Stručni rad
Prihvaćeno 30.09.1996

JOSIP DVORNIK

Generiranje glatkih funkcija na složenom području pomoću R-funkcija

Generating Smooth Functions on Compound Domain by R-functions
ABSTRACT
The analytical procedure for generating smooth functions on compound domain is described. This procedure is based on the R-function method developed by Ukranian mathematician L. V. Rvačev. The R-functions are ordinary continous functions of continous variables, but the analogy with Boolean functions in mathematical logics makes their generating easier. In this paper the computer program for generating and drawing R-functions in central projection is presented. The program has been made in MATHEMATICA language. The application of program has been illustrated by several examples.
Key Words
R-functions, MATHEMATICA, Boolean functions

Generiranje glatkih funkcija na složenom području pomoću R-funkcija
SAŽETAK
Opisuje se analitički postupak za generiranje glatkih funkcija nad složenim područjem. Postupak se zasniva na metodi R-funkcija koju je razvio ukrajinski matematičar V. L. Rvačev. R-funkcije su obične neprekidne funkcije neprekidnih varijabli, ali su analogne Booleovim funkcijama u matematičkoj logici, čime je olakšano njihovo generiranje. Također je pokazan program za elektroničko računalo, napisan u jeziku MATHEMATICA, za generiranje i crtanje R-funkcija u perspektivi. Upotreba programa prikazuje se na nekoliko primjera.
Ključne riječi
R-funkcije, MATHEMATICA, Booleove funkcije

UVOD

Često je u primjenama potrebno "napuhati" glatku funkciju nad složenim područjem. Primjer je definiriranje koordinatnih funkcija za Ritzovu metodu.

Taj se problem može lako riješiti numeričkim metodama, pa se najčešće tako i postupa. U ovom se članku opisuje vrlo jednostavan, zanimljiv i djelotvoran analitički postupak čiji je autor ukrajinski matematičar V. L. Rvačev. Također je uvršten program za elektroničko računalo, koji ilustrira visoku djelotvornost jezika MATHEMATICA u rješavanju sličnih problema.

FORMULACIJA PROBLEMA

Zadano je dvodimenzionalno područje omeđeno dijelovima analitički definiranih glatkih krivulja. Treba generirati plohu (funkciju $\omega(x,y)$) koja zadovoljava sljedeće uvjete:

1. Derivabilna je na cijelom području.

Funkcija i njezine derivacije su neprekidne i konačne (osim u okolinama singularnih točaka - lomova konture itd.).

2. Unutar područja su vrijednosti funkcije pozitivne, a izvan područja negativne. [1]

3. Vrijednost funkcije na rubu jednaka je nuli.

R-FUNKCIJE

Očigledno je da opisani problem ima u svakom konkretnom slučaju beskonačno mnogo rješenja. Obično je dovoljno odrediti jedno od njih.

Slijedeći postupak razvio je V. L. Rvačev i nazvao ga metodom R-funkcija.

R-funkcije su obične neprekidne funkcije, neprekidnih argumenata, ali su po nekim svojstvima analogne funkcijama Booleove algebre. Svojstvu istinitosti iz Booleove algebre pridruženo je svojstvo pozitivnosti R-funkcije $f>0$, dok je neistinitosti pridruženo svojstvo negativnosti R-funkcije $f<0$.[2]

Proizvoljna funkcija koja zadovoljava navedene uvjete je po definiciji R-funkcija.

Mnoge su jednostavne funkcije R-funkcije. Na primjer, funkcija $\omega(x,y) = 1-x^2-y^2$ je R-funkcija nad jediničnim krugom. Očigledno, ako se točka (x,y) nalazi unutar jediničnog kruga, vrijednost funkcije $\omega(x,y)$ je pozitivna. Ako se točka nalazi na kružnici, vrijednost je funkcije jednaka nuli, a ako pada izvan kruga, vrijednost funkcije je negativna.

Složenije R-funkcije dobivaju se iz jednostavnijih pomoću sljedećih R-operacija:

1. **R-negacija** (oznaka $\neg p$)

$$-p$$

Kako je spomenuto, pozitivnost R-funkcije pridružena je istinitosti odgovarajuće Booleove funkcije. Razum-

[1] U mnogim se primjenama ovaj uvjet može ublažiti, ako nije važno kakve su vrijednosti funkcije izvan područja

[2] Nejasno je koju vrijednost istinitosti treba pridružiti točkama ravnine u kojima je vrijednost funkcije jednaka nuli. Sam je autor Rvačev pridružio True, ali to vodi u kontradikciju: R-negacija od vrijednosti 0 je također jednaka nuli što je onda opet True, a po definiciji negacije trebalo bi biti False. Najispravnije je reći da je u točkama u kojima je vrijednost funkcije jednaka nuli pripadna vrijednost istinitosti nedefinirana.

ljivo je da zbog toga promjena predznaka R-funkcije odgovara logičkoj negaciji.

