Osječki matematički list 16 (2016), 83-90

Logika implikacije

Leo Lisek,* Tomislav Rudec †

Sažetak

Mnogi matematički kolegiji u uvodu navode osnove matematičke logike. Između ostalog, navode se tablice istinitosti za veznike negacije, konjunkcije, disjunkcije, implikacije i ekvivalencije. Tablice veznika implikacije i ekvivalencije teže je povezati sa svakodnevnim razmišljanjima. U ovom članku dani su primjeri zadataka čijim rješavanjem možemo provježbati i lakše shvatiti veznike implikacije i ekvivalencije.

Ključne riječi: *matematička logika, tablica istinitosti, implikacija, ekvivalencija*

Implication Logic

Abstract

Many mathematical courses in the introduction recall basics of mathematical logic. Among other things, the truth table for logical connectives negation, conjunction, disjunction, implication and biconditional (equivalence) are listed. Tables for implication and biconditional are more difficult to connect with everyday thinking. In order to thoroughly practice and understand implication and equivalence, some exercises are given in the article.

Keywords: *mathematical logic, truth table, implication, biconditional, equivalence*

*Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija u Osijeku, Sveučilište u Osijeku

†Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija u Osijeku, Sveučilište u Osijeku, email: tomislav.rudec@etfos.hr

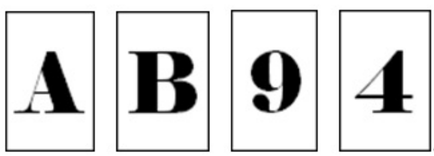
Mnogi od matematičkih kolegija na svom početku, uglavnom u uvodu, navode neke od osnova matematičke logike među kojima su često i tablice istinitosti za veznike negacije („*ne*“, znak $-$), konjunkcije („*i*“, znak $\wedge$), disjunkcije („*ili*“, znak $\vee$), implikacije (znak $\rightarrow$) i ekvivalencije (znak $\leftrightarrow$). [1]
Uz: 0 je oznaka za neistinit sud, 1 je oznaka za istinit sud tablica istinitosti je sljedeća:

Tablica 1:

A	B	$-A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Pri tome je, čitatelju koji se s tom temom prvi puta susreće, lako shvatiti tablice veznika *i* i *ili*. Ako je npr. točno da je sada jesen i da je jutro, onda je rečenica „Sada je jesen i sada nije jutro“ lažna (kao što i piše u stupcu za konjunkciju u tablici 1). Tablicu veznika implikacije, nešto je teže povezati s uobičajenim rečenicama svakodnevnog govora. U stupcu za implikaciju kod A=0 i B=0 pojavljuje se 1, a kod A=0 i B=1 pojavljuje se također 1. Oni su (bar na prvi pogled) pomalo nelogični. Zašto je, na primjer, razmišljanje u kojemu polazeći od „krive“ pretpostavke dobivamo „ispravan“ zaključak „ispravno“! [2]
No tablica ipak treba izgledati upravo ovako. Neke od argumenata za takvu tvrdnju možemo dobiti i u rješavanju sljedećih zadataka uz koje možemo provježbati implikaciju te razmisliti što nam u svakodnevnom životu znači rečenica oblika „Ako … onda … “ te kada je ona „točna“, a kada ne (je li naš svakodnevni ako-onda u skladu s veznikom matematičke logike)?

Zadatak 1. Na stolu su poslagane četiri karte (nisu uobičajene „kockarske“ karte) ispisane s obje strane (vidimo i poznajemo samo gornju). Vidimo:

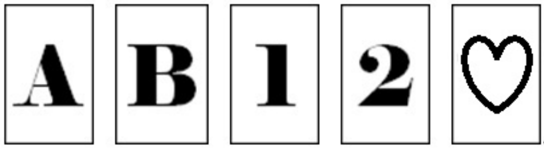


.

Slika 1:

Netko nam je rekao: „Ako je na jednoj strani karte samoglasnik, na drugoj je paran broj". Koliko karata moramo okrenuti i koje su to karte, kako bismo provjerili je li rečenica koju su nam rekli istinita ili ne?

