**math.e***Hrvatski matematički elektronički časopis*

Harmonijski brojevi i Euler-Mascheronijeva konstanta

[Euler-Mascheronijeva konstanta](#) [harmonijski brojevi](#) [teorija brojeva](#)

Tomislav Burić i Lovro Sindičić
tomislav.buric@fer.hr

Sažetak

U ovom članku uvodimo pojam harmonijskih brojeva i objašnjavamo njihovu vezu s Euler-Mascheronijevom konstantom. Također proučavamo njihovu brzinu rasta povezujući je s logaritamskom funkcijom te prikazujemo neke zanimljive formule pomoću kojih se harmonijski brojevi mogu brzo i lako približno izračunati. Na kraju smo naveli neke primjene i probleme povezane s harmonijskim brojevima.

1 Uvod i motivacija

Niz racionalnih brojeva zadan općim članom $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, zovemo harmonijski niz. Napišimo prvih par članova ovog jednostavnog niza:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Ime mu potječe iz glazbe i teorije valova. Naime, svaki glazbeni ton sastoji se od prostih tonova - harmonika, koji se još nazivaju parcijalni ili alikvotni tonovi. Niz harmonika izgrađen na fundamentalnoj

frekvenciji f glasi $f, 2f, 3f, \dots$ pri čemu je $\lambda, \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{3}\lambda, \dots$ niz odgovarajućih valnih duljina harmonika.

U našem članku detaljnije ćemo se pozabaviti zbrojem prvih n članova harmonijskog niza. Takav zbroj nazivamo *harmonijski broj* i označavamo s H_n , odnosno

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Očigledno je svaki sljedeći harmonijski broj veći od prethodnog (jer su članovi harmonijskog niza pozitivni brojevi), odnosno niz harmonijskih brojeva je rastući. No taj rast je vrlo polagan, zbroj prvih deset članova harmonijskog niza iznosi približno 2.93, prvih sto 5.19, a zbroj prvih 1000 članova je svega 7.49. Prirodno se nameće pitanje je li rastući niz harmonijskih brojeva omeđen odozgo, odnosno konvergira li prema nekoj vrijednosti. Očito je harmonijski niz $\frac{1}{n}$ padajući i teži k nuli, no pokazat ćemo da usprkos tome niz harmonijskih brojeva divergira.

Grupirajmo pribrojnike n -tog harmonijskog broja na sljedeći način:

$$H_n = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16}} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Primjećujemo da su u prvoj grupi oba člana veća od $\frac{1}{4}$ pa je stoga njihov zbroj veći od $\frac{1}{2}$. Slično, u drugoj grupi je svaki od članova veći od $\frac{1}{8}$ pa je i njihov zbroj veći od $\frac{1}{2}$. Na isti način vidimo da je svaka daljnja grupa od 2^k članova veća od $\frac{1}{2}$. Dakle, ako H_n sadrži k takvih grupa, slijedi

$H_n > 1 + \frac{k}{2}$. S obzirom da k može biti po volji velik, niz harmonijskih brojeva nije omeđen odozgo, odnosno raste prema beskonačnosti.

Kao što smo već opazili, taj rast je vrlo polagan, da bismo došli do sume 10, trebali bismo zbrojiti preko prvih 12000 članova! Zanima nas kako konkretno možemo predočiti taj rast, to jest možemo li taj rast opisati nekom poznatom funkcijom. Time ćemo se baviti u sljedećem poglavlju.

Uz harmonijske brojeve se blisko veže i jedna zagonetna matematička konstantna o kojoj se još uvijek malo toga zna. Radi se o Euler-Mascheronijevoj konstanti koju označavamo s γ . Njenu vezu s

harmonijskim brojevima objasniti ćemo u trećem poglavlju.

Zatim će nas zanimati kako brzo i lako možemo izračunati n -ti harmonijski broj bez uzastopnog zbrajanja članova niza, odnosno njegovu aproksimaciju. U tu svrhu ćemo prikazati zanimljive formule za približno računanje harmonijskih brojeva.