2. **R-konjunkcija** (oznaka $p \wedge q$)

$$p+q-\sqrt{p^2+q^2+2\alpha\, pq}$$

3. **R-disjunkcija** (oznaka $p \vee q$)

$$p+q+\sqrt{p^2+q^2+2\alpha\, pq}$$

α je konstanta koja mora zadovoljavati uvjet: $-1<\alpha<1$.[3] (U priloženom je programu, kao najjednostavnije, odabrano $\alpha = 0$.)

4. **R-ekvivalencija** (oznaka $p \approx q$)

$$pq$$

R-operacija koja odgovara ekvivalenciji je obično množenje funkcija! U Booleovoj algebri dvije funkcije p i q su ekvivalentne ako imaju istu vrijednost istinitosti (ako su obje istinite ili obje lažne), što je pridruženo svojstvu operacije množenja: produkt p i q je pozitivan ako su obje funkcije istog predznaka (ako su obje funkcije "istinite" ili obje "lažne" u smislu R-funkcija).

Posebna R-operacija ekvivalencije mogla bi se izostaviti jer se može izraziti pomoću ostalih operacija: konjunkcije, disjunkcije i negacije. (Rvačev je nije ni definirao.) Ipak, upotrebom R-ekvivalencije najčešće se dobivaju mnogo jednostavniji izrazi.

Analogija između Booleovih i R-operacija može se neposredno provjeriti (>0 se interpretira kao True, <0 kao False, a =0 kao nedefinirana vrijednost istinitosti):

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \approx q$
<0	<0	>0	<0	<0	>0
<0	=0	>0	<0	=0	=0
<0	>0	>0	<0	>0	<0
=0	<0	=0	<0	=0	=0
=0	=0	=0	=0	=0	=0
=0	>0	=0	=0	>0	=0
>0	<0	<0	<0	>0	<0
>0	=0	<0	=0	>0	=0
>0	>0	<0	>0	>0	>0

Napominje se da postoje i druge funkcije za operacije konjunkcije i disjunkcije, koje se ponašaju analogno Booleovim funkcijama (one se također zovu R-funkcije).

PROGRAM ZA R-FUNKCIJE U JEZIKU MATHEMATICA

U jeziku MATHEMATICA oznaka za logičku negaciju funkcije `p` je `!p`, za konjunkciju dviju funkcija `p` i `q`, `p&&q`, a za disjunkciju istih funkcija `p||q`. Zbog preglednosti iste su oznake upotrebljene i u programu za R-funkcije. Za ekvivalenciju nije upotrijebljena posebna oznaka nego je zadržana standardna oznaka za množenje (razmak ili znak `*`). Program je koncipiran rekurzivno. Time se omogućuje da jednostavnije funkcije služe za generiranje složenijih. Naredba broj 5 služi da se prekine rekurzija jer odsustvo oznaka `!`, `*`, `&&` i `||` znači da funkciju ne treba dalje raščlanjivati. Ostale naredbe definiraju generiranje složenijih R-funkcija iz jednostavnijih, prema formulama za R-operacije.

```
1 R[!p_]:=-R[p]                                        negacija
2 R[p_*q_]:=R[p]*R[q]                                  ekvivalencija
3 R[(p_)&&(q_)]:=R[p]+R[q]-Sqrt[R[p]^2+R[q]^2]         konjunkcija
4 R[(p_)||(q_)]:= R[p]+R[q]+Sqrt[R[p]^2+R[q]^2]        disjunkcija
5 R[p_]:=p
```

Programu još treba dodati naredbu `Rplot` za 3D crtanje R-funkcija dobivenu uz pomoć postojeće naredbe `Plot3D` za crtanje ploha u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Pozivom naredbe crtaju se tri slike: prva je generirana ploha definirana R-operacijama, druga dio horizontalne ravnine, a treća kombinirana slika kojom se ponovo prikazuje generirana ploha, ali prerezana horizontalnom ravninom $z = 0$. U naredbi `Rplot` mogu se upotrijebiti opcije naredbe `Plot3D`.

```
6 Rplot[f_,mx_,my_,opts_ _ _]:=
    Module[{p1,p2},
    p1=Plot3D[R[f],mx,my,opts];
    p2=Plot3D[0,mx,my,PlotPoints->2,opts];
    Show[p1, p2]]
```

Kako se vidi, program je vrlo kratak. Pokušajte zamisliti duljinu i složenost ekvivalentnog programa u nekom drugom programskom jeziku!

