cdot v)^2$*.*

Dokaz. Vektori $u_0 \times u_1, u_1 \times u_3, u_1 \times u_2$ i $((u_0 \times u_1) \times u_2) \times u_3$ su elementi od S_k, za $k > 2$, pa su i ortonormirani i vrijedi $u \cdot u = v \cdot v = 2$, $u \cdot v = 0$, a iz prethodne leme vrijedi $u \times v = 0$, što povlači $(u \cdot u)(v \cdot v) = 4 \neq 0 = (u \times v) \cdot (u \times v) + (u \cdot v)^2$. □

Sada možemo dokazati sljedeći teorem, koji je jedan od glavnih rezultata ovog rada.

Teorem 2.2. *Vektorski produkt na* $\mathbb{R}^n$ *postoji, ako i samo ako je* $n = 0, 1, 3$ *ili* 7*. Nadalje, za* $\mathbb{R}^3$ *i* $\mathbb{R}^7$ *postoje ortonormirane baze* S_1 *i* S_2*, takve da vrijedi* $S_i \times S_i = \pm S_i, i = 1, 2$*.*

Dokaz. Po lemi 2.3, vidimo da vektorski produkt postoji samo za $n = 2^{k+1} - 1$. Dalje, leme 2.4 i 2.5 nam kazuju da ako definiramo vektorski produkt na $\mathbb{R}^{2^{k+1}-1}$, Pitagorino svojstvo ne vrijedi za $k > 2$. Slijedi da vektorski produkt sa svojstvima okomitosti, bilinearnosti i Pitagorinim svojstvom može postojati samo na $\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^7$. U teoremu 2.1 je dokazana egzistencija vektorskog produkta na $\mathbb{R}^7$. Nadalje, trivijalno preslikavanje (koje preslikava sve parove vektora u nulvektor) definira vektorski produkt na $\mathbb{R}^0$ i $\mathbb{R}^1$. Konstrukcija vektorskog produkta na $\mathbb{R}^3$ dana je u Uvodu. Na kraju, lema 2.3 nam govori kako generirati ortonormirane baze S_1 i S_2 za $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^7$, takve da vrijedi $S_i \times S_i = \pm S_i, i = 1, 2$. □

3 Normirane algebre i vektorski produkt

U prvom dijelu ovog poglavlja prezentiramo Cayley-Dicksonov proces udvajanja algebri. Konkretno, pokazat ćemo kako generirati niz algebri tako da svaka sljedeća ima dvostruko veću dimenziju od prethodne. Navodimo Hurwitzov teorem koji daje odgovor na pitanje koje su od tako konstruiranih algebri normirane.
U ovom radu se bavimo isključivo algebrama nad poljem realnih brojeva:

Definicija 3.1. Za vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{R}$, kažemo da je algebra, ako je na njemu definirana binarna operacija $\cdot : A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$, koja je bilinearna tj. vrijedi:

1. $(\alpha a + \beta b)c = \alpha(ac) + \beta(bc)$, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in A$;

2. $a(\beta b + \gamma c) = \beta(ab) + \gamma(ac)$, za sve $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a, b, c \in A$.

Ovako definiran pojam bilinearnosti je očito ekvivalentan bilinearnosti iz definicije 2.1, a binarnu operaciju zovemo množenje u algebri A. Općenito, množenje ne mora biti asocijativna niti komutativna operacija na A. Ako množenje zadovoljava svojstvo asocijativnosti (komutativnosti), za A ćemo reći da je *asocijativna (komutativna) algebra*.
Kažemo da je A *unitalna* ili *algebra s jedinicom*, ako postoji element $1 \in A$ takav da je

$$1a = a1 = a, \text{ za svaki } a \in A.$$

Ako je A unitalna algebra, i za svaki $a \in A$, $a \neq 0$, postoji $a^{-1} \in A$, takav da vrijedi

