

Originelle wissenschaftliche Arbeit
Angenommen 08. 10.1997

IVANKA BABIĆ, BRANKO KUČINIĆ

Hyperbolische Perspektive I

Dieser Artikel ist dem Herrn Prof. Akademiker Dr. sc. S. Bilinski gewidmet, weil er in unseren Kreisen die Forschungen über das Projizieren im hyperbolischen H^3 -Raum initiierte und weil er unser Professor war.

Hyperbolic Perspective I ABSTRACT

In the hyperbolic space the central projection is considered, adjusted to the perspective, by defining the image plane and centre of projection, and the reference plane perpendicular to the image plane. This is the analogy of the so called piercing point method in the Euclidean space supplemented by indefinitely distant elements. The analogue of the method of Monge in H^3 -space realised on M-model enables necessary constructive procedures. The position and metric relations associated with the reference plane are also worked out thoroughly. Thus, the whole procedure is prepared to be applied.

Basic differences from the perspective of Euclidean space are: h-horizon is hyperbola, there is avoidable hyperbola instead of avoidable line, and the pencils of parallel lines in the plane (1 can be projected into the elliptic, parabolic and hyperbolic pencils (Theorem 3).

Keywords:

hyperbolic space, H-model, central projection, perspective, piercing point method

Hiperbolička perspektiva I SAŽETAK

U hiperboličkom prostoru razmatra se centralno projiciranje, prilagođeno za perspektivu, tako da se definira ravnina slike i centar projiciranja, te osnovna ravnina okomita na ravninu slike. Ovo je analogija tzv. metode probodišta u euklidskom prostoru nadopunjenom neizmjereno dalekim elementima. Analogon Mongeove metode u H^3 -prostoru ostvaren na M-modelu omogućuje potrebne konstruktivne postupke. Razrađeni su položajni i metrički odnosi vezani uz osnovnu ravninu. Time je čitav postupak pripremljen za primjenu.

Osnovne razlike od perspektive euklidskog prostora su: h - horizont je hiperbola, postoji izbjegna hiperbola umjesto izbjegnog pravca, a pramenovi paralelnih pravaca ravnine P_1 mogu se preslikati u eliptičke, paraboličke ili hiperboličke pramenove (Teorem 3).

Ključne riječi:

hiperbolički prostor, M-model, centralna projekcija, perspektiva, metoda probodišta

In dieser Arbeit wird das Problem der Konstruktion einer Perspektive im M-Modell des hyperbolischen H^3 -Raumes erforscht. Das Grundziel der Arbeit ist die Perspektivbilder von der Reel-objekten zu konstruieren, die auch selbst reelle Bilder sind. Die Methode, wodurch das erreicht wird, ist die Durchschnittsmethode. Damit die Zentralprojektion zur Perspektive wird, soll man die Elemente für die Konstruktion des perspektivischen Bildes auf einer Bildebene so organisieren, daß die Eindeutigkeit erreicht wird. Eine Perspektive entsteht dabei wie im euklidischen Raum durch Projektion eines Objekts aus einem Punkt auf eine Bildebene. Dabei werden die Ergebnisse über die Zentralprojektion aus [8] und [9], über die darstellende Geometrie im hyperbolischen H^3 -Raum aus [1], [3], [4] und über das M-Modell aus [2] benützt.

Es sei im H^3 -Raum ein Paar zueinander senkrechten – Ebenen Π_1 und Π_2 und ein eigentlicher Punkt O als Projektionszentrum ($O \notin \Pi_1$, $O \notin \Pi_2$) angegeben. Π_1 und Π_2 werden als Grundriß bzw. Aufrißebene für die Mongeer Methode gemäß [1], [3], [4] verwendet. Weiters bezeichnen wir Π_1 auch als Grundebene und Π_2 ist die Bildebene für die Zentralprojektion. Damit wird die Zentralprojektion eines Raumteiles auf die Bildebene bzw. Aufrißebene Π_2 eindeutig definiert, die analog zur Durchschnittsmethode im euklidischen Raum ist [7].

Die Projektionsstrahlen, die die Bildebene in den eigentlichen Punkten durchstoßen, bilden das Innere des Parallelkegels Φ , dessen Spitze das Projektionszentrum O , der sogenannten Augpunkt, der Perspektive ist. Der Abstand d des Zentrums O von der Bildebene Π_2 ist die Paralleldistanz (Abb.1.: im Profil die Ebene Γ). Das bedeutet, daß nur von solchen Objekten die sich innerhalb des Parallelkegels Φ befinden, ein reelles Bild existiert. Wegen der Eindeutigkeit soll die Seite des Parallelkegels Φ , die gegensätzlich der Ebene Π_2 in

