Stručni rad
Prihvaćeno 16.04.1996

MILJENKO LAPAINE I DAMJAN JOVIČIĆ

Grafički prikaz konika pomoću računala

Computer-aded Graphical Representation of Conic Sections
ABSTRACT
The paper presents a detailed classification of conic sections or second order curves. The conic sections are first classified into central and non-central, and then to their subtypes. The purpose of such classification is to obtain analytical apparatus by means of which the necessary conclusions about the conics can be made and furthermore, graphically presented on the basis of given coefficients being included into the general form of the conic section equation. In order to draw arbitrary curves, and also conic sections by means of computer, it is very convenient to use their equations in parametric form. Therefore, the corresponding equation in the parametric form have been suggested for each type of the conic section. A numeric example has been given for each type of the conic section.
Key Words
conic sections classification, graphical representations of conic sections

Grafički prikaz konika pomoću računala
SAŽETAK
U radu je prikazana jedna detaljna klasifikacija konika ili krivulja drugog reda. Konike se najprije dijele na centralne i necentralne, a zatim na njihove podtipove. Svrha takve klasifikacije je dobivanje analitičkog aparata pomoću kojega možemo na temelju zadanih koeficijenata koji ulaze u opću jednadžbu konike izvesti potrebne zaključke o konici i zatim je grafički prikazati. Za crtanje proizvoljnih krivulja, pa tako i konika pomoću računala, pogodne su njihove jednadžbe u parametarskom obliku. Stoga su za svaki tip konike predložene i odgovarajuće jednadžbe u parametarskom obliku. Za svaki tip konike dan je i poseban numerički primjer.
Ključne riječi
klasifikacija krivulja 2. reda, prikazi krivulja 2. reda

1. UVOD

Proučavanje konika ili krivulja drugog reda spada u područje analitičke geometrije i linearne algebre. U različitom opsegu o krivuljama drugog reda pisali su npr. Aleksandrov (1979.), Bugrov i Mikolskij (1984.), Iljin i Poznjak (1981.), Javor (1990.), Kajgorodov (1985.), Kaplan (1968.), Krutickaja i Šiškin (1985.), Kurepa (1990.), Manturov i Matveev (1986.), Mitrinović, Mihailović i Vasić (1979.), Pavković i Veljan (1995.), Pettofrezzo (1966.), Rašajski (1983.) i mnogi drugi.
Računala nam, između ostalog, omogućuju grafičko prikazivanje različitih krivulja. Da bismo u nekom od viših programskih jezika (npr. BASIC-u) sastavili program za crtanje proizvoljne krivulje drugog reda na osnovi njene jednadžbe u općem obliku, moramo imati napravljenu detaljnu klasifikaciju krivulja drugog reda i zatim za svaki tip krivulje pronaći njenu jednadžbu u parametarskom obliku, jer je takav oblik najpodesniji za dobivanje grafičkih prikaza pomoću računala.

2. KONIKE

Najopćenitija jednadžba drugog stupnja od dvije varijable x i y može se napisati u obliku

$$F(x,y) = \\ = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \qquad (2.1)$$

gdje su a, b, c, d, e, f realni brojevi i barem jedan od brojeva a, b i c različit od nule. Geometrijsko mjesto točaka (x,y) u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu (2.1) nazivamo konusnim presjekom ili jednostavno konikom. Pomoću rotacije ravnine oko ishodišta i translacije ravnine moguće je svaku koniku prikazati u standardnom ili kanonskom obliku. U nastavku ćemo pokazati kako se to može napraviti.
Funkciju $F(x,y)$ iz jednadžbe (2.1) možemo napisati i u obliku

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Uočimo da je matrica

$$\Delta = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}, \qquad (2.3)$$

koja određuje koniku realna simetrična matrica. Ta se matrica naziva matricom konusnog presjeka. Osim matrice Δ, realna matrica

$$\delta = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

od osnovne je važnosti pri analizi jednadžbe (2.1).

Naime, pomoću matrice δ možemo napisati

$$F(x,y) =$$
$$=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+f=0. \quad (2.5)$$

Poznato je (vidi npr. Kurepa 1990.) da se svaka realna simetrična matrica δ može napisati u obliku

$$\delta = V\Lambda V^T, \quad (2.6)$$

gdje su matrice Λ i V sljedećeg oblika:

$$\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad V=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Pri tome su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice δ, dakle rješenja kvadratne jednadžbe

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0, \quad (2.8)$$

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left[a+c+\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right], \quad (2.9)$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left[a+c-\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right]. \quad (2.10)$$

S obzirom na to da se izraz ispod korijena može napisati u obliku zbroja kvadrata

$$(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2, \quad (2.11)$$

najprije zaključujemo da su λ_1 i λ_2 uvijek realni brojevi. Zatim, $\lambda_1= \lambda_2$ ako i samo ako je $a=c$ i $b=0$. Konačno, ne može biti $\lambda_1= \lambda_2=0$, jer bi tada moralo biti $a=b=c=0$, što je u suprotnosti s početnom pretpostavkom.