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$$

tada je A *algebra s dijeljenjem*. Element a^{-1} zovemo inverz od a.
Konačnodimenzionalna algebra na kojoj postoji skalarni produkt je *normirana algebra*, ako vrijedi

$$\|ab\| = \|a\| \, \|b\|, \text{ za sve } a, b \in A.$$

U normiranoj algebri A, za svaki element $a \in A$, $a \neq 0$, preslikavanja $x \mapsto \frac{ax}{\|a\|}$ i $x \mapsto \frac{xa}{\|a\|}$ su izometrije, stoga i bijekcije, budući da je A konačnodimenzionalna algebra. Tada za svaki $b \in A$, jednadžbe $ax = b$ i $xa = b$ imaju jedinstveno rješenje u A, odnosno a ima inverz u A. Slijedi da je svaka normirana algebra ujedno i algebra s dijeljenjem.
Konjugacija na A je linearni operator $a \mapsto \overline{a}$ koji je involucija, tj. za svaki $a \in A$ je $\overline{\overline{a}} = a$, i za koji vrijedi:

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}, \text{ za sve } a, b \in A. \tag{3}$$

Pogledajmo sada kako, krenuvši od n-dimenzionalne algebre, Cayley-Dicksonovim procesom konstruiramo novu algebru dimenzije $2n$. Neka je A_0 algebra konačne dimenzije n, i neka je na A_0 definirana konjugacija. Označimo s A_1 direktnu sumu algebre A_0 i nje same:

$$A_1 = A_0 \oplus A_0.$$

Elementi vektorskog prostora A_1 su oblika (a, b), pri čemu su $a, b \in A_0$, i dimenzija od A_1 jednaka je $2n$. Definiramo množenje elemenata iz A_1 sa:

$$(a,\, b)\,(u,\, v) = (au - \overline{v}b,\, b\overline{u} + va). \tag{4}$$

Korištenjem bilinearnosti množenja na A_0 i linearnosti konjugacije na A_0, lagano se pokazuje da je tako definirana operacija bilinearna. Zaključujemo da je A_1 algebra dimenzije $2n$ i zvat ćemo ju *udvostručenje algebre* A_0. Budući da je preslikavanje s $A_0 \mapsto A_1$ zadano s $x \mapsto (x,\, 0)$ monomorfizam algebri, vidimo da elemente $a \in A_0$, možemo identificirati s $(a,\, 0)$. Ako je A_0 algebra s jedinicom 1, tada je $(1,\, 0)$ jedinica u A_1. Stavimo li $e = (0,\, 1)$, tada vrijedi $be = (0,\, b)$, za svaki $b \in A_0$, i elemente iz A_1 možemo zapisati kao:

$$(a,\, b) = a + be. \tag{5}$$

Relacijom (5) i relacijama

$$a(be) = (ba)e, \qquad (ae)b = (a\overline{b})e, \qquad (ae)\,(be) = -\overline{b}a, \tag{6}$$

te uz distributivnost, potpuno je određeno množenje (4) na A_1.

Za $a = (1, 0)$, iz $(ae)b = (a\overline{b})e$, dobijemo $eb = \overline{b}e$, za svaki $b \in A_1$. Slijedi da, čak i ako je množenje u A_0 komutativno, na A_1 komutativnost neće vrijediti ako konjugacija u A_0 nije identiteta. Primijetimo da zbog $a(be) = (ba)e$, asocijativnost množenja u A_1 općenito ne vrijedi ako množenje u A_0 nije komutativno.
Kako bismo nastavili konstruirati niz algebri, na algebri A_1 moramo definirati konjugaciju, da bi na udvostručenju od A_1 mogli definirati množenje. Za $(a, b) = a + be \in A_1$ definiramo konjugaciju na sljedeći način:

$$\overline{a + be} = \overline{a} - be. \tag{7}$$

Ovako definiran operator je očito linearna involucija koja zadovoljava (3). Dakle, udvostručenje algebre s konjugacijom je opet algebra s konjugacijom, te se Cayley-Dicksonov proces može nastaviti.

Ako je na unitalnoj algebri A_0 definirana konjugacija sa svojstvima:

1. $a\overline{a} \in \mathbb{R} \cdot 1, \forall a \in A_0$,
2. $a\overline{a} \geq 0, \forall a \in A_0$,
3. $a\overline{a} = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

tada je s

$$\|a\| = \sqrt{a\overline{a}} \tag{8}$$

definirana norma na A_0, i A_0 zovemo *metrička algebra*. Provjerom svojstava skalarnog produkta može se pokazati da je sa

$$a \cdot b = \frac{a\,\overline{b} + b\,\overline{a}}{2}$$

definiran skalarni produkt na A_0. Dakle, u svakoj metričkoj algebri postoji skalarni produkt. Za $(a, b) \in A_1$ vrijedi

$$(a + be)\,\overline{(a + be)} = (a + be)\,(\overline{a} - be) = a\overline{a} - a(be) + (be)\overline{a} - (be)\,(be) = a\overline{a} + \overline{b}b,$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti iskoristili relacije (6). Slijedi da, ako je A_0 metrička algebra, tada je A_1 metrička algebra. Ako na A_0 postoji skalarni produkt, tada je skalarni produkt na A_1 dan s:

$$(a,\, b) \cdot (u,\, v) = a \cdot u + b \cdot v. \tag{9}$$

Budući da kompleksne brojeve prikazujemo kao uređene parove realnih brojeva, sada možemo pokazati kako konstruirati algebru kompleksnih brojeva, udvostručenjem algebre realnih brojeva, pri čemu za konjugaciju na $\mathbb{R}$ uzimamo identitetu. Tada je $\mathbb{R}$ očito metrička algebra.

Uzmimo da je $A_0 = \mathbb{R}$. Sada je

$$A_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}.$$

U $\mathbb{C}$ definiramo množenje sa (4). Budući da je u $\mathbb{R}$ konjugacija identiteta, množenje u $\mathbb{C}$ je komutativno i vrijedi:

$$(a_0,\, a_1)\,(b_0,\, b_1) = (a_0 b_0 - a_1 b_1,\, a_1 b_0 + b_1 a_0),\ (a_0,\, a_1), (b_0,\, b_1) \in \mathbb{C}.$$

Zbog komutativnosti množenja u $\mathbb{R}$, slijedi da je množenje u $\mathbb{C}$ asocijativno. Jedinica na $\mathbb{C}$ je $(1,\, 0)$, a element $e = (0,\, 1)$, pa iz (5) znamo da vrijedi $(a_0,\, a_1) = a_0 + a_1 e$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Lako vidimo da je

$$e^2 = -1.$$

Na $\mathbb{R}$ je skalarni produkt množenje elemenata iz $\mathbb{R}$, pa je skalarni produkt na $\mathbb{C}$ definiran s (9):

$$(a_0,\, a_1) \cdot (b_0,\, b_1) = a_0 b_0 + a_1 b_1.$$

Iz (7) vidimo da je konjugacija u $\mathbb{C}$ dana sa

$$\overline{a_0 + a_1 e} = a_0 - a_1 e,$$

a norma sa

$$|a_0 + a_1 e| = \sqrt{(a_0 + a_1 e)\,\overline{(a_0 - a_1 e)}} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2},$$

te vrijedi

$$\begin{aligned}
|(a_0 + a_1 e)\,(b_0 + b_1 e)| &= |(a_0 b_0 - b_1 a_1) + (a_1 b_0 + b_1 a_0) e| \\
&= (a_0 b_0 - b_1 a_1)^2 + (a_1 b_0 + b_1 a_0)^2 \\
&= (a_0 b_0)^2 + (b_1 a_1)^2 + (a_1 b_0)^2 + (b_1 a_0)^2 \\
&= |(a_0 + a_1 e)||(b_0 + b_1 e)|,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $\mathbb{C}$ normirana algebra, pa je ujedno i algebra s dijeljenjem. Iz

$$(a_0,\, a_1)\,\overline{(a_0,\, a_1)} = |(a_0,\, a_1)|^2$$

slijedi

$$(a_0,\, a_1)\,\frac{\overline{(a_0, a_1)}}{|(a_0, a_1)|^2} = (1,\, 0),$$

čime je definiran inverzni element za svaki $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}$ različit od 0. Cayley-Dicksonovim udvajanjem algebre $\mathbb{R}$ konstruirali smo normiranu, asocijativnu, komutativnu algebru kompleksnih brojeva, te uz $e = (0, 1) = i$, imamo standardni zapis kompleksnog broja $z = a_0 + a_1 i = (a_0, a_1) \in \mathbb{C}$. Sljedeći korak u Cayley-Dicksonovom procesu je udvajanje algebre kompleksnih brojeva. Sada imamo

$$A_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{H}.$$

Udvostručenje algebre kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbb{H}$. Elementi od $\mathbb{H}$ predstavljaju uređene parove kompleksnih brojeva, te ih nazivamo kvaternioni. Za dva kvaterniona (z_1, z_2) i (w_1, w_2), $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, množenje ponovo definiramo relacijom (4):

$$(z_1, z_2)(w_1, w_2) = (z_1 w_1 - \overline{w_2} z_2, z_2 \overline{w_1} + w_2 z_1).$$