Zadatak 2. Na stolu su poredane karte:



Slika 2:

Koliko je karata potrebno okrenuti (i koje su to karte) kako bismo provjerili ispravnost tvrdnje:

a) „Ako je s jedne strane karte slovo, s druge je broj"

b) „Ako svaki broj ima s druge strane slovo, onda svaki paran broj ima s druge strane slovo A"

Zadatak 3. (malo teži!) Na stolu su poredane karte

Slika 3:

Koliko je karata potrebno okrenuti (i koje su to karte) kako bismo provjerili ispravnost tvrdnje:

a) „Ako postoji karta na kojoj je s obje strane slovo, onda postoji i karta na kojoj slovo nije ni s jedne strane"

b) „Ako nema karte sa slovom na obje strane, onda ili postoji karta s brojem na obje strane ili ne postoji karta bez broja ili slova (na bar jednoj od strana)"

Provjeri sve mogućnosti i opiši ih „blok dijagramom" kakvog koristimo u računarstvu!

Zadatak 4. Antun, Branko i Cvjetko su tri dječaka koji su ostali sami kod kuće. Kad su se roditelji vratili kući, našli su tri dječaka i razbijen prozor. Na upit tko je to učinio čuli su: Antun: „Nisam ja, to je netko od njih dvojice ili su zajedno“, Branko: „Ako je Cvjetko razbio prozor, onda je i Antun kriv“, Cvjetko: „Kriv je Branko, a ne Antun“.

a) Je li moguća istinitost sve tri tvrdnje? Tko je onda kriv?

b) Je li moguće da sva trojica lažu?

c) Tko je sve slagao ako to nisu učinili dječaci?

d) Tko je lagao ako su sva trojica zajedno razbila prozor?

e) Ako su lagale osobe koje su krive, a ostale su rekle istinu, tko je kriv?

Zadatak 5. U policijskoj stanici nalaze se četiri provalnika - Matko, Slavko, Đuro i Pero osumnjičena za pljačku. Na detektoru laži izjavili su sljedeće: Matko: „Slavko nije kriv, a nije ni Đuro“, Slavko: „Kriv je Pero“, Đuro: „Ako nije provalio Slavko, onda je kriv Pero“, Pero: „Ako je Đuro kriv, nije provalio sam. S njim su bili ili Matko ili Slavko ili obojica“.

a) Tko je kriv ako po detektoru laži znamo da je točno jedan rekao istinu?

b) Tko je kriv ako su svi pali na detektoru laži?

c) Tko je kriv ako su krivci lagali, a nevini rekli istinu?

d) Tko je sigurno kriv, a tko nevin ako su svi rekli istinu?

e) Tko je sigurno slagao, a tko rekao istinu ako znamo da je istraga pokazala da su za to krivično djelo potrebne bar tri osobe?

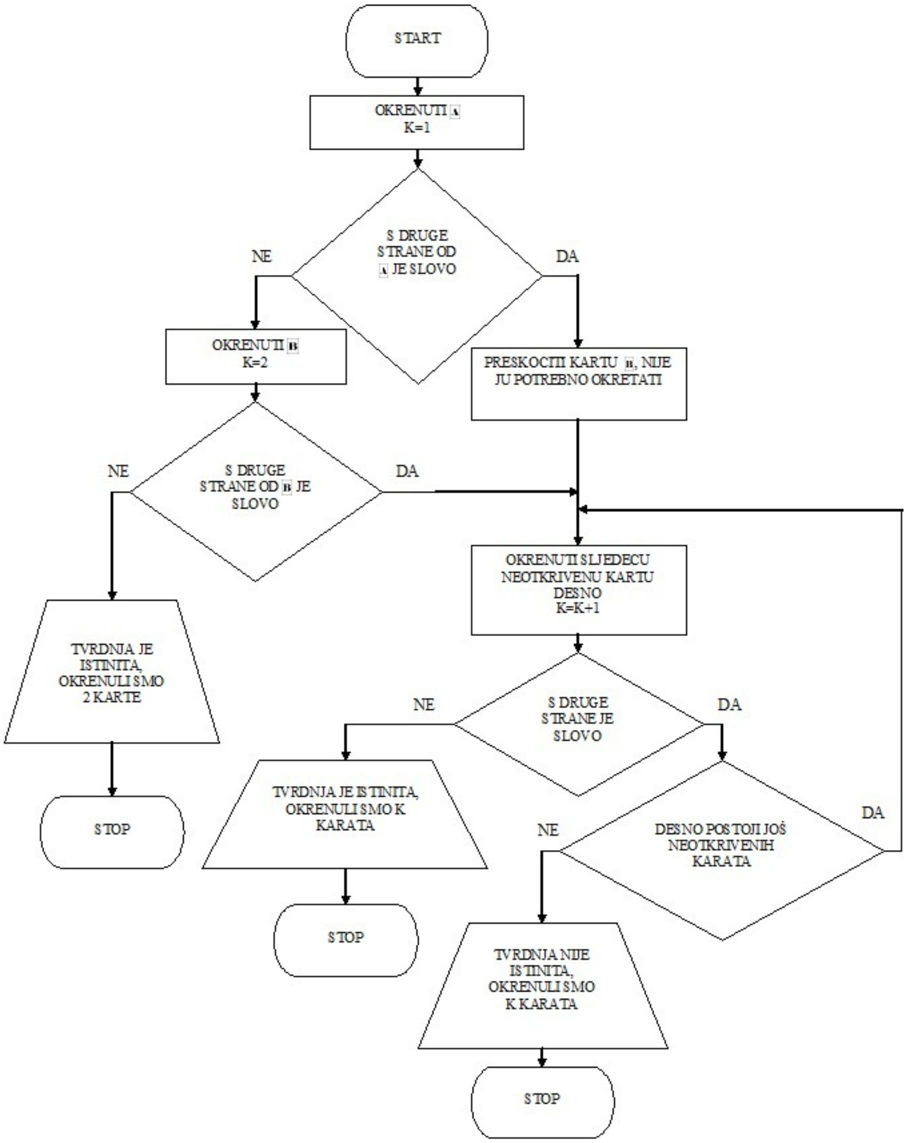
Rješenja:

Zadatak 1.
1.) Iza svakog samoglasnika kojeg vidimo trebao bi biti paran broj. Znači treba sigurno okrenuti $\boxed{\mathbf{A}}$. Ako je iza paran broj, rečenica je za sada točna, a ako nije, rečenica je lažna i više nije potrebno okretati karte. $\boxed{\mathbf{B}}$, $\boxed{\mathbf{9}}$ i $\boxed{\mathbf{4}}$ nisu samoglasnici - **iza njih smije biti bilo što, to neće porušiti istinitost izjave koju provjeravamo** $(0 \to 0 = 1)$.
2.) Ako je na suprotnoj (nama nevidljivoj) strani karte samoglasnik mi bismo trebali vidjeti paran broj.

Na prvoj karti vidimo slovo A, pa nju moramo okrenuti kako bismo vidjeli je li na drugoj strani te karte možda samoglasnik. Ako jest, rečenica je lažna. Ako nije, sve je u redu.
Na drugoj karti vidimo slovo B pa i nju moramo okrenuti kako bismo vidjeli je li na njenoj drugoj strani samoglasnik. Isto vrijedi i za kartu $\boxed{\mathbf{9}}$.
Kartu s brojem 4 ne treba okretati, jer ako je s druge strane samoglasnik sve je u redu, jer s naše strane je paran broj. A ako s druge strane nije samoglasnik, kako nije ni s naše, vidljive strane, slijedi kako **ova karta ne može srušiti istinitost dane izjave, jer se izjava tada na tu kartu ni ne odnosi - odnosi se samo na one karte koje bar s jedne strane imaju samoglasnik** $(0 \to 1 = 1)$.
Treba dakle okrenuti:
1.) $\boxed{\mathbf{A}}$ zbog razmišljanja pod 1), te 2.) $\boxed{\mathbf{B}}$ i $\boxed{\mathbf{9}}$ zbog razmišljanja pod 2). ◀

Zadatak 2.
a) Treba okrenuti $\boxed{\mathbf{A}}$ i $\boxed{\mathbf{B}}$ kako bismo provjerili je li s druge strane broj te $\boxed{\heartsuit}$ kako bismo provjerili nije li možda s druge strane slovo pa će izjava odmah biti lažna.
b) Prvo treba provjeriti ima li svaki broj s druge strane slovo. Za to je potrebno okrenuti $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ te $\boxed{\heartsuit}$ kako bismo provjerili da s druge strane nije broj. Ako je prvi dio rečenice točan, treba provjeriti i drugi dio rečenice, a ako nije, drugi dio rečenice ne treba provjeravati - rečenica je točna (istinita izjava). Ako svaki broj s druge strane ima slovo, za drugi dio rečenice treba osim $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ i $\boxed{\heartsuit}$ okrenuti još i $\boxed{\mathbf{B}}$ kako bismo provjerili da s druge strane nije paran broj. ◀