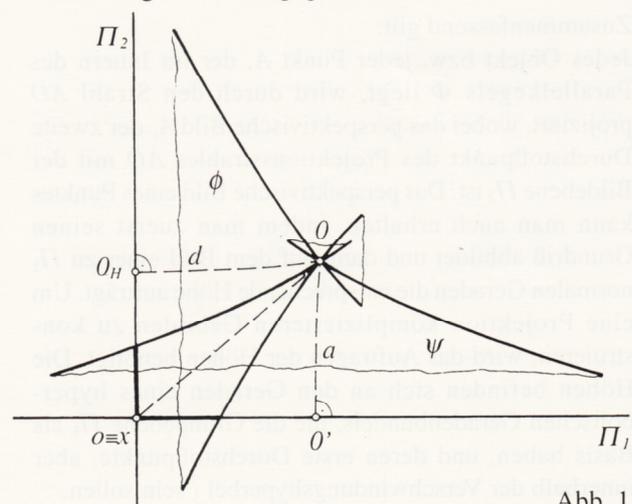


Abb. 1

bezug O ist, vernachlässigt werden. Analog zum euklidischen bezeichnet man den Parallelkegel Φ als *Verschwindungskegel*, weil seine ganze Oberfläche auf die Grenzpunkte der Bildebene Π_2 projiziert wird.

Analog gibt es einen Parallelkegel Y aller Parallelen zu P_1 mit der Spitze O und der Distanz a zu P_1 . Die Erzeugende von Y projizieren die Grenzpunkte der Grundebene P_1 . Auch hier soll die Seite des Parallelkegels Y , die gegensätzlich der Ebene P_1 in bezug O ist, vernachlässigt werden. Für die weitere Untersuchungen ist es wichtig die Schnittkurve des Parallelkegels Y mit der P_2 -Ebene zu bestimmen.

Definition

Die Schnittkurve des Parallelkegels Ψ und der Bildebene Π_2 nennt man die *h - Horizont*.

Das ist die Menge der Punkte der P_2 -Ebene, die die perspektivischen Bilder von den Grenzpunkten der Ebene P_1 sind. Diese Schnittkurve ist offensichtlich ein Hyperbelast h , wobei der andere Ast dieser Hyperbel reell sein kann oder nicht. Sie hat jedoch keinerlei Bedeutung, da die andere Seite des Parallelkegels Y vernachlässigt wird.

Die wichtige Rolle hat auch die Schnittkurve des Verschwindungskegels Φ mit der Π_1 -Ebene. Man kann beweisen, daß diese Kurve auch eine Hyperbel ist.

Definition

Die Schnittkurve des Verschwindungskegels Φ und der Grundebene Π_1 nennt man die *Verschwindungshyperbel* und bezeichnet man mit i .

Die Verschwindungshyperbel i ist die Menge von den Punkten der P_1 -Ebene, deren perspektivischen Bilder die Grenzpunkte der Bildebene P_2 sind.

Die Grundfläche von Objekten mit reellen perspektivischen Bilder müssen im Innern der Verschwindungshyperbel i liegen.

Der reelle Schnitt der Parallelkegel Φ und Ψ mit der gemeinsamen Spitze O besteht aus zwei Erzeugenden durch O , die parallel zur x -Achse sind (Abb. 1).

Zusammenfassend gilt:

Jedes Objekt bzw. jeder Punkt A , der im Innern des Parallelkegels Φ liegt, wird durch den Strahl AO projiziert, wobei das perspektivische Bild A_c der zweite Durchstoßpunkt des Projektionsstrahles AO mit der Bildebene Π_2 ist. Das perspektivische Bild eines Punktes kann man auch erhalten, indem man zuerst seinen Grundriß abbildet und dann auf dem Bild einer zu Π_1 normalen Geraden die entsprechende Höhe aufträgt. Um eine Projektion komplizierteren Gebilden zu konstruieren, wird das Auftragen der Höhen benötigt. Die Höhen befinden sich an den Geraden eines hyperbolischen Geradenbündels, die die Grundebene Π_1 als Basis haben, und deren erste Durchstoßpunkte, aber innerhalb der Verschwindungshyperbel i sein sollen.

Im M -Modell [2] wird das hyperbolische H^3 -Raum in der Möbius-Ebene auf folgende Weise interpretiert: Die Kreise und die Geraden der Möbius-Ebene sind die Randbilder der Ebenen des H^3 -Raumes.

Die Paare verschiedener Punkte der Möbius-Ebene sind die Bilder der Grenzpunkte der Geraden des H^3 -Raumes. Ein geordnetes Punktetripel der Möbius-Ebene bestimmt das Bild eines Punktes auf der Trägergeraden des H^3 -Raumes, wobei die erste zwei Punkte die Bilder der Grenzpunkte dieser Trägergeraden sind.

Die Inzidenz ist im gewöhnlichen Sinne: eine Gerade gehört der Ebene an, wenn ihre Grenzpunkte mit dem Randbild der Ebene inzident sind.

Wir betrachten das Analogon der Mongeer Methode des orthogonalen Projizierens auf ein Paar zueinander senkrechten Ebenen Π_1 und Π_2 im M -Modell [1], [3], [4]. Eine so realisierte konstruktive Bearbeitung des H^3 -Raumes läßt die Konstruktionen mit dem euklidischen Lineal und dem Zirkel zu.