Jedinica u $\mathbb{H}$ je kvaternion $(1, 0)$, a vektor $e = (0, 1)$, pri čemu je 1 jedinica u $\mathbb{C}$. Iz $\mathbb{H} \ni q = (z_1, z_2) = z_1 + z_2 e$ i $z_1 = a_0 + a_1 i, z_2 = a_2 + a_3 i$, slijedi da je $q = a_0 + a_1 i + a_2 e + a_3 ie$. Uz oznake

$$e = j, \qquad ie = k.$$

kvaternione možemo zapisivati kao uređene četvorke realnih brojeva, i vrijedi:

$$q = (a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Skup $\{(1, 0, 0, 0), i = (0, 1, 0, 0), j = (0, 0, 1, 0), k = (0, 0, 0, 1)\}$ predstavlja bazu za $\mathbb{H}$, te je uz relaciju

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

i bilinearnost, potpuno određeno množenje kvaterniona. Prethodnu relaciju možemo prikazati sljedećom tablicom množenja:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Primijetimo da množenje u $\mathbb{H}$ nije komutativno, jer na $\mathbb{C}$ konjugacija nije identiteta. Asocijativnost množenja na $\mathbb{H}$ i dalje vrijedi, budući da je na $\mathbb{C}$ operacija množenja komutativna.
Po relaciji (9) znamo da skalarni produkt na $\mathbb{H}$ postoji, te za kvaternione $q = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ i $p = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ vrijedi:

$$q \cdot p = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Konjugaciju kvaterniona definiramo relacijom (7):

$$\begin{aligned}\overline{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k} &= \overline{((a_0,\, a_1)\,(a_2,\, a_3))}\\ &= (\overline{(a_0,\, a_1)}, -(a_2,\, a_3))\\ &= (a_0,\, -a_1,\, -a_2,\, -a_3)\\ &= a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k,\end{aligned}$$

a potom i normu s (8):

$$\begin{aligned}\|a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\| &= \sqrt{(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)\,\overline{(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)}}\\ &= \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\end{aligned}$$

Također vrijedi $\|qp\| = \|q\|\,\|p\|$ za sve $q, p \in \mathbb{H}$ i $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ za $q \neq 0$. Dakle, udvostručenjem kompleksnih brojeva konstruirali smo algebru kvaterniona $\mathbb{H}$, koja je kao i $\mathbb{C}$, asocijativna normirana algebra s dijeljenjem. Međutim, na $\mathbb{H}$ više ne vrijedi svojstvo komutativnosti.
U sljedećem koraku Cayley-Dicksonovog procesa, odnosno udvajanjem algebre $\mathbb{H}$, konstruiramo algebru oktoniona $\mathbb{O}$, dimenzije 8. Oktonioni su uređeni parovi kvaterniona, odnosno uređene osmorke realnih brojeva; $y = (a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5,\, a_6,\, a_7) = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7 \in \mathbb{O}$, pri čemu e_i predstavljaju elemente baze algebre $\mathbb{O}$. Posebno, oktonion e_0 je jedinica u $\mathbb{O}$. Analogno prvom i drugom koraku u procesu, relacijama (4) i (9) definiramo množenje i skalarni produkt oktoniona. Množenje je, zbog svojstva bilinearnosti, jedinstveno određeno sljedećom tablicom množenja elemenata baze:

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$

Po (7) vrijedi da je konjugacija oktoniona $y = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7$ definirana s:

$$\overline{y} = a_0 e_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_4 - a_5 e_5 - a_6 e_6 - a_7 e_7,$$

a budući da je i algebra $\mathbb{O}$ metrička, ponovo je sa

$$\|y\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2},$$

definirana norma. Također, norma umnoška oktoniona je jednaka umnošku njihovih normi, stoga je $\mathbb{O}$ normirana algebra s dijeljenjem. Algebra $\mathbb{O}$ nije komutativna, a budući da $\mathbb{H}$ nije komutativna, slijedi da $\mathbb{O}$ nije niti asocijativna.
Dakle, počevši od normirane algebre realnih brojeva, Cayley-Dicksonovim procesom udvajanja algebri konstruirali smo algebre $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$, koje su također normirane. Adolf Hurwitz [3] je dokazao da su $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ ujedno i jedine normirane realne algebre.