Stupci ortogonalne matrice V komponente su jediničnih svojstvenih vektora v_1 i v_2 matrice δ koji pripadaju svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2. Ako je $\lambda_1=\lambda_2$, tj. $a=c$ i $b=0$, tada se lako vidi da je svaki vektor u ravnini svojstveni vektor matrice δ i da kut θ nije jednoznačno određen. Ako svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 nisu međusobno jednake, onda vrijedi relacija

$$\mathrm{tg}2\theta=\frac{2b}{a-c} \quad (2.12)$$

iz koje možemo izračunati kut θ (usporediti Kurepa, 1990.). Međutim, osim kuta θ, relaciju (2.12) zadovoljavat će i kutovi $\theta+k\pi/2$, $k\in Z$. To znači da relacijom (2.12) kut θ nije jednoznačno određen i da bez daljnjeg ispitivanja ostaje nejasno koji od tih smjerova određuje položaj svojstvenog vektora v_1. Drugim riječima, ako je

$$v=\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

svojstveni vektor matrice δ, onda su i

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad n\in Z$$

također svojstveni vektori te matrice. Zbog toga ćemo umjesto formule (2.12) radije primjenjivati formulu

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{\lambda_1-a}{b}, \quad (2.13)$$

koja se lako dobije iz relacije

$$\delta\, v_1=\lambda_1\, v_1 \quad (2.14)$$

kojom se zapisuje da je v_1 svojstveni vektor matrice δ kojem odgovara svojstvena vrijednost λ_1.

Činjenica da osim kuta θ relaciju (2.13) zadovoljavaju i kutovi oblika $\theta+k\pi$, $k\in Z$, ne otežava daljnju primjenu, jer je očito svejedno koji ćemo od njih uzeti za smjer svojstvenog vektora v_1 (možemo uzeti npr. $\theta\in(-\pi/2, \pi/2)$).

Prilikom programiranja formule (2.13) moramo voditi računa o tome da će ona zatajiti u slučaju kad je $b=0$. Zato taj slučaj treba promatrati odvojeno. Lako se pokaže da tada mora biti $\theta=0$.

Prema (2.7) svojstveni vektor v_2 je

$$v_2=\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\theta+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix},$$

što znači da će uređeni par (v_1, v_2) biti pozitivno orijentiran. Neka je

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=V^T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

što možemo geometrijski protumačiti kao rotaciju koordinatnog sustava x,y oko ishodišta za kut θ. Tada je zbog ortogonalnosti matrice V:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=V\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

dok izraz (2.5) prelazi u

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} V\Lambda V^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+f= \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\Lambda\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}V\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}+f= \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\Lambda\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}+f= \\ &= \lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2\alpha x'+2\beta y'+f=0 \end{aligned}$$

(2.17)

gdje smo označili

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=V^T\begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d\cos\theta+e\sin\theta \\ -d\sin\theta+e\cos\theta \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Ako je matrica δ regularna, tj. ako su obje svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 različite od nule, tada se linearni članovi x' i y' u (2.17) mogu eliminirati translacijom ravnine definirane s

$$x''=x'+\frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad y''=y'+\frac{\beta}{\lambda_2}, \quad (2.19)$$

odnosno

$$x' = x'' - \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad y' = y'' - \frac{\beta}{\lambda_2}. \tag{2.20}$$

Pomoću (2.20), izraz (2.17) prelazi u

$$F(x,y) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f' = 0, \tag{2.21}$$

gdje smo označili

$$f' = f - \frac{\alpha^2}{\lambda_1} - \frac{\beta^2}{\lambda_2}. \tag{2.22}$$

Može se također pokazati da vrijedi relacija

$$f' = \frac{\det \Delta}{\det \delta}.$$

Ako je matrica δ singularna, onda je barem jedan od λ_i jednak nuli i translacija (2.19) ne postoji.