Die Bildebene Π_2 , die Grundebene Π_1 , die senkrecht zur Π_2 -Ebene ist, und der Augpunkt O , wurden auf dem Bild 1a. im M -Modell dargestellt. Die Schnittgerade der Grundebene Π_1 und der Bildebene Π_2 ist die Spurgerade $o \equiv x$ von der Ebene Π_1 . Die von den Normalen auf Π_1 und Π_2 durch O aufgespannte Ebene Γ schneidet die Ebene Π_1 längs der Geraden g_1 und die Ebene Π_2 längs der Geraden g_c . g_1 ist senkrecht zur Spurgeraden $o \equiv x$ durch den Grundriß O' des Augpunktes O . g_c ist senkrecht auch zur Spurgeraden $o \equiv x$ durch den Aufriß $O'' \equiv O_H$, den sogenannten Hauptpunkt.

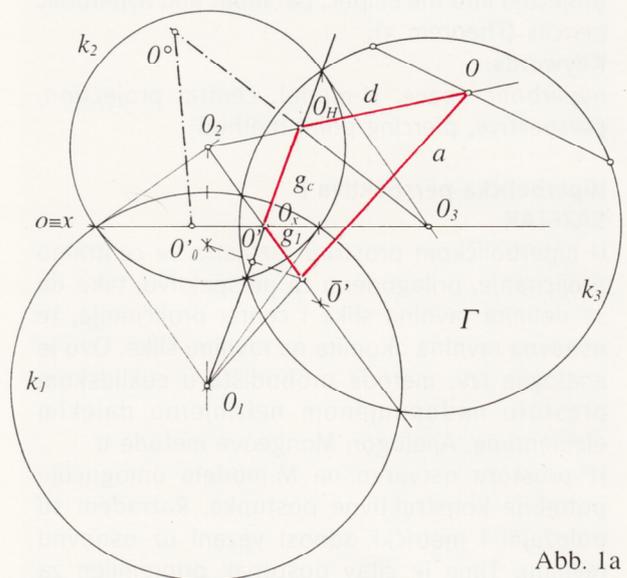


Abb. 1a

Nach der Rotation der Grundebene Π_1 um die Spurgerade $o \equiv x$ in die Bildebene Π_2 nach dem dargestellten Verfahren in [3], liegen die Punkte O' und O_H auf derselben Geraden $g_c \equiv g_1$ der Bildebene. Wahre Längen der Distanzen d und a sind auf dem umgeklappten Lambert'schen Viereck $O O_H O_x O'$ in die Bildebene Π_2 zu sehen, dabei gilt:

$$d_o = O_o O_H a_o = O_o O'_o \quad (\text{Abb. 1a}).$$

Die Verschwindungshyperbel i wird so konstruiert, daß man die ersten Durchstoßpunkte der Kegelerzeugende Φ nach der Konstruktionen in [3] bestimmt. Da es sich um einen Verschwindungskegel handelt, deckt sich der Aufriß seiner Basis mit k_2 (Abb.2). Die Achse dieses Kegels ist zu Π_1 überparallel und seine vier Erzeugende sind zu Π_1 parallel (mit der Distanz a). Die Grenzpunkte der zwei zur x -Achse parallel Erzeugenden sind gleichzeitig die reellen zwei Grenzpunkte des Kegelschnitts i , der noch zwei verschiedene Grenzpunkte hat. Daraus geht hervor, daß diese Kurve 2. Ordnung gemäß [5] eine Hyperbel ist.

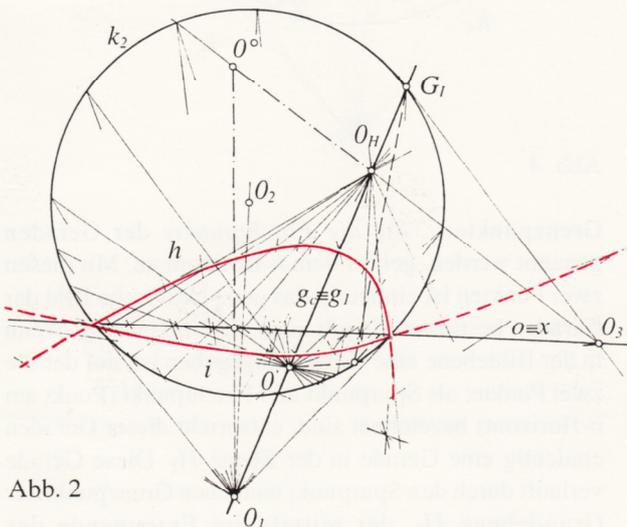


Abb. 2

In der Bildebene wird der h -Horizont so bestimmt, daß die zweiten Durchstoßpunkte der Kegelerzeugende Ψ auf Grund [3] konstruiert werden (Abb.2). In diesem Fall ist der Grundriß der Kegelbasis Ψ mit der Bildebene Π_2 gedeckt.

GERADEN DER GRUNDEBENE Π_1

In der Grundebene Π_1 , die gleichzeitig die Grundrißebene ist, sollen die Geraden hervorgehoben werden, die zur Spurgeraden $o=xi$ senkrecht sind und die Mengen der Geraden, die überparallel zur Spurgeraden $o=xi$ sind. (Abb.3).