Teorem 3.1. **(Hurwitz)** *Neka je A normirana algebra. Tada je $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ili $\mathbb{O}$.*

Hurwitzov teorem navodimo bez dokaza. Iako se na prvi pogled ne čini, postoji čvrsta veza između Hurwitzovog teorema i vektorskog produkta. Do sada nam je već poznato da vektorski produkt postoji samo na $\mathbb{R}^0$, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^7$. Sada dajemo alternativni dokaz teorema 2.2 pomoću Hurwitzovog teorema. Preciznije, dokazujemo sljedeći teorem:

Teorem 3.2. *Ako postoji vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$, tada je $n = 0, 1, 3$ ili 7.*

Dokaz. Ideja dokaza je pokazati da postojanje vektorskog produkta na $\mathbb{R}^n$ implicira postojanje bilinearne operacije sa posebnim svojstvima na $\mathbb{R}^{n+1}$. U tu svrhu, $\mathbb{R}^{n+1}$ gledamo kao direktnu sumu $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n.$$

Dakle, element iz $\mathbb{R}^{n+1}$ možemo gledati kao uređeni par $(a,\ b)$ pri čemu je $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da na $\mathbb{R}^n$ postoji vektorski produkt sa svojstvima okomitosti, bilinearnosti te Pitagorinim svojstvom. Definiramo binarnu operaciju na $\mathbb{R}^{n+1}$ s:

$$(a,\ b)\,(c,\ d) = (ac - b \cdot d,\ ad + cb + b \times d). \tag{10}$$

Množenje definirano sa (10) je bilinearno, i (1,0) je jedinica. Koristeći Pitagorino svojstvo i okomitost vektorskog produkta, lako se pokaže da vrijedi

$$\|(a,\ b)\,(c,\ d)\| = \|(a,\ b)\|\,\|(c,\ d)\|. \tag{11}$$

Sada na $\mathbb{R}^{n+1}$ imamo definiranu bilinearnu operaciju s jedinicom, te vrijedi jednakost (11), pa je $\mathbb{R}^{n+1}$ normirana algebra, a po Hurwitzovom teoremu je $n + 1 = 1, 2, 4$ ili 8. Slijedi da ako vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ postoji, tada je $n = 0, 1, 3$ ili 7. □

Primijetimo da, ako uvrstimo $a = c = 0$ u relaciju (10), dobijemo

$$(0,\, b)\,(0,\, d) = (-b \cdot d,\, b \times d). \tag{12}$$

Ako promatramo $\mathbb{R}^n$ kao potprostor od $\mathbb{R}^{n+1}$, uz identifikaciju $x \leftrightarrow (0,\, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, te sa $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ označimo projekciju

$$P(a, x) = x,\; a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,$$

tada relaciju (12) možemo zapisati kao

$$b \times d = P((0,\, b)\,(0,\, d)).$$

Dakle, vektorski produkt na $\mathbb{R}^n$ $(n = 0, 1, 3, 7)$, možemo dobiti množenjem „čisto imaginarnih" elemenata iz $\mathbb{R}^{n+1}$, i odgovarajućom projekcijom na „imaginarni dio". Na primjer, promotrimo umnožak dva „čisto imaginarna" kvaterniona: $q_1 = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ i $q_2 = b_1 i + b_2 j + b_3 k$:

$$\begin{aligned}
&q_1 q_2 = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\,(b_1 i + b_2 j + b_3 k)\\
&= a_1 b_1 i^2 + a_1 b_2 ij + a_1 b_3 ik + a_2 b_1 ji + a_2 b_2 j^2 + a_2 b_3 jk + a_3 b_1 ki + a_3 b_2 kj + a_3 b_3 k^2\\
&= -a_1 b_1 + a_1 b_2 k - a_1 b_3 j - a_2 b_1 k - a_2 b_2 + a_2 b_3 i + a_3 b_1 j - a_3 b_2 i - a_3 b_3\\
&= -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k.
\end{aligned}$$

Sada vidimo da vektorski produkt vektora (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) iz $\mathbb{R}^3$ odgovara „imaginarnom dijelu" umnoška kvaterniona. Analogno, množenjem „čisto imaginarnih" oktoniona, dobije se vektorski produkt na $\mathbb{R}^7$.