Ako je jedan i samo jedan od λ_i jednak nuli, tada postoji translacija ravnine kojom se može eliminirati jedan od linearnih članova u jednadžbi (2.17). Na primjer, neka je $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2 = 0$. Translacija ravnine definirana s

$$x'' = x' + \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad y'' = y', \tag{2.23}$$

odnosno

$$x' = x'' - \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad y' = y'', \tag{2.24}$$

transformira jednadžbu (2.17) na oblik

$$\lambda_1 x''^2 + 2\beta y'' + f' = 0, \tag{2.25}$$

gdje je

$$f' = f - \frac{\alpha^2}{\lambda_1}. \tag{2.26}$$

Analogno, ako je $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 \neq 0$ tada translacija ravnine definirana s

$$x'' = x', \quad y'' = y' + \frac{\beta}{\lambda_2}, \tag{2.27}$$

odnosno

$$x' = x'', \quad y' = y'' - \frac{\beta}{\lambda_2}, \tag{2.28}$$

transformira jednadžbu (2.17) na oblik

$$\lambda_2 y''^2 + 2\alpha x'' + f' = 0, \tag{2.29}$$

gdje je

$$f' = f - \frac{\beta^2}{\lambda_2}. \tag{2.30}$$

Konačno, kad bi obje svojstvene vrijednosti bile jednake nuli, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, to bi značilo da je $a=b=c=0$, a tada izraz (2.1) ne predstavlja koniku.

Iz provedene diskusije proizlazi da se konika prikazana jednadžbom (2.1) može klasificirati ispitivanjem svojstvenih vrijednosti matrice δ. Postoji devet klasa konika; tj. za zadane a, b, c, d, e i f, jednadžba (2.1) predstavlja jedan od devet tipova ravninskih krivulja koje nazivamo konikama. Dva tipa predstavljaju imaginarnu koniku, jer u tim slučajevima ne postoje realne točke koje bi zadovoljile jednadžbu (2.1).

3. Klasifikacija centralnih konika

Ako su svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 različite od nule, tada označimo:

$$A = \sqrt{\left|\frac{f'}{\lambda_1}\right|}, \quad B = \sqrt{\left|\frac{f'}{\lambda_2}\right|}. \tag{3.1}$$

A i B nazivamo poluosima konike.

(*i*) Ako je $\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2 = \mathrm{sgn}f'$ i $f' \neq 0$, tada se (2.21) može napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2} + \frac{y''^2}{B^2} = -1 \tag{3.2}$$

koji nazivamo jednadžbom imaginarne elipse s poluosima A i B.

(*ii*) Ako je $\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2 \neq \mathrm{sgn}f'$ i $f' \neq 0$, tada se (2.21) može napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2} + \frac{y''^2}{B^2} = 1 \tag{3.3}$$

koji predstavlja jednadžbu realne elipse s poluosima A i B.

(*iii*) Ako je $\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2$ i $f' = 0$, tada (2.21) prelazi u

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0, \tag{3.4}$$

što predstavlja jednadžbu para imaginarnih pravaca kroz točku $x'' = y'' = 0$.

(*iv*) Ako je $\mathrm{sgn}\lambda_1 \neq \mathrm{sgn}\lambda_2$ i $f' \neq 0$, tada se (2.21) može napisati u obliku

$$\frac{x''^2}{A^2} - \frac{y''^2}{B^2} = 1 \text{ ako je } \frac{f'}{\lambda_1} < \frac{f'}{\lambda_2}, \tag{3.5}$$

odnosno

$$\frac{y''^2}{B^2} - \frac{x''^2}{A^2} = 1 \text{ ako je } \frac{f'}{\lambda_1} > \frac{f'}{\lambda_2}, \tag{3.6}$$

što je u oba slučaja hiperbola s poluosima A i B. Pravci

$$Ay'' - Bx'' = 0, \quad Ay'' + Bx'' = 0 \tag{3.7}$$

nazivaju se asimptotama hiperbole.

(*v*) Ako je $\mathrm{sgn}\lambda_1 \neq \mathrm{sgn}\lambda_2$ i $f' = 0$, tada se (2.21) može napisati u obliku

$$|\lambda_1| x''^2 - |\lambda_2| y''^2 = \left(\sqrt{|\lambda_1|}x'' - \sqrt{|\lambda_2|}y''\right)\left(\sqrt{|\lambda_1|}x'' + \sqrt{|\lambda_2|}y''\right) = 0, \tag{3.8}$$

što predstavlja jednadžbu dvaju pravaca koji se sijeku u točki $x'' = y'' = 0$.

Ako je matrica δ regularna, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, postoji geometrijsko središte konike i konika se naziva centralom konikom. Naime, lako se vidi da je takva konika centralno simetrična u odnosu na ishodište koordinatnog sustava x'', y'' koje nazivamo centrom ili središtem konike.