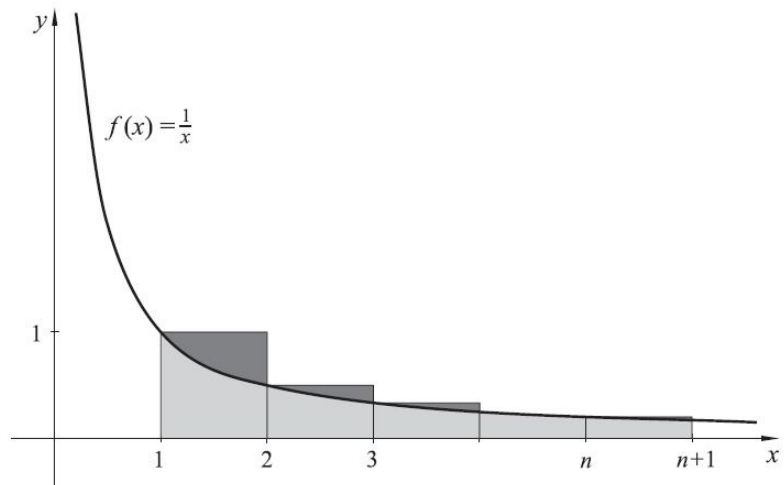
U posljednjem poglavlju navodimo neke popularne probleme u kojima se prirodno pojavljuju harmonijski brojevi.

2 Brzina rasta harmonijskih brojeva

Zaključili smo da niz harmonijskih brojeva sporo raste i divergentan je. Pokazat ćemo da se ta brzina rasta može dobro opisati logaritamskom funkcijom, naime vrijedi sljedeća ocjena

$$\ln(n + 1) < H_n \leq \ln n + 1. \quad (1)$$

Za dokaz prethodne nejednakosti koristimo se površinom ispod grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ i njenim aproksimacijama danim sumama površina odgovarajućih pravokutnika na segmentu $[1, n + 1]$, odnosno $[1, n]$.

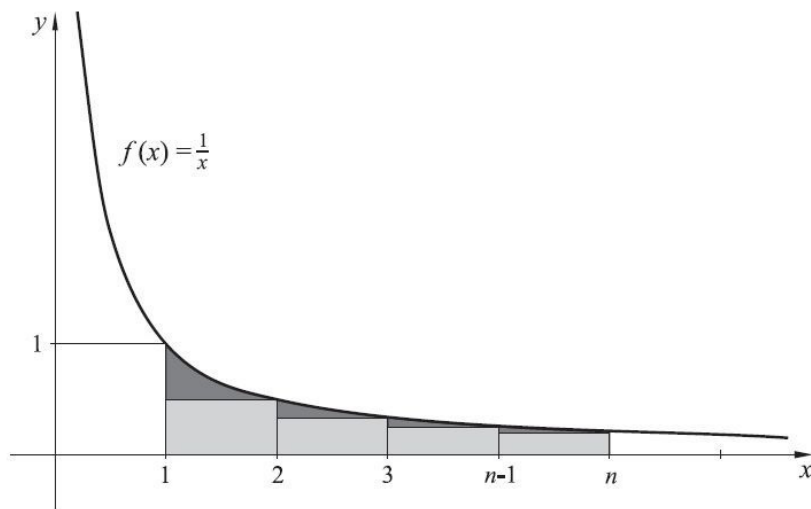


Slika 1:

Najprije segment $[1, n + 1]$ podijelimo na n jednakih podsegmenta duljine 1. Površina ipod grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ na segmentu $[1, n + 1]$ manja je od sume površina n pravokutnika čija je širina 1, a visina $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$, redom (vidi Sliku 1). Zaista, budući je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ padajuća, vrijedi $f(x) \leq \frac{1}{k}$ za svaki $x \in [k, k + 1]$, i $1 \leq k \leq n$. Još kažemo da smo na ovaj način načinili jednu aproksimaciju odozgo. Suma površina ovih n pravokutnika je jedna gornja Darbouxova suma, a nama je zanimljiva jer upravo predstavlja n -ti harmonijski broj H_n . S druge strane površina ispod grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ na segmentu $[1, n + 1]$ jednaka je određenom (ili Riemannovom) integralu funkcije f od 1 do $n + 1$. Korištenjem Newton-Leibnitzove formule dobivamo

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n + 1) - \ln 1 = \ln(n + 1),$$

i time smo pokazali nejednakosti $\ln(n + 1) < H_n$ u (1).