Die Geraden, die zur Spurgeraden $o=xi$ senkrecht sind, bilden ein hyperbolisches Geradenbüschel, deren Geraden die p -Geraden genannt werden und den Falllinien in der Ebene analog sind [3]. Das Perspektivbild jeder von diesen Geraden bekommt man so, daß durch diese p -Geraden und den Augpunkt O eine Hilfsebene gelegt wird. Jede solche Ebene ist zur Bildebene Π_2 senkrecht und das ist eine sogenannte zweitprojizierende Ebene. Ihre Schnittgerade mit der Ebene Π_2 ist der zweite Spurgerade dieser Ebene, die das Perspektivbild der p -Geraden enthält. Alle diese Ebenen bilden ein Ebenenbüschel, dessen Träger die Gerade OO_1 ist, die durch den Augpunkt O und den Scheitelpunkt O_1 des p -Geradenbüschels verläuft. Alle zweite Spurgeraden dieser Ebenen bilden ein elliptisches Geradenbüschel in der Bildebene Π_2 , dessen Scheitelpunkt der Punkt O_H ist (wegen $OO_H \perp \Pi_2$). Jeder von diesen zweiten

Spurgeraden schneidet die Spurgerade $o=xi$ in einem Punkt, der der Durchstoßpunkt der zugehörigen p -Geraden mit der Bildebene Π_2 ist. Dem nach kann das perspektivische Bild jeder von den p -Geraden so bestimmt werden, daß durch ihren Durchstoßpunkt, zum Beispiel $P \in o=xi$, und durch den Punkt O_H die p_c -Gerade aufgestellt wird. Der Schnittpunkt P_{lh} auf diese Weise gewonnenen p_c -Geraden mit der h -Horizont ist das Perspektivbild einer von den Grenzpunkten der p -Geraden. Der Schnittpunkt K der p_c -Geraden mit dem Randbild der Bildebene Π_2 ist der Durchstoßpunkt dieser p -Geraden mit der Verschwindungskegel Φ . Das perspektivische Bild des Teiles der p -Geraden vom Punkt K außerhalb des Parallelkegels Φ ist uneigentlich (ideell)

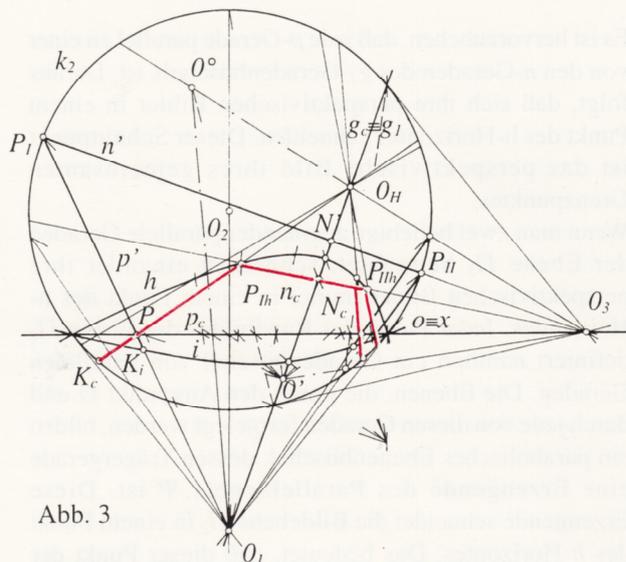


Abb. 3

Theorem 1

Das perspektivische Bild des Büschels der überparallelen p -Geraden der Ebene Π_1 ist ein elliptisches Geradenbüschel, dessen Scheitelpunkt der Punkt O_H ist.

Jede p -Gerade definiert, nach angeführten Theoremen in [3] und [1], ein Büschel der n -Geraden, dessen Geraden zur Spurgeraden $o=xi$ überparallel sind. Es ist wichtig in der Ebene Π_1 jenes Geradenbüschel der n -Geraden hervorzuheben, dessen Trägergerade, die durch den Punkt O' verlaufende p -Gerade, sogenannte g_1 -Gerade, ist. In diesem Fall ist die g_1 -Gerade auch die gemeinsame Senkrechte des Büschels der n -Geraden, was nach den bewiesenen Tatsachen in [1] gilt. Der Scheitelpunkt dieses Büschels ist der uneigentliche (ideelle) Punkt O_3 (Abb.3). In diesem Fall bilden die festgelegten Ebenen durch den Augpunkt O und jede von den n -Geraden ein Ebenenbüschel, dessen Trägergerade die Gerade OO_3 ist. Die zweiten Spurgeraden dieser Ebenen, in denen die perspektivischen Bilder der n -Geraden liegen, sind zueinander überparallel. Sie bestimmen ein Geradenbüschel mit dem Scheitel O_3 und mit der gemeinsamen Senkrechten g_c . Also, um das perspektivische Bild einer von den n -Geraden bestimmen zu können, genügt es, das Bild nur eines Punktes dieser

n -Geraden zu konstruieren. Das kann das Bild einer von ihren Grenzpunkten sein, der mit der h -Horizont inzident ist, oder der Schnittpunkt N der Geraden n und g_1 . Der Punkt N_c liegt dann auf der Geraden g_c , weil der Projektionsstrahl NO in der Ebene Γ liegt und die Bildebene Π_2 auf der g_c -Geraden durchstößt. Bei dieser Abbildung werden einige n -Geraden aus dem Geradenbüschel O_3 in den uneigentlichen n_c -Geraden abgebildet.