Osim središta elipse, postoje dvije karakteristične točke koje nazivamo žarištima ili fokusima, nalaze se na većoj poluosi, od središta elipse udaljene su za

$$C=\sqrt{\left|A^2-B^2\right|} \tag{3.9}$$

i imaju koordinate:

$$\begin{aligned} x''_F &= \mp C, \quad y''_F = 0 \quad \text{za} \quad A \geq B \\ x''_F &= 0, \quad y'' = \mp C \quad \text{za} \quad A \leq B. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Za hiperbolu žarišna je udaljenost

$$C=\sqrt{A^2+B^2} \tag{3.11}$$

i koordinate žarišta su:

$$\begin{aligned} x''_F &= \mp C, \quad y''_F = 0 \quad \text{za} \quad \frac{f'}{\lambda_1} < \frac{f'}{\lambda_2}, \\ x''_F &= 0, \quad y''_F = \mp C \quad \text{za} \quad \frac{f'}{\lambda_1} > \frac{f'}{\lambda_2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

4. Klasifikacija necentralnih konika

Ako je matrica δ singularna, geometrijsko središte konike ne postoji, pa se pripadna konika naziva necentralnom. Ako je $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2=0$, tada se jednadžba (2.1) može transformirati na oblik (2.25) i imamo sljedeće slučajeve:

(*vi*1) Ako je $\beta \neq 0$, onda je $\lambda_1 x''^2 + 2\beta y'' + f' = 0$ jednadžba parabole. Fokus te parabole je točka s koordinatama

$$x''_F = 0, \quad y''_F = -\frac{f'}{2\beta} - \frac{\beta}{2\lambda_1}. \tag{4.1}$$

(*vii*1) Ako je β=0 i sgn$\lambda_1 \neq$ sgnf', tada se (2.25) može napisati u obliku

$$\begin{aligned} &\left|\lambda_1\right| x''^2 - \left|f'\right| = \\ &= \left(\sqrt{\left|\lambda_1\right|}x'' - \sqrt{\left|f'\right|}\right)\left(\sqrt{\left|\lambda_1\right|}x'' + \sqrt{\left|f'\right|}\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdje možemo prepoznati jednadžbu dvaju paralelnih pravaca.

(*viii*1) Ako je β=0 i sgnλ_1=sgnf' tada imamo

$$\begin{aligned} &\left|\lambda_1\right| x''^2 + \left|f'\right| = \\ &= \left(\sqrt{\left|\lambda_1\right|}x'' - i\sqrt{\left|f'\right|}\right)\left(\sqrt{\left|\lambda_1\right|}x'' + i\sqrt{\left|f'\right|}\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

što je jednadžba dvaju imaginarnih paralelnih pravaca.

(*ix*1) Ako je β=0 i f'=0, tada (2.25) prelazi u

$$x''^2 = 0, \tag{4.4}$$

što možemo interpretirati kao jednadžbu dvostrukog pravca.

Ako je λ_1=0 i $\lambda_2 \neq 0$, tada se jednadžba (2.1) može transformirati na oblik (2.29) i na analogan način zaključiti:

(*vi*2) $\alpha \neq 0$
parabola

(*vii*2) α=0 i sgn$\lambda_2 \neq$ sgnf'
dva paralelna pravca

(*viii*2) α=0 i sgnλ_2=sgnf'
dva imaginarna paralelna pravca

(*ix*2) α=0 i f'=0
dvostruki pravac.

5. Grafički prikaz centralnih konika

Da bismo mogli vidjeti kakvu koniku za zadane *a, b, c, d, e* i *f* opisuje jednadžba (2.1), transformirali smo tu jednadžbu pomoću odgovarajuće rotacije i translacije u koordinatni sustav x'', y'' koji se naziva sustavom glavnih osi. Na taj smo način dobili jednadžbu konike u kanonskom obliku u koordinatnom sustavu glavnih osi. Ako želimo koniku grafički prikazati pomoću računala u polaznom koordinatnom sustavu *x,y* poželjno je u tom sustavu imati njenu jednadžbu u parametarskom obliku. Središte centralne konike je točka s koordinatama $x''=0$ i $y''=0$. Za svaku točku na osnovi relacija (2.16) i (2.20) vrijedi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = V\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = V\begin{bmatrix} x'' - \dfrac{\alpha}{\lambda_1} \\ y'' - \dfrac{\beta}{\lambda_2} \end{bmatrix},$$

te se za koordinate (x_S, y_S) središta konike u koordinatnom sustavu *x,y* može, koristeći (2.6) i (2.18), napisati

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} &= -V\Lambda^{-1}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -V\Lambda^{-1}V^T\begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \\ &= -\delta^{-1}\begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{bmatrix} be-cd \\ bd-ae \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dakle, koordinate (x_S, y_S) središta centralne konike moraju zadovoljavati sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

(*i*) Imaginarnu elipsu ne prikazujemo grafički, jer njenu jednadžbu ne zadovoljavaju koordinate niti jedne realne točke.