Slika 2:

Slično, površinu ipod grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ na segmentu $[1, n]$ aproksimiramo odozdo sumom površina $n - 1$ pravokutnika čija je širina 1, a visina $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$, redom (vidi Sliku 2). Ta suma predstavlja jednu donju Darbouxovu sumu i očito je jednaka $H_n - 1$. Vrijedi

$$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

pa smo opravdali i drugu nejednakost u (1).

3 Euler-Mascheronijeva konstanta

Pogledajmo ponovno Sliku 1. Iznad krivulje $y = \frac{1}{x}$ do pune površine pravokutnika nalaze se tamno sjenčani "viškovi" koji postaju sve manji. Primjerice, prvi višak iznosi $1 - \ln 2 = 0.307$, deseti višak je 0.005, a pedeseti je već 0.0001. Zbrojimo li prvih 50 viškova dobijemo 0.567, a zbroj prvih 1000

viškova je približno 0.577. Pokazat ćemo da njihov zbroj, odnosno niz $H_n - \ln n$ doista konvergira prema konstanti koja ima približnu vrijednost 0.5772.

Pokažimo prvo da je taj niz monoton. Razlika dva susjedna člana toga niza

$$(H_n - \ln n) - (H_{n+1} - \ln(n+1)) = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}$$

jednaka je određenom integralu funkcije $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n+1}$ na segmentu $[n, n+1]$, a budući je ta funkcija pozitivna na danom segmentu, njen određeni integral je također pozitivan. Dakle, niz $H_n - \ln n$ je padajući. On je i omeđen odozdo s nulom jer vrijedi

$$H_n - \ln n > \ln(n+1) - \ln n > 0.$$

Prvo smo koristili da je $H_n > \ln(n+1)$ prema (1), a zatim činjenicu da je logaritamska funkcija s bazom e rastuća.

Budući je monoton i omeđen niz realnih brojeva konvergentan, definirat ćemo Euler-Mascheronijevu konstantu γ kao limes toga niza

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n). \quad (2)$$

Klasifikacija Euler-Mascheronijeve konstante spada među poznatije otvorene probleme u matematici. Naime, još nije pokazano je li γ algebarski broj (poput $\sqrt{2}$, odnosno korijen polinoma s cjelobrojnim koeficijentima) ili transcendentan (poput π i e). Štoviše, zanimljivo je da se ne zna ni je li γ racionalan ili iracionalan broj! U slučaju da je racionalan, poznato je da bi mu nazivnik bio veći od 10^{242080} , za detalje vidi npr. [6]. Za kraj napišimo precizniju vrijednost te konstante na prvih 50 decimala

$$\gamma = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992\dots\dots$$

4 Aproximacije harmonijskih brojeva

Veza (2) nam omogućava da lako odredimo približnu vrijednost n -tog harmonijskog broja bez da moramo redom zbrajati n racionalnih pribrojnika, tj. vrijedi

$$H_n \approx \gamma + \ln n. \quad (3)$$

Formula je naravno točnija što je n veći. Primjerice, $H_{10} = 2.93$, a formula nam daje $H_{10} \approx 2.88$, $H_{100} = 5.187$, a formulom dobijemo $H_{100} \approx 5.182$, dok je za H_{1000} je još preciznija. No, htjeli bismo ipak bolju točnost, pogotovo za manje harmonijske brojeve. Postoje različita poboljšanja navedene formule, od kojih je najjednostavnija, a pritom i prilično točnija sljedeća:

$$H_n \approx \gamma + \ln\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (4)$$