Theorem 2

Das perspektivische Bild eines Büschels von überparallelen n -Geraden, dessen Trägergerade eine p -Geraden in Π_1 ist, ist ein hyperbolisches Geradenbüschel von n_c -Geraden mit dem Scheitel, der ein uneigentlicher Punkt der Spurgerade $o \equiv x$ ist.

Es ist hervorzuheben, daß jede p -Gerade parallel zu einer von den n -Geraden des g_1 -Geradenbüschels ist. Daraus folgt, daß sich ihre perspektivischen Bilder in einem Punkt des h -Horizontes schneiden. Dieser Schnittpunkt ist das perspektivische Bild ihres gemeinsamen Grenzpunktes.

Wenn man zwei beliebige zueinander parallele Geraden der Ebene Π_1 betrachtet, schneiden einander ihre perspektivischen Bilder immer in einem Punkt des h -Horizontes. Jeder Punkt des Randbildes der Ebene Π_1 definiert nämlich ein Geradenbüschel von parallelen Geraden. Die Ebenen, die durch den Augpunkt O und durch jede von diesen Geraden festgelegt werden, bilden ein parabolisches Ebenenbüschel, dessen Trägergerade eine Erzeugende des Parallelkegels Ψ ist. Diese Erzeugende schneidet die Bildebene Π_2 in einem Punkt des h -Horizontes. Das bedeutet, daß dieser Punkt der Scheitelpunkt des Geradenbüschels ist, und das eben jenes, das das perspektivische Bild des betrachteten parabolischen Geradenbüschels ist. In der Ebene Π_1 gibt es zwei parabolische Geradenbüschel, deren Geraden zur Spurgerade $o \equiv x$ parallel sind. Diese zwei parabolischen Geradenbüschel werden wieder auf zwei parabolische Geradenbüschel der Bildebene Π_2 abgebildet, wobei deren Scheitelpunkte dieselben Grenzpunkte der Spurgeraden $o \equiv x$ sind.

Theorem 3

Die perspektivischen Bilder der parabolischen Geradenbüschel der Ebene Π_1 sind die Geradenbüschel der Bildebene Π_2 , deren Scheitelpunkte die Punkte des h -Horizontes sind. Abhängig davon, ob der Punkt des h -Horizontes ein eigentlicher, unendlich ferner oder uneigentlicher Punkt ist, ist das Geradenbüschel elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch.

Um eine Gerade der Ebene Π_1 abzubilden, verwenden wir zwei spezielle Punkte: den *Spurpunkt* d.h. der Durchstoßpunkt der Geraden mit der Bildebene Π_2 , der mit seinem perspektivischen Bild zusammenfällt, und einen von den Grenzpunkten der Geraden (Abb.4).

Jede Gerade der Π_1 -Ebene hat den Spurpunkt in der Schnittgeraden $o \equiv x$, und das perspektivische Bild ihren

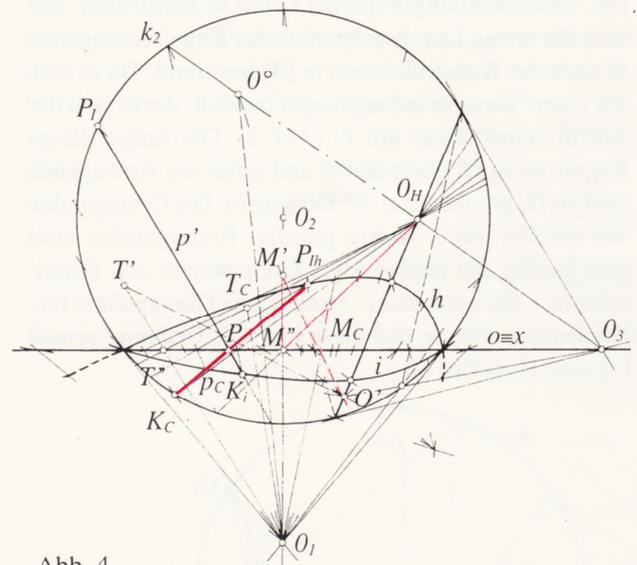


Abb. 4

Grenzpunkten, die die *Fluchtpunkte* der Geraden genannt werden, gehört dem h -Horizont an. Mit diesen zwei Punkten ist eindeutig das perspektivische Bild der Geraden bestimmt. Es gilt auch die Umkehrung. Wenn in der Bildebene eine Gerade angegeben ist, auf der die zwei Punkte: als Spurpunkt und Fluchtpunkt (Punkt am h -Horizont) bezeichnet sind, entspricht dieser Geraden eindeutig eine Gerade in der Ebene Π_1 . Diese Gerade verläuft durch den Spurpunkt und jenen Grenzpunkt der Grundebene Π_1 , der mittels der Erzeugende des Parallelkegels Ψ bestimmt wird. Dabei ist der Durchstoßpunkt dieser Erzeugende mit der Bildebene der Fluchtpunkt d.h. der Punkt, der mit dem h -Horizont inzident ist. Auf Grund dieser Überlegungen folgt:

Theorem 4

Jeder Geraden der Grundebene Π_1 entspricht in der Bildebene ein geordnetes Punktepaar (P, P_{th}) - der Spurpunkt und der Fluchtpunkt. Der Spurpunkt kann dabei eigentlicher, unendlich ferner Punkt oder uneigentlicher Punkt sein. Umgekehrt, jedem geordneten Punktepaar (R, R_{th}) in der Bildebene kann man genau nur eine Gerade der Ebene Π_1 zuordnen, wenn der Punkt R auf der Spurgerade $o \equiv x$ liegt, und der Punkt R_{th} zum h -Horizont gehört, oder wenn die beiden Punkte R und R_{th} zum h -Horizont gehören.