(*ii*) Poznato je da se jednadžba (realne) elipse iz kanonskog oblika (3.3) može prevesti u parametarski oblik na mnogo načina. Jedan od najjednostavnijih je:

$$x'' = A\cos t, \quad y'' = B\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{5.3}$$

Na osnovi formula (2.16), (2.20), (5.2) i (5.3) lako se dobiva parametarski oblik jednadžbi elipse u koordinatnom sustavu *x,y*:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A\cos\theta & -B\sin\theta \\ A\sin\theta & B\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

U koordinatnom sustavu *x,y* koordinate fokusa elipse su:

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \mp C \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{za} \quad A \geq B$$
$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \mp C \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{za} \quad A \leq B \tag{5.5}$$

gdje je žarišna udaljenost C definirana s (3.9).

(iii) Točka s koordinatama $x'' = y'' = 0$ u koordinatnom sustavu x,y ima koordinate određene sustavom linearnih jednadžbi (5.2). To je jedina realna točka ove konike.

(iv) Poznato je da se jednadžba hiperbole iz kanonskog oblika (3.5) može prevesti u parametarski oblik na mnogo načina. Jedan od najjednostavnijih je:

$$x'' = \frac{A}{\cos t}, \quad y'' = B\,\mathrm{tg}\,t, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{5.6}$$

Na osnovi formula (2.16), (2.20), (5.2) i (5.6) lako se, uz pretpostavku

$$\frac{f'}{\lambda_1} < \frac{f'}{\lambda_2},$$

dobiva parametarski oblik jednadžbe hiperbole u koordinatnom sustavu x,y:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A\cos\theta & -B\sin\theta \\ A\sin\theta & B\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\cos t \\ \mathrm{tg}\,t \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Ako je

$$\frac{f'}{\lambda_1} > \frac{f'}{\lambda_2},$$

tada na analogan način možemo dobiti

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A\cos\theta & -B\sin\theta \\ A\sin\theta & B\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\,t \\ 1/\cos t \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

U koordinatnom sustavu x,y koordinate fokusa (x_F, y_F) hiperbole su:

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \mp C \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{za} \quad \frac{f'}{\lambda_1} < \frac{f'}{\lambda_2}$$
$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} \mp C \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{za} \quad \frac{f'}{\lambda_1} > \frac{f'}{\lambda_2}. \tag{5.9}$$

Jednadžbe asimptota hiperbole (3.7) mogu se napisati u koordinatnom sustavu x,y u obliku:

$$\begin{aligned} &(\mp B\cos\theta - A\sin\theta)\,(x - x_S) + \\ &+(\mp B\sin\theta + A\sin\theta)\,(y - y_S) = 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

odnosno u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} y &= y_S + (A\sin\theta \mp B\cos\theta)\,t \\ x &= x_S + (A\cos\theta \pm B\sin\theta)\,t, \quad t \in R. \end{aligned} \tag{5.11}$$

(v) Pravci (3.8) u koordinatnom sustavu x,y imaju jednadžbe u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} y &= y_S + (\sqrt{|\lambda_2|}\sin\theta \mp \sqrt{|\lambda_1|}\cos\theta)\,t \\ x &= x_S + (\sqrt{|\lambda_2|}\cos\theta \pm \sqrt{|\lambda_1|}\sin\theta)\,t, \quad t \in R. \end{aligned} \tag{5.12}$$

6. GRAFIČKI PRIKAZ NECENTRALNIH KONIKA

(vi1) Za $\beta \neq 0$ parabolu $\lambda_1 x''^2 + 2\beta y'' + f' = 0$ možemo parametrizirati, na primjer, na sljedeći način:

$$x'' = t, \quad y'' = -\frac{\lambda_1 t^2 + f'}{2\beta}, \quad t \in R. \tag{6.1}$$

Primjenom relacija (2.16), (2.24) i (6.1) možemo napisati jednadžbu parabole u koordinatnom sustavu x,y u parametarskom obliku:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\cos\theta + \dfrac{t^2\lambda_1\sin\theta + f'\sin\theta}{2\beta} - \dfrac{\alpha\cos\theta}{\lambda_1} \\ t\sin\theta - \dfrac{t^2\lambda_1\cos\theta + f'\cos\theta}{2\beta} - \dfrac{\alpha\sin\theta}{\lambda_1} \end{bmatrix}, t \in R. \tag{6.2}$$