Još bolja točnost se može dobiti dodavanjem još jednog člana u logaritamsku funkciju

$$H_n \approx \gamma + \ln\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{24n}\right). \quad (5)$$

Dokazano je da vrijedi i sljedeća aproksimacija logaritmom kvadratne funkcije

$$H_n \approx \gamma + \frac{1}{2} \ln\left(n^2 + n + \frac{1}{3}\right), \quad (6)$$

a nedavno su izvedene i aproksimacije logaritmom nekih racionalnih funkcija koje dodatno poboljšavaju točnost, npr.

$$H_n \approx \gamma + \ln \frac{n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{227}{240}n + \frac{107}{480}}{n^2 + n + \frac{97}{240}}. \quad (7)$$

U sljedećoj tablici ćemo prikazati usporedbu točnosti navedenih formula na deset decimala. Svaki redak odgovora redom gornjim formulama, dok je u zadnjem retku točna vrijednost n -tog harmonijskog broja. U stupcima su različite vrijednosti broja n .

Formula	$n = 10$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 1000$
(3)	2.8798007579	4.489238670	5.182385851	7.484970944
(4)	2.9285909221	4.499189001	5.187373392	7.485470819
(5)	2.9289876687	4.499205503	5.187377538	7.485470861
(6)	2.9289687083	4.499205339	5.187377518	7.485470861
(7)	2.9289682521	4.499205338	5.187377518	7.485470861
H_n	2.9289682539	4.499205338	5.187377518	7.485470861

Za detalje o ovim formulama i njihovim izvodima, kao i ostale najnovije formule za aproksimaciju harmonijskih brojeva, koje zahtijevaju malo složeniju matematičku analizu i poznavanje asimptotike, pogledajte [1].

5 Zanimljivosti i primjene

Za kraj navedimo neke od zanimljivih primjena i problema povezanih s harmonijskim brojevima.

Analiza obaranja rekorda. Primjerice, u meteorologiji nas zanima koliko će puta u nizu od n godina biti oboren temperaturni rekord ili najveća količina padalina. Uz pretpostavku da su vremenski uvjeti slučajni i neovisni o prethodnim godinama, broj oborenih rekorda u n godina je upravo jednak harmonijskom broju H_n . Npr. u 100 godina, $H_{100} \approx 5.19$ puta će biti oboren temperaturni rekord ljeti ili rekordna količina snježnih padalina zimi. Detaljnije o ovom problemu može se saznati u [4].

Problem sakupljanja kupona. Pretpostavimo da želimo sakupiti sve sličice za album Životinjskog carstva ili sve sličice nogometaša za aktualni album svjetskog prvenstva. Definirajmo slučajnu varijablu X kao broj kupljenih kupona kojima smo popunili cijeli album od n sličicu te neka slučajna varijabla X_i predstavlja broj kupnji kojima smo dobili novu sličicu nakon što smo već sakupili $i - 1$ sličica, $i = 1, \dots, n$. Budući slučajna varijabla X_i mjeri broj ponavljanja slučajnog pokusa do prve realizacije povoljnog događaja, ona ima geometrijsku razdiobu s vjerojatnosti $p_i = \frac{n-(i-1)}{n}$ čije je očekivanje $E(X_i) = \frac{1}{p_i}$, vidi npr. [3]. Zbog linearnosti očekivanja slijedi

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \dots + \frac{n}{1} = n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1 \right),$$