PRIMJERI

Primjer 1

Unija dvaju krugova

Zadana su dva kruga polumjera r = 2.0 sa središtima u točkama s koordinatama (1.5, 0.0) i (-1.5, 0.0).

Odgovarajuće se funkcije, prema sintaksi jezika MATHEMATICA, pišu:

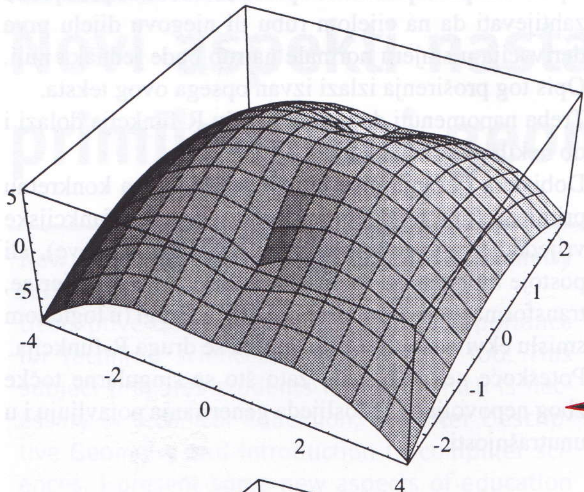
```
S1=4-(x-1.5)^2-y^2
S2=4-(x+1.5)^2-y^2
```

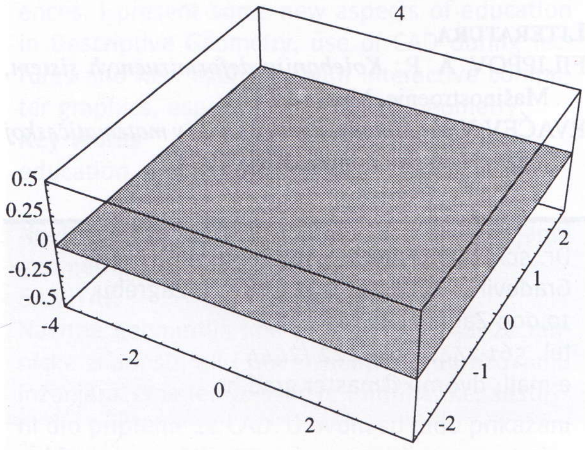
Vrijednost funkcije `S1` je pozitivna ("istinita") unutar prvog kruga, a `S2` unutar drugoga. Funkcija $\omega(x,y)$ na složenom području, uniji oba kruga, definirana je pomoću R-disjunkcije. U sjecištima osnovnih kružnica su konkavni lomovi konture. To su singularne točke u kojima su prve derivacije neodređeni izrazi 0/0, a druge derivacije teže u beskonačnost.

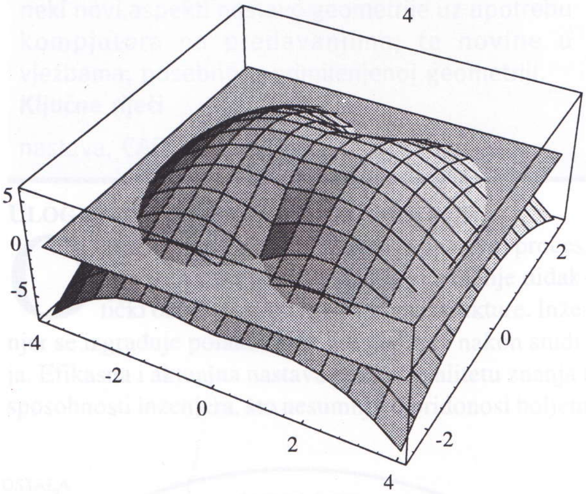
U opisanom programu i jeziku MATHEMATICA generiranje i crtanje funkcije $\omega(x,y)$ postiže se naredbom:

[3] Kad bi konstanta α poprimila vrijednost 1 ili -1, izraz pod drugim korijenom bi postao potpuni kvadrat, što bi dovelo do degeneracije izraza za R-operacije.

```
Rplot[S1||S2,{x,-4,4},{y,-2.5,2.5}]
```







Ako se slika želi modificirati tako da se izmijeni gustoća mreže, izostave negativni dijelove plohe i graduirani bridovi kvadra unutar kojeg je ploha smještena te promijene točka motrišta i boja, to se postiže dodavanjem odgovarajućih opcija naredbi za crtanje:

```
Rplot[S1||S2,{x,-4,4},{y,-2.5,2.5},
PlotPoints->31,PlotRange->{0,7}
Boxed->False,Axes->False,Ticks->None,
ViewPoint->{2,-3,0.5},ColorOutput->M]
```