Fokus te parabole je prema (4.1) u točki s koordinatama

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\alpha\cos\theta}{\lambda_1} + \dfrac{f'\sin\theta}{2\beta} + \dfrac{\beta\sin\theta}{2\lambda_1} \\ \dfrac{-\alpha\sin\theta}{\lambda_1} - \dfrac{f'\cos\theta}{2\beta} - \dfrac{\beta\cos\theta}{2\lambda_1} \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

(vii1) Jednadžbe paralelnih pravaca (4.2) mogu se napisati u koordinatnom sustavu x,y u parametarskom obliku:

$$\begin{aligned} x &= \left(\mp\sqrt{\left|\frac{f'}{\lambda_1}\right|} - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\cos\theta - t\sin\theta \\ y &= \left(\mp\sqrt{\left|\frac{f'}{\lambda_1}\right|} - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\sin\theta + t\cos\theta, \quad t \in R. \end{aligned} \tag{6.4}$$

($viii$1) Imaginarne pravce ne prikazujemo grafički.

(ix1) Jednadžba pravca $x'' = 0$ može se u parametarskom obliku u koordinatnom sustavu x,y napisati na primjer ovako:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\alpha}{\lambda_1}\cos\theta - t\sin\theta \\ y &= -\frac{\alpha}{\lambda_1}\sin\theta + t\cos\theta, \quad t \in R. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Grafički prikaz necentralnih konika za slučajeve (vi2) - (ix2) provodi se na potpuno analogan način.

7. PRIMJERI

U skladu s izvedenom klasifikacijom konika i opisanim postupcima u prethodnim poglavljima autori ovog članka sastavili su odgovarajući program u BASIC-u koji služi za dobivanje grafičkih prikaza bilo koje krivulje drugog reda na osnovi njene jednadžbe u općem obliku. Pomoću spomenutog programa riješeni su sljedeći primjeri. Pri tome je uočeno da se i u udžbenicima matematike ponekad mogu naći pogrešni crteži (Kaplan 1986., Kurepa 1990., Pavković i Veljan 1995.).

Primjer 1
Neka je zadana jednadžba

$$19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2-30\lambda+200=0$$

i njena rješenja su λ_1=20, λ_2=10. Prema (2.13) imamo

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{1}{3},\quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22):

$$\alpha=\frac{60}{\sqrt{10}},\quad \beta=-\sqrt{10},\quad f'=10.$$

Kako je sgnλ_1=sgnλ_2=sgnf' i $f'\neq 0$, to zaključujemo da se radi o imaginarnoj elipsi. Njene poluosi su prema (3.1)

$$A=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{i}\ B=1.$$

Primjer 2
Neka je zadana jednadžba

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2-13\lambda+36=0$$

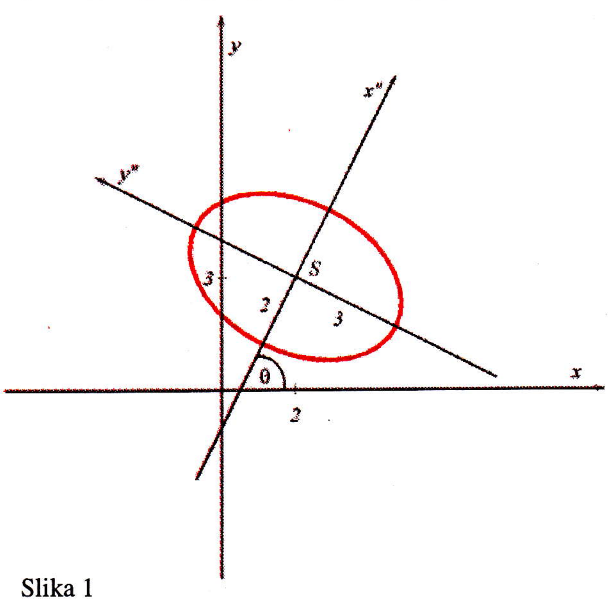
i njena rješenja su λ_1=9, λ_2=4. Prema (2.13) imamo:

$$\mathrm{tg}\theta=2,\quad \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22):

$$\alpha=-\frac{72}{\sqrt{5}},\quad \beta=\frac{4}{\sqrt{5}},\quad f'=-36.$$

Kako je sgnλ_1=sgn$\lambda_2\neq$sgnf' i $f'\neq 0$, zaključujemo da se radi o realnoj elipsi. Njene su poluosi A = 2, B = 3, a središte u točki S(2,3). Na slici 1 dan je grafički prikaz te elipse. Istu jednadžbu elipse razmatrao je i Kurepa (1990.), ali je njegov grafički prikaz pogrešan.