Napomena 3.1. Uz takvu identifikaciju pokazuje se da za n=3,7 i $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = -\frac{3}{2}((ab)c - a(bc)),$$

pri čemu je s desne strane operacija množenja u $\mathbb{H}$, odnosno $\mathbb{O}$. Budući da u algebri $\mathbb{O}$ množenje nije asocijativno, vektorski produkt na $\mathbb{R}^7$ ne zadovoljava Jacobijev identitet.

Do sada smo pokazali da vektorski produkt koji je bilinearan, te zadovoljava svojstvo okomitosti i Pitagorino svojstvo, postoji na $\mathbb{R}^n$, samo za $n = 0, 1, 3, 7$. U sljedećem poglavlju pokazujemo da, ako umjesto Pitagorinog svojstva i bilinearnosti, želimo definirati vektorski produkt koji uz okomitost zadovoljava neke „slabije" uvjete, rezultat i dalje ostaje isti.

4 Vektorski produkt i H–prostori

Skup svih jediničnih vektora u (n+1)-dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ zovemo n-dimenzionalna (jedinična) sfera, i označavamo sa S^n:

$$S^n = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} : \|a\| = 1\}.$$

Pokazali smo da su $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ normirane algebre, koje su kao realni normirani prostori izomorfni $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^8$, redom. Odatle slijedi da množenja na tim algebrama induciraju neprekidna množenja na S^0, S^1, S^3, S^7.

Definicija 4.1. Za topološki prostor X kažemo da je H–prostor (Hopfov prostor) ako je na X definirano neprekidno množenje koje ima dvostranu jedinicu.

Dakle, S^0, S^1, S^3 i S^7 su H–prostori. Frank Adams [1] je dokazao da je S^n H–prostor samo u tim slučajevima.

Teorem 4.1. (Adams) *S^n je H–prostor ako i samo ako je $n = 0, 1, 3, 7$.*

Napomena 4.1. Topološka grupa G je topološki prostor s neprekidnim množenjem, takvim da je G grupa uz to množenje, te da je preslikavanje $x \mapsto x^{-1}$, $x \in G$, također neprekidno. Očito je svaka topološka grupa ujedno i H–prostor, ali obrat općenito ne vrijedi.

Adams je dokazao i da je S^n topološka grupa ako i samo ako je $n = 0, 1, 3$. Štoviše, S^0, S^1, S^3 su i Liejeve grupe (zainteresirani čitatelj može za detalje konzultirati npr. [8]). Primijetimo da S^7 nije topološka grupa uz množenje inducirano množenjem oktoniona, zato što to množenje nije asocijativno.

Pomoću Adamsovog teorema možemo dokazati sljedeće:

Teorem 4.2. *Neka je $n \geq 3$. Ako na $\mathbb{R}^n$ postoji vektorski produkt, takav da za sve $a, b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:*

1. *$a \times b$ je neprekidna funkcija uređenog para (a, b),*
2. *$(a \times b) \cdot a = 0$ i $(a \times b) \cdot b = 0$,*
3. *ako su a i b linearno nezavisni, tada je $a \times b \neq 0$,*

tada je $n = 3$ ili 7.

Dokaz. Za $a, b \in \mathbb{R}^n$ definiramo funkciju

$$P(a, b) = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2}.$$

Tada je $P(a,b)$ jednaka površini paralelograma kojega razapinju vektori a i b, i očito je neprekidna funkcija. Sada pomoću funkcije P, definiramo funkciju $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s:

$$f(a,b) = \begin{cases} \frac{P(a,b)\,(a\times b)}{\|a\times b\|} & a \times b \neq 0, \\ 0 & a \times b = 0. \end{cases}$$

Lagano se pokazuje da je tako definirana funkcija neprekidna. Funkcija f zadovoljava sljedeća svojstva:

1. $f(a,b) \cdot a = f(a,b) \cdot b = 0$,

2. $\|f(a,b)\|^2 = P(a,b)^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2$.