Zadatak 3.
a) Prvo svakako treba okrenuti $\boxed{\mathbf{A}}$, zatim možda i $\boxed{\mathbf{B}}$. Tada je prvi dio tvrdnje provjeren. Zatim možda $\boxed{\mathbf{1}}$, pa možda $\boxed{\mathbf{2}}$, pa možda $\boxed{\heartsuit}$, pa možda i $\boxed{\clubsuit}$. Sve moguće slučajeve i otvaranja daje blok-dijagram na slici **??**. (K je brojač okrenutih karata).
b) Najprije je potrebno okrenuti $\boxed{\mathbf{A}}$, a potom ovisno o tome što je iza $\boxed{\mathbf{A}}$, možda i $\boxed{\mathbf{B}}$. Ako obje karte nemaju slovo s druge strane, potrebno je okrenuti $\boxed{\mathbf{1}}$, a možda i $\boxed{\mathbf{2}}$. Ako s njihove druge strane nema broja, potrebno je okrenuti i $\boxed{\heartsuit}$ pa možda i $\boxed{\clubsuit}$.


START
OKRENUTI A
K=1
S DRUGE STRANE OD A JE SLOVO
NE
DA
OKRENUTI B
K=2
PRESKOCITI KARTU B, NIJE JU POTREBNO OKRETATI
S DRUGE STRANE OD B JE SLOVO
NE
DA
OKRENUTI SLJEDECU NEOTKRIVENU KARTU DESNO
K=K+1
TVRDNJA JE ISTINITA, OKRENULI SMO 2 KARTE
STOP
S DRUGE STRANE JE SLOVO
NE
DA
TVRDNJA JE ISTINITA, OKRENULI SMO K KARATA
STOP
DESNO POSTOJI JOŠ NEOTKRIVENIH KARATA
NE
DA
TVRDNJA NIJE ISTINITA, OKRENULI SMO K KARATA
STOP

Slika 4:

◄

Zadatak 4.
Označimo:
A: Antun je kriv.
B: Branko je kriv.
C: Cvjetko je kriv.

Antunova izjava (AI): $-A \wedge (B \vee C)$
Brankova izjava (BI): $C \rightarrow A$
Cvjetkova izjava (CI): $B \wedge -A$

Tablica istinitosti za dane izjave izgleda ovako:

Tablica 2:

A	B	C	AI	BI	CI
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Prvi red tablice (A=0, B=0, C=0, AI=0, BI=1, CI=0) znači: Antun nije kriv, Branko nije kriv, Cvjetko nije kriv, Antunova izjava je lažna, Brankova izjava je istinita, Cvjetkova izjava je lažna.

a) U trećem retku tablice vidimo da je moguća istinitost sve tvrdnje - u tom slučaju kriv je samo Branko;

b) Nije moguće da sva trojica lažu (nema retka s tri nule s desne strane tablice);

c) Ako to nisu učinili dječaci, lagali su Antun i Cvjetko, a Branko je rekao istinu (prvi red tablice);

d) Ako su prozor razbila sva trojica, lagali su Antun i Cvjetko, dok je Branko rekao istinu (po zadnjem retku tablice);

e) Situacija u kojoj su krivci lagali, a oni koji nisu krivi rekli istinu vidi se u 6. retku tablice - tada su krivi Antun i Cvjetko. ◄

Zadatak 5.

a) Ako je samo jedan rekao istinu krivi su Matko i Đuro;

b) Ako su svi lagali kriv je samo Đuro;

c) Ako su samo krivci lagali krivi su Matko i Slavko;

d) Ako su svi rekli istinu Pero je sigurno kriv, Slavko i Đuro su sigurno nevini, a Matko je možda kriv;

e) Ako su najmanje trojica izvela krivično djelo, Matko je sigurno slagao, možda je lagao i Slavko, a Đuro i Pero su sigurno rekli istinu; ◄

Literatura

[1] M. Vuković, *Matematička logika*, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2007.

[2] R. Cori, D. Lascar, *Mathematical Logic, Part 1*, Oxford University Press 2000.