Slika 1

Primjer 3
Neka je zadana jednadžba

$$5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2-10\lambda+24=0$$

i njena rješenja su λ_1=6, λ_2=4. Prema (2.13) imamo:

$$\mathrm{tg}\theta=-1,\quad \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22):

$$\alpha=-6\sqrt{2},\quad \beta=4\sqrt{2},\quad f'=0.$$

Kako je sgnλ_1=sgnλ_2 i f'=0, to zaključujemo da se radi o točki, a njene koordinate su (0,-2). Zadana jednadžba može se prevesti na oblik:

$$3(x-y-2)^2+2(x+y+2)^2=0.$$

Primjer 4
Neka je zadana jednadžba

$$2x^2+10xy+2y^2+9x+12y-2=0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2-4\lambda-21=0$$

i njena rješenja su λ_1=7, λ_2=-3. Prema (2.13) imamo:

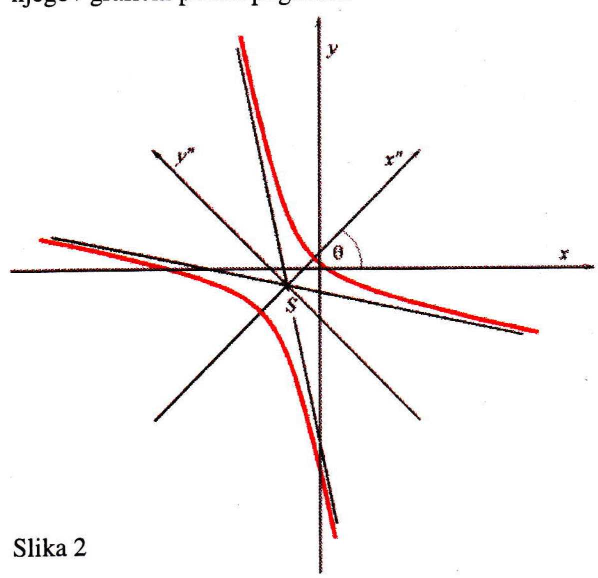
$$\mathrm{tg}\theta=1,\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22):

$$\alpha=\frac{21\sqrt{2}}{4},\quad \beta=\frac{3\sqrt{2}}{4},\quad f'=-\frac{19}{2}.$$

Kako je sgn$\lambda_1\neq$sgnλ_2 i $f'\neq 0$, to zaključujemo da se radi o hiperboli. Njene poluosi su $A=\sqrt{\frac{19}{14}}$ i $B=\sqrt{\frac{19}{6}}$, a središte u točki S(-1, -1/2).

Na slici 2 dan je grafički prikaz te hiperbole. Istu jednadžbu hiperbole razmatrao je i Kaplan (1968.), ali je njegov grafički prikaz pogrešan.



Slika 2

Primjer 5

Neka je zadana jednadžba

$$7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2-6\lambda-16=0$$

i njena rješenja su λ_1=8, λ_2=-2. Prema (2.13) imamo:

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{1}{3},\quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.22) imamo:

$$\alpha=\frac{48}{\sqrt{10}},\quad \beta=\frac{4}{\sqrt{10}},\quad f'=0.$$

Kako je sgnλ_1=sgnλ_2 i f'=0 to zaključujemo da se radi o dva pravca koji se sijeku u jednoj točki, a njene koordinate su (-2, 0). Zadana se jednadžba može prevesti u oblik:

$$(x+y+2)(7x-y+14)=0.$$

Primjer 6

Neka je zadana jednadžba $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$. Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2-2\lambda=0$$

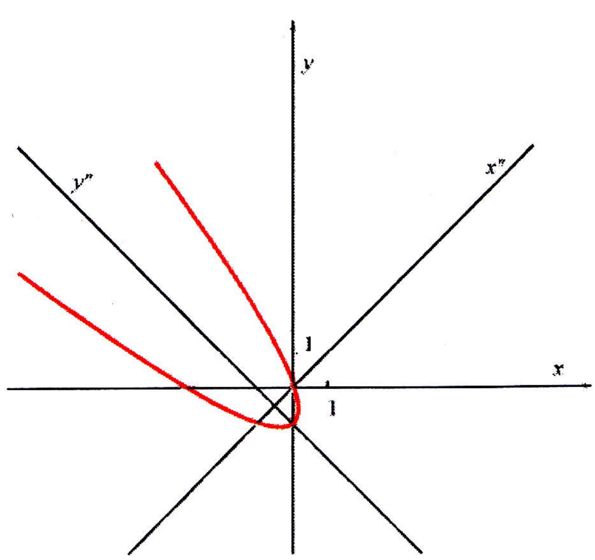
i njena rješenja su λ_1=2, λ_2=0. Prema (2.13) imamo:

$$\mathrm{tg}\theta=1,\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.26):

$$\alpha=\sqrt{2},\quad \beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f'=-1.$$

Kako je $\beta\neq0$, to zaključujemo da se radi o paraboli. Na slici 3 dan je njen grafički prikaz. Istu jednadžbu parabole razmatraju Pavković i Veljan (1995.), ali je njihov grafički prikaz pogrešan.