Ponovo, gledamo na $\mathbb{R}^{n+1}$ kao $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$, i definiramo funkciju $\mu : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ s:

$$\mu\big((a,b),(c,d)\big) = (ac - b \cdot d, ad + bc + f(b,d)).$$

Funkcija μ je također neprekidna, a $(1,0)$ je jedinica za μ odnosno vrijedi:

$$\mu\big((1,0),(a,b)\big) = \mu\big((a,b),(1,0)\big) = (a,b).$$

Za μ vrijedi i analogon jednakosti (11):

$$\|\mu(x,y)\|^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2, \; \forall x,y \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{13}$$

Za $x,y \in S^n$, po (13) vidimo, da je tada i $\mu(x,y) \in S^n$, pa slijedi da je μ neprekidna operacija množenja sa jedinicom na S^n. Dakle, S^n je H–prostor, pa iz Adamsovog teorema slijedi da je $n = 3$ ili 7. $\square$

5 Vektorski produkt kao multilinearna funkcija

U posljednjem poglavlju ovog rada želimo pokazati što se dogodi ako vektorski produkt definiramo kao multilinearno preslikavanje umjesto bilinearnog, te prilagodimo Pitagorino svojstvo. Prije nego što definiramo vektorski produkt kao multilinearano preslikavanje, primijetimo da Pitagorino svojstvo možemo zapisati na sljedeći način:

$$(u \times v) \cdot (u \times v) = (u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} = \Gamma(u,v),$$

gdje $\Gamma(u,v)$ predstavlja Grammovu determinantu. Općenito, za $u_1,\ldots,u_k$ iz unitarnog prostora $\mathbb{R}^n$, Grammova determinanta $\Gamma(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ predstavlja determinantu Grammove matrice $G(u_1,u_2,\ldots,u_k)$:

$$G(u_1,u_2,\ldots,u_k)=\begin{bmatrix} u_1\cdot u_1 & u_1\cdot u_2 & \cdots & u_1\cdot u_k \\ u_2\cdot u_1 & u_2\cdot u_2 & \cdots & u_2\cdot u_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_k\cdot u_1 & u_k\cdot u_2 & \cdots & u_k\cdot u_k \end{bmatrix}.$$

Definicija 5.1. Vektorski produkt je multilinearno preslikavanje $X:(\mathbb{R}^n)^k\to\mathbb{R}^n$ $(1\leq k\leq n)$ koje zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) $X(u_1,u_2,\ldots,u_k)\cdot u_i=0$, za svaki $i=1,\ldots,k$,

(ii) $X(u_1,u_2,\ldots,u_k)\cdot X(u_1,u_2,\ldots,u_k)=\Gamma(u_1,\ldots,u_k)$,

za sve $u_1,u_2,\ldots,u_k\in\mathbb{R}^n$.

Pritom pod multilinearnim preslikavanjem podrazumijevamo preslikavanje

$$X:(\mathbb{R}^n)^k\to\mathbb{R}^n,$$

takvo da vrijedi

$$X(u_1,\ldots,\alpha u_i+\beta u_i',\ldots,u_k)=\alpha X(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_k)+\beta X(u_1,\ldots,u_i',\ldots,u_k),$$

za sve $u_1,\ldots u_k,u_i'\in\mathbb{R}^n$, za sve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, i za sve i=1,…,k. Dakle, to je preslikavanje koje je linearno u svakoj od k varijabli, i taj pojam je prirodna generalizacija već spomenutog pojma bilinearnosti. U sljedećim primjerima vidjeti ćemo za koje k i n postoji gore navedeni vektorski produkt:

$\underline{k=1.}$ U ovom slučaju, iz definicije 5.1, vidimo da je vektorski produkt X preslikavanje sa $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, koje je izometrija, budući da po svojstvu (ii) vrijedi:

$$X(u)\cdot X(u)=u\cdot u,\ \text{za sve } u\in\mathbb{R}^n.$$

Također, $X(u)$ je okomit na u, za svaki $u\in\mathbb{R}^n$, pa je adjungirani operator od X jednak $X^*=-X$, tj., za svaki $u,v\in\mathbb{R}^n$ vrijedi:

$$X(u)\cdot v=u\cdot X^*(v)=-u\cdot X(v).$$

Stoga vrijedi:

$$X^2(u)=-X(X^*(u))=-u,\ \text{za sve } u\in\mathbb{R}^n. \tag{14}$$

Preslikavanja sa svojstvom (14), nazivaju se kompleksne strukture na V. Općenito vrijedi da, ako na vektorskom prostoru V postoji preslikavanje koje je kompleksna struktura, tada je dimenzija od V paran broj. Dakle, u slučaju kada je $k = 1$, vektorski produkt će postojati na $\mathbb{R}^n$, samo ako je n paran broj.