PUNKTE IN DER GRUNDEBENE Π_1

Die Punkte der Grundebene Π_1 werden als Schnittpunkte zweier Geraden der Grundebene erfaßt. Speziell verlaufen durch jeden Punkt eine p - und eine n -Gerade. Die Bilder dieser Geraden können entweder wie im vorigen Abschnitt durch die Bilder zweier spezieller Punkte (Spurpunkt, Fluchtpunkt) oder durch das zum euklidischen analoge Durchschnitverfahren [7], [3] bestimmt werden. Das perspektivische Bild T_c des Punktes T kann man noch als der zweite Durchstoßpunkt des Projektionsstrahles TO mit der Bildebene Π_2 gemäß [3] konstruieren (Abb.4).

FIGUREN IN DER GRUNDEBENE Π_1

Auf Grund der oben erwähnten Tatsachen ist es einfach das perspektivische Bild einer beliebigen Figur der Π_1 -Ebene zu bestimmen.

Das Zentrum der H -perspektiven Kollineation in der Bildebene ist der Punkt Z , in dem der durch den Augpunkt O senkrecht zur Symetrieebene des Winkels (Π_1, Π_2) aufgestellte Strahl z die Bildebene Π_2 durch-

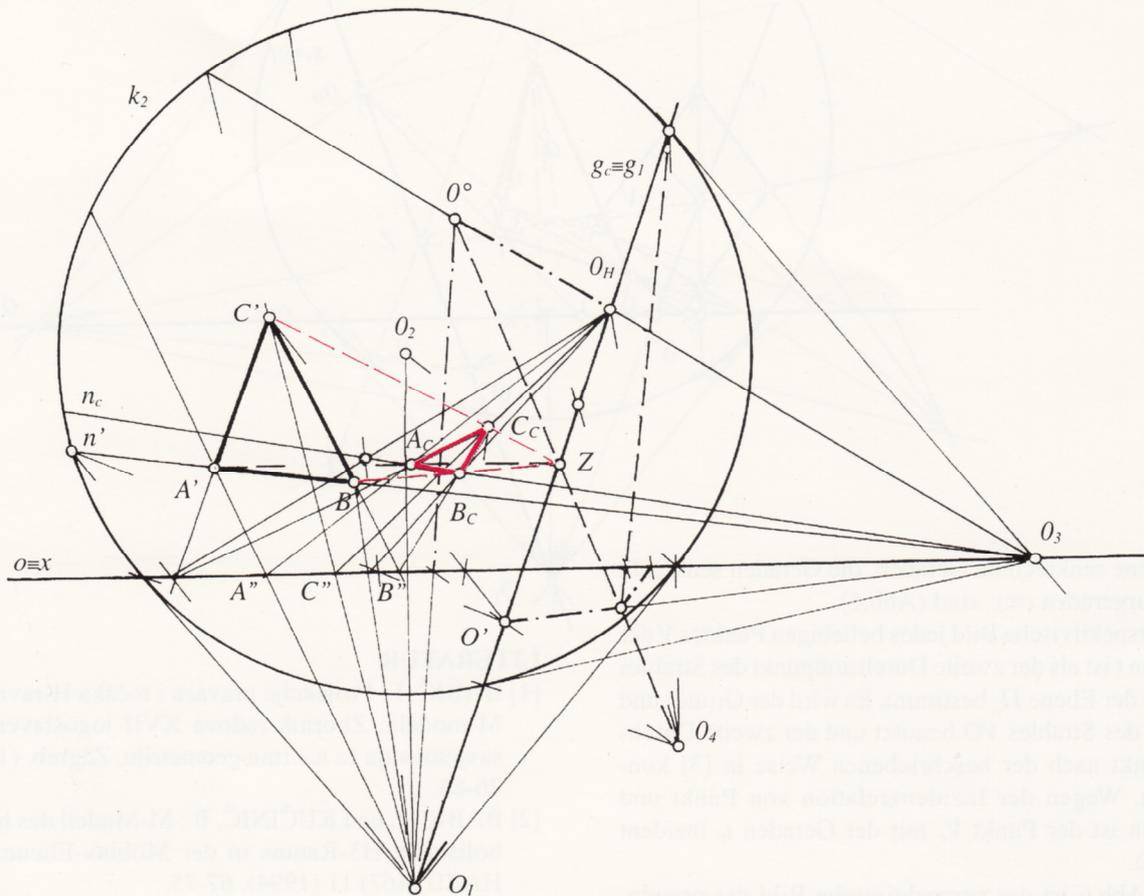


Abb. 5

In Abb.5 wird das Dreieck ABC dargestellt. Die Seite AB dieses Dreieckes ist zur Spurgerade $o \equiv x$ überparallel, das heißt, auf der n -Geraden liegende Seite. Der Grundriß des Dreieckes ist in "wahrer Gestalt" dargestellt und sein Aufriß ist die Strecke, die auf der $o \equiv x$ Achse liegt. In diesem Fall wurden die p - und n - Geraden und auch ihre Eigenschaften benutzt. Durch jeden Punkt des Dreieckes $A'B'C'$ ist eine p -Gerade gelegt, während die Seite AB schon auf der n -Geraden liegt. Auf Grund der Theoremen 1 und 2 ist das perspektivische Bild A_cB_c der Seite AB konstruiert. Der Punkt C_c ist durch das Durchschnitverfahren wie in Abb.4 bestimmt. Weiter verwenden wir, daß einander die Geraden $A'C'$ und A_cC_c im Punkt der Spurgerade $o \equiv x$ schneiden, was auch für andere zugeordnete Geradenpaare gilt. Diese Tatsache ist evident, da durch den Spurpunkt der Geraden auch ihr Grundriß und das perspektivische Bild verlaufen (Theorem 4).