Slika 3

Primjer 7

Neka je zadana jednadžba

$$x^2-2xy+y^2-12x+12y-14=0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2-2\lambda=0$$

i njena rješenja su λ_1=2, λ_2=0. Prema (2.13) imamo:

$$\mathrm{tg}\theta=-1,\quad \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.26):

$$\alpha=-6\sqrt{2},\quad \beta=0,\quad f'=-50.$$

Kako je β=0, sgn$\lambda_1\neq$sgnf' i $f\neq0$, to zaključujemo da se radi o dva paralelna pravca. Zadana jednadžba može se napisati i u obliku:

$$(x-y+5\sqrt{2}-6)(x-y-5\sqrt{2}-6)=0.$$

Primjer 8

Neka je zadana jednadžba

$$16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2-25\lambda=0$$

i njena rješenja su λ_1=25, λ_2=0. Prema (2.13) imamo:

$$\mathrm{tg}\theta=-\frac{3}{4},\quad \sin\theta=-\frac{3}{5},\quad \cos\theta=\frac{4}{5}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.26):

α= -100, β= 0, f'=25.

Kako je β=0 i sgnλ_1=sgnf', to zaključujemo da se radi o dva paralelna imaginarna pravca.

Primjer 9

Neka je zadana jednadžba

$$4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba prema (2.8) glasi:

$$\lambda^2-13\lambda=0$$

i njena rješenja su λ_1=13, λ_2=0. Prema (2.13) imamo:

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{3}{2},\quad \sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}},\quad \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Nadalje, prema (2.18), odnosno (2.26):

$$\alpha=-\sqrt{13},\quad \beta=0,\quad f'=0.$$

Kako je β=0 i f'=0, zaključujemo da se radi o dvostrukom realnom pravcu. Zadana jednadžba može se prevesti na oblik:

$$(2x+3y-1)^2=0.$$

LITERATURA

ALEKSANDROV, P. S.: *Kurs analitičeskoj geometrii i linejnoj algebri,* Nauka, Moskva, 1979.

BUGROV, Ja. S., NIKOL'SKIJ, S. M.: *Elementy linejnoj algebry i analitičeskoj geometrii,* Nauka, Moskva, 1984.

IL'IN, V. A., POZNJAK, E. G.: *Analitičeskaja geometrija,* Nauka, Moskva, 1981.

JAVOR, P.: *Analitička geometrija ravnine,* Školska knjiga, Zagreb, 1990.

KAJGORODOV, V. R.: *Kurs analitičeskoj geometrii i linejnoj algebry,* Izdatel'stvo Kazanskogo Universiteta, 1985.

KAPLAN, I. A.: *Praktičeskie zanjatija po vysšej matematike,* čast' V, Izdatel'stvo Har'kovskogo Universiteta, Har'kov, 1968.

KRUTICKAJA, N. Č., ŠIŠKIN, A. A.: *Linejnaja algebra v voprosah i zadačah,* Vysšaja škola, Moskva, 1985.

KUREPA, S.: *Uvod u linearnu algebru,* 6. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

MANTUROV, O. V., MATVEEV, N. M.: *Kurs vysšej matematiki,* Vysšaja škola, Moskva, 1986.

MITRINOVIĆ, D. S., MIHAILOVIĆ, D., VASIĆ, P. M.: *Linearna algebra, polinomi, analitička geometrija,* Građevinska knjiga, Beograd, 1979.

PAVKOVIĆ, B., VELJAN, D.: *Elementarna matematika 2,* Školska knjiga, Zagreb, 1995.

PETTOFREZZO, A. J.: *Matrices and Transformations,* Dover Publications, Inc., New York, 1966.

RAŠAJSKI, B.: *Analitička geometrija,* Građevinska knjiga, Beograd, 1983.

Mr. sc. Miljenko Lapaine i mr. sc. Damjan Jovičić
Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
10000 Zagreb, Kačićeva 26
tel.: 456-1-222,
faks: 445-410
e-mail: Miljenko.Lapaine@public.srce.hr