$\underline{k = n-1.}$ Neka je skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{R}^n$. Multilinearno preslikavanje sa $(\mathbb{R}^n)^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ definirano s

$$(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \mapsto \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ u_{1_1} & u_{1_2} & \cdots & u_{1_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{n-1_1} & u_{n-1_2} & \cdots & u_{n-1_n} \end{vmatrix}$$

zadovoljava svojstva iz definicije 5.1. To je upravo slučaj iz Uvoda, spomenut kod ideja o proširivanju vektorskog produkta, međutim koji smo tada odbacili budući da se ne radi o binarnoj operaciji. Naime, za ovako definiran vektorski produkt svojstvo (i) vrijedi, budući da je determinanta matrice koja ima dva jednaka retka jednaka nula, a svojstvo (ii) se lagano provjerava. Primijetimo da za $k = 2$ i $n = 3$, gornja konstrukcija vektorskog produkta odgovara standardnom vektorskom produktu na $\mathbb{R}^3$.

$\underline{k = 3, n = 8.}$ Pretpostavimo da je $X : \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ vektorski produkt, te neka je $e \in \mathbb{R}^8$, takav da je $e \cdot e \neq 0$. Promotrimo bilinearno množenje te funkciju q dane sa:

$$uv = \frac{1}{e \cdot e}(X(u,e,v) + (u \cdot e)\, v + (v \cdot e)\, u - (u \cdot v)\, e),$$

$$q(u) = \frac{u \cdot u}{e \cdot e},$$

za svaki $u, v \in \mathbb{R}^8$. Tada je $eu = ue = u$, za svaki u, iz čega slijedi da je e jedinica za gornje definirano množenje, te također iz svojstva (ii) definicije vektorskog produkta slijedi da je $q(uv) = q(u)q(v)$. Nadalje, može se pokazati da vrijedi jedna od sljedeće dvije formule:

$$X(u,v,w) = (e \cdot e)(u\overline{v})w - (u \cdot v)w - (v \cdot w)u + (u \cdot w)v$$

ili

$$X(u,v,w) = (e \cdot e)u(\overline{v}w) - (u \cdot v)w - (v \cdot w)u + (u \cdot w)v,$$

pri čemu $x \mapsto \overline{x}$ označava standarnu konjugaciju na normiranoj algebri $\mathbb{O}$, identificiranoj s $\mathbb{R}^8$, čime su dane dvije formule za vektorski produkt na $\mathbb{R}^8$.

Za kraj, iskažimo teorem iz [2] kojim formalno iskazujemo odgovor na pitanje o egzistenciji vektorskog produkta iz definicije 5.1.

Teorem 5.1. *Vektorski produkt* $X : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ *postoji samo u sljedećim slučajevima:*

1. n *je paran,* $k = 1$*;*
2. n *je proizvoljan,* $k = n - 1$*;*
3. $n = 3, 7$, $k = 2$*;*
4. $n = 8$, $k = 3$.

Literatura

[1] J. F. Adams, *On the non existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math., 72 (1960), 20–104.

[2] R. B. Brown, A. Gray, *Vector cross products*, Comment. Math. Helv., 42 (1967), 222–236.

[3] A. Hurwitz, *Über die Komposition der Quadratischer Formen von beliebig vielen Variablen*, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1898, 309–316.

[4] W. S. Massey, *Cross Products of Vectors in Higher Dimensional Euclidean Spaces*, The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 10 (Dec. 1983), 697–701.

[5] P. F. McLoughlin, *When does a cross product on* $\mathbb{R}^n$ *exist?*, arXiv:1212.3515.

[6] P. F. Mcloughlin, *Basic Properties of Cross Products*, http://www.math.csusb.edu/faculty/pmclough/BP.pdf.

[7] A. Elduque, *Vector Cross Products*, http://www.unizar.es/matematicas/algebra/elduque/Talks/cross–products.pdf.

[8] M. Postnikov, *Lectures in Geometry: Lie groups and Lie algebras*, Mir, Moskva, 1994.