Primjer 2

3/4 kruga

S1=x

(poluravnina $x > 0$)

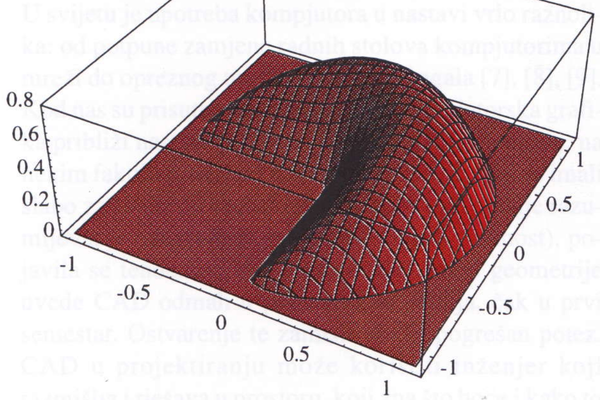
S2=y

(poluravnina $y > 0$)

S3=1-x^2-y^2

(jedinični krug sa središtem u ishodištu)

Naredbom `S4=R[S1||S2]` definira se zatim 3/4 ravnine, a konačno rješenje zadatka je `S5=S4&&S3` ili, bez upotrebe pomoćnih varijabli, `S5=(x||y)&&(1-x^2-y^2)`. Detalji naredbe za crtanje neće se više ponavljati.



Primjer 3

Područje oblika "gljive"

Osnovne funkcije su:

S1=1/4-x^2

(beskonačna vrpca među pravcima $x = -1/2$, $x = 1/2$)

S2=1-y

(poluravnina ispod pravca $y = 1$)

S3=-y

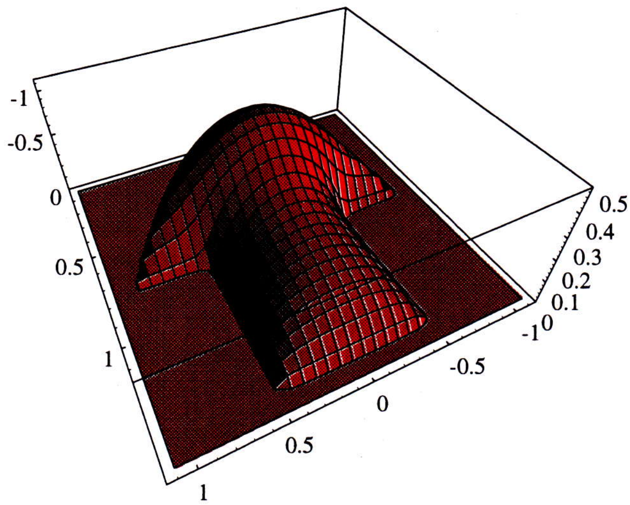
(poluravnina ispod pravca $y = 0$)

S4=y-x^2+1

(područje unutar parabole $y = x^2-1$)

R-funkcija nad "gljivastim" područjem:

S5=[(S1&&S2)||S3]&&S4



ZAKLJUČNE NAPOMENE

Opisani se postupak može i proširiti. Može se primjerice zahtijevati da na cijelom rubu ili njegovu dijelu prva derivacija u smjeru normale na rub bude jednaka nuli. Opis tog proširenja izlazi izvan opsega ovog teksta.

Treba napomenuti da u generiranju R-funkcija dolazi i do nekih poteškoća:

Dobivena rješenja nisu uvijek prikladna za konkretnu primjenu (npr. na dijelu područja mogu biti funkcijske vrijednosti prevelike u odnosu na ostale dijelove), ali postoje mogućnosti različitih modifikacija. Primjerice, transformacijom Booleove funkcije u drugi (u logičkom smislu ekvivalentni) oblik dobiva se druga R-funkcija.

Poteškoće nekad nastaju zato što se singularne točke zbog nepovoljnog redoslijeda generiranja pojavljuju i u unutrašnjosti.

LITERATURA

FILIPPOV, A. P.: *Kolebanija deformiruemyh sistem*, Mašinostroenie, Moskva, 1970.

RVAČEV, V. L.: *Metody algebry logiki v matematičeskoj fizike*, Naukova dumka, Kiev, 1974.

Dr. sc. Josip Dvornik, dipl. ing. građ.
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
10.000 Zagreb, Kačićeva 26
tel. 561-244, 4561-222 /2444
e-mail: dvornik@master.grad.hr