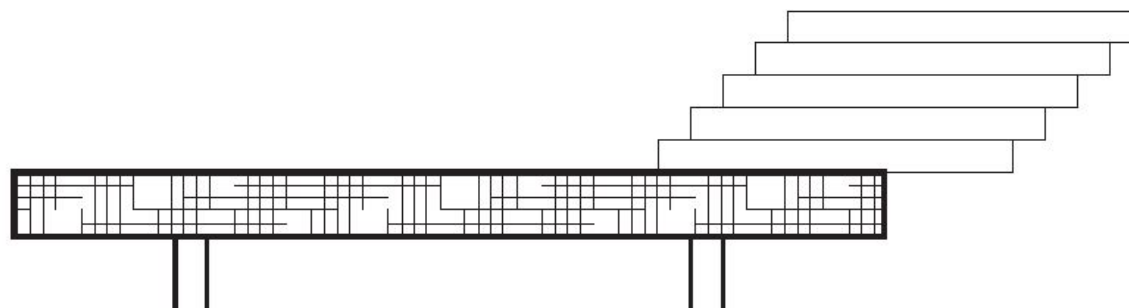
odnosno očekivani broj kupnji da bismo sakupili sve sličice jednak je $n H_n$. Primjerice, za popuniti album od 50 sličica, u prosjeku ćemo morati kupiti $50 H_{50} \approx 225$ kupona ili čokoladica sa sličicama.

Crvić na gumenoj traci. Crvić puzi konstantnom brzinom od 1 centimetar po minuti s jednog kraja trake na drugi, no gumena traka duga 1 metar se svake minute rastegne za još 1 metar. Preciznije, nakon prve minute crvić je prešao 1 cm, tj. 1/100 dio trake, no budući se ona rastegnula na 2 metra, ostalo mu je još 198 cm. U drugoj minuti je prešao 1/200 dio trake, tj. ukupno 3 cm, no nakon rastezanja nalazi se 4.5 cm od početka, odnosno treba puzati još 295.5 cm. Pitanje je hoće li na taj način crvić ikada dopuzati do kraja trake? Crvićev put nakon n minuta jednak je

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \dots + \frac{1}{100n} = \frac{H_n}{100}$$

te zbog neomeđenosti niza harmonijskih brojeva, H_n može biti dovoljno velik tako da crvić doista dođe do kraja trake, ali će mu trebati jako puno vremena. Za detalje o ovom zanimljivom problemu pogledajte [8].

Problem postavljanja pločica. Radi se o matematičko-fizičkom problemu postavljanja n istih pločica (ili n knjiga istih dimenzija i mase) na rub stola na način da je svaka pločica pomaknuta malo dalje preko ruba stola od prethodne, a tako da se cijela konstrukcija ne sruši (vidi Sliku 3). Takva konstrukcija će ostati stabilna ako se težište sistema od n postavljenih pločica nalazi najviše do ruba stola, inače će se srušiti. U [5] je objašnjen ovaj problem i pokazano je da maksimalna udaljenost od ruba stola za n pločica duljine 2 cm iznosi upravo H_n . Zbog neomeđenosti niza harmonijskih brojeva, H_n može biti po volji velik, odnosno pločice se mogu poslagati jedna na drugu po volji daleko preko ruba stola, a tako da cijela konstrukcija ne padne sa stola!



Slika 3:

Bibliografija

- [1] T. Burić, N. Elezović, *Approximants of the Euler-Mascheroni constant and harmonic numbers*, Applied Mathematics and Computation **222** (2013), 604-611.
- [2] N. Elezović, *Gama funkcija i Bernoullijevi brojevi*, skripta iz kolegija Kompleksna analiza, FER, Zagreb, http://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Elezovic_-_skripta3.pdf
- [3] N. Elezović, *Vjerojatnost i statistika, Diskretna vjerojatnost*, Element, Zagreb, 2007.
- [4] F.G. Foster, A. Stuart, *Distribution-free Tests in Time-Series Based on the Breaking of Records*, Journal of the Royal Statistical Society **16** (1954), 1-22.
- [5] Ž. Hanjš, *Statika stupca domina i harmonijski brojevi*, Matematičko-fizički list LIV, 2003./04.
- [6] J. Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*, Princeton University Press, 2003.
- [7] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison Wesley Publishing Company, 1995.
- [8] D. Žubrinić, *Harmonijski brojevi*, Matematičko-fizički list LII, 2001./02.



ISSN 1334-6083
© 2009 **HMD**