Da sich zugeordnete Geraden in den Punkten längs einer Achse schneiden, existiert eine H -perspektiven Kollineation in der Bildebene. Nach dem Grundtheorem der H -perspektiven Kollineation [4], bedingt die Existenz der Achse auch die Existenz des H -Zentrums.

stößt. Dieser Strahl z ist die Trägergerade eines Ebenenbüschels, der die Bildebene in dem Geradenbüschel mit dem Scheitel Z schneidet. Da der Projektionsstrahl z auch in der Ebene Γ liegt, schneidet er die Gerade g_c im Punkt Z , also $Z \in g_c$. Die Schnittgerade jeder Ebene des Ebenenbüschels mit der Bildebene enthält die umgeklappte Lage des Punktes der Π_1 -Ebene und auch sein perspektivisches Bild, das heißt zum Beispiel das Paar (A', A_c) , und verläuft in jedem Fall durch den Punkt Z . Das bedeutet, daß der Punkt Z das Zentrum der H -perspektiven Kollineation in der Bildebene ist. Daraus geht hervor, daß die Figuren der Π_1 -Ebene nach der Rotation in die Bildebene und ihre perspektivischen Bilder H -perspektiv kollinear zugeordnet sind. Die Achse der H -perspektiven Kollineation ist der Spurgerade $o \equiv x$ und das H -Zentrum ist der Punkt Z .

**GERADEN SENKRECHT ZUR GRUNDEBENE Π_1
H-HÖHEN DER OBJEKTE**

Die Geraden, die zur Grundebene Π_1 senkrecht sind, sind gleichzeitig zur Bildebene Π_2 überparallel. Jede Ebene, die durch die Gerade $t \perp \Pi_1$ und den Augpunkt O festgelegt ist, ist senkrecht zur Ebene Π_1 . Sie schneidet die Bildebene Π_2 in der Geraden $t_c \perp o \equiv x$ (laut [3]). Daraus folgt, daß die perspektivischen Bilder von zur

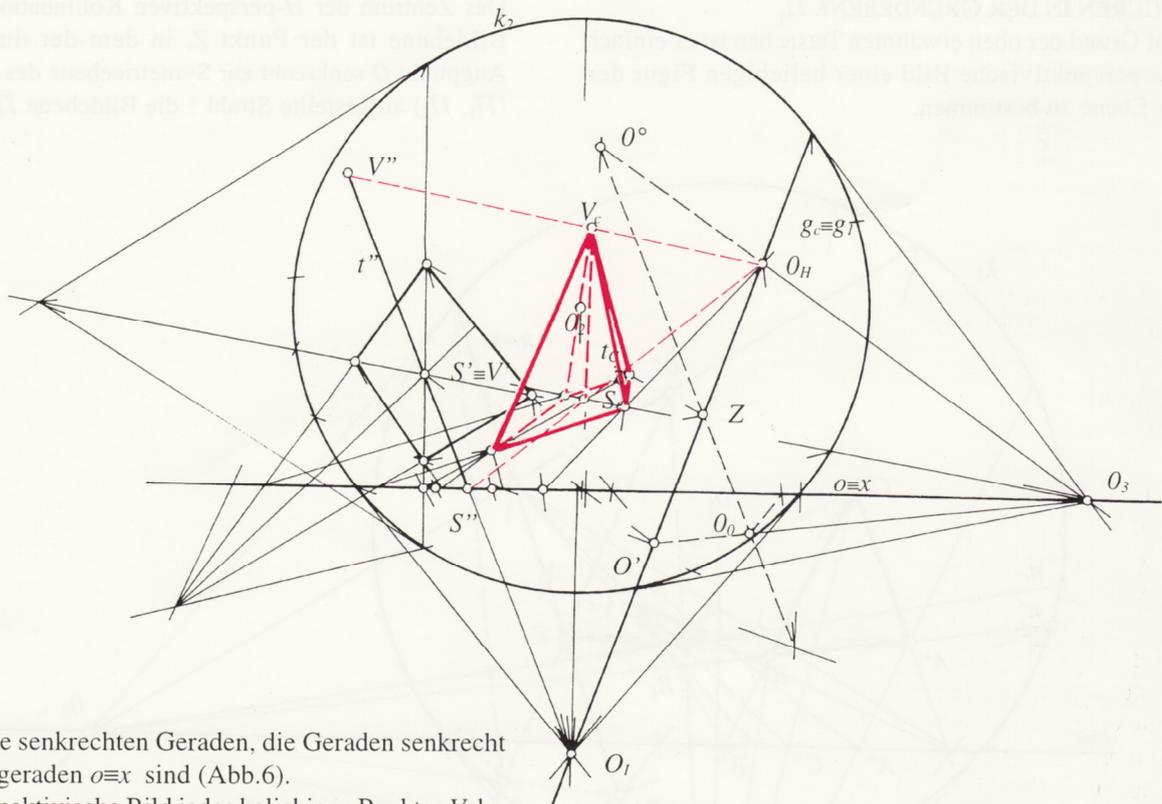


Abb. 6

Π_1 -Ebene senkrechten Geraden, die Geraden senkrecht zur Spurgeraden $o \equiv x$ sind (Abb.6).

Das perspektivische Bild jedes beliebigen Punktes V der Geraden t ist als der zweite Durchstoßpunkt des Strahles VO mit der Ebene Π_2 bestimmt. Es wird der Grund- und Aufriß des Strahles VO benutzt und der zweite Durchstoßpunkt nach der beschriebenen Weise in [3] konstruiert. Wegen der Inzidenzrelation von Punkt und Geraden ist der Punkt V_c mit der Geraden t_c inzident (Abb.6).

In der Abb.6 ist das perspektivische Bild der pseudoquadratischen gerechten Pyramide, deren Basis in der Π_1 -Ebene liegt, nach dem folgenden Verfahren aufgebaut: Zuerst ist der Grundriß des Pseudoquadrates konstruiert. Seine Diagonalen sind zueinander senkrecht und gleich lang. (Die gegenüberliegenden Seiten sind überparallel.) Der Aufriß des Pseudoquadrates ist die auf der Spurgeraden $o \equiv x$ liegende Strecke. Sein perspektivisches Bild wurde nach dem obenerwähnten Verfahren konstruiert, wobei auch die H -perspektive Kollineation in der Bildebene benutzt wurde.

Die Achse t der Pyramide ist die Senkrechte zur Basisebene Π_1 durch den Schnittpunkt der Diagonalen des Pseudoquadrates. Das perspektivische Bild t_c der Achse t ist zu $o \equiv x$ senkrecht und nach vorhererwähnten Weise konstruiert.

Das perspektivische Bild $V_c \in t_c$ der Pyramidenspitze V ist mittels Durchschnitverfahren bestimmt.

Auf gleiche Weise kann das perspektivische Bild jedes Objekts konstruiert werden.

LITERATUR

- [1] BABIĆ, I.: Projektije pravaca i točaka H -ravnine u M -modelu, Zbornik radova XVII jugoslavenskog savjetovanja za nacrtnu geometriju, Zagreb, (1990), 76-83.
- [2] BABIĆ, I. und KUČINIĆ, B.: M -Modell des hyperbolischen H^3 -Raums in der Möbius-Ebene, Rad HAZU (467) 11 (1994), 67-75.
- [3] BABIĆ, I.: Darstellende Geometrie im hyperbolischen H^3 -Raum I. Teil, Rad HAZU (470) 12 (1995), 167-186.
- [4] BABIĆ, I.: Darstellende Geometrie im hyperbolischen H^3 -Raum II. Teil, Rad HAZU (472) 13 (1997), 13-26.
- [5] KLEIN, F.: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1928.
- [6] KRUPPA, E.: Darstellende Geometrie im projektiven Raum mit elliptischer oder hyperbolischer Maßbestimmung, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. math.-nat. Kl. Abt IIa, 171 (1962), 75-92.
- [7] NIČE, V.: *Perspektiva*, Školska knjiga, Zagreb, 1961.
- [8] ŠNAJDER, Z.: Spur- und Fluchtpunktmethode bei Zentralprojektion im hyperbolischen Raum, Matem. vesnik, 2 (17), Beograd, (1965), 127-136.
- [9] ŠNAJDER, Z.: Die Zentral- und Zentralgrundrissprojektionsmethode im dreidimensionalen hyperbolischen Raum-Lagenaufgaben, Matem. vesnik, 6 (21), Beograd, (1969), 355-364.

Dr. sc. Ivanka Babić

Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
10 000 Zagreb, Kačićeva 26,
tel/fax: +385(01) 66 00 642
e-mail: ibabic@juraj.gradnz. grad.hr

Dr. sc. Branko Kučinić

Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
10 000 Zagreb, Kačićeva 26,
tel/fax: +385(01) 66 00 642
e-mail: bkucinic@juraj.gradnz. grad.hr