

# Grafički prikaz pramena konika pomoću računala

## Computer-Aided Graphical Representation of Conic Section Pencils

### Abstract

In one of the previous works it has been shown how graphic presentation of an individual conics can be programmed on the basis of the coefficients of its equation in the general form. In this paper the conic section pencil is explained, and it is noted that it cannot contain any number of conics of parabolic type, but that only all of them, or two, or one or none can be of such type. The conic section pencil is illustrated through several examples from cartography.

**Keywords:** conic, conic section pencils, map projections

### Grafički prikaz pramena konika pomoću računala SAŽETAK

U jednom prethodnom radu pokazano je kako se može programirati grafičko prikazivanje pojedine konike na temelju koeficijentata njezine jednadžbe u općem obliku. U ovome radu objašnjava se pramen konika te uočava da u njemu ne može biti bilo koji broj konika paraboličkog tipa, nego da takve mogu biti samo sve, ili dvije, ili jedna ili niti jedna. Pramen konika ilustrira se na nekoliko primjera iz kartografije.

**Ključne riječi:** konika, pramen konika, kartografske projekcije

## 1. UVOD

U radu Lapainea i Jovičića (1996) pokazano je kako se može programirati grafičko prikazivanje pojedine konike na osnovi koeficijentata njene jednadžbe u općem obliku. Takav program može se onda nadopuniti tako da služi za crtanje skupa krivulja koje pripadaju nekom pramenu konika.

Osim u geometriji, pramenovi konika susreću se i u drugim znanstvenim disciplinama. U ovom radu daje se nekoliko primjera pramenova konika koji se pojavljuju u matematičkoj kartografiji pri grafičkom prikazivanju projekcije mreže meridijana i paralela kod perspektivnih i pseudocilindričnih projekcija.

## 2. KONIKE

Najopćenitija jednadžba drugog stupnja od dvije varijable  $x$  i  $y$  može se napisati u obliku

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (2.1)$$

gdje su  $a, b, c, d, e$  i  $f$  realni brojevi, i barem jedan od

brojeva  $a, b$  i  $c$  različit od nule. Geometrijsko mjesto točaka  $(x, y)$  u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu (2.1) zove se krivulja 2. reda, konusni presjek, konika ili čunjosječnica.

Ako je  $a = b = c = 0$  tada se radi o specijalnim slučajevima za koje se lako uočava da predstavljaju:

skup svih točaka ravnine, ako je

$$d = 0, e = 0 \text{ i } f \neq 0;$$

pravac, ako je

$$d \neq 0 \text{ ili } e \neq 0; \quad (2.2)$$

prazan skup, ako je

$$d = 0, e = 0 \text{ i } f = 0.$$

Pretpostavimo da je bar jedan od brojeva  $a, b, c$  različit od nule. Pomoću rotacije ravnine oko ishodišta i translacije ravnine moguće je svaku koniku prikazati u standardnom ili kanonskom obliku (vidi npr. Lapaine i Jovičić 1996).

Realna simetrična matrica

$$\delta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

od osnovne je važnosti pri analizi jednadžbe (2.1). Njezine svojstvene vrijednosti  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  rješenja su kvadratne jednadžbe

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0 \quad (2.6)$$

dakle

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ a+c + \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)} \right] \quad (2.7)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ a+c - \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)} \right] \quad (2.8)$$

Budući da se izraz ispod korijena može napisati u obliku zbroja kvadrata:

$$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \quad (2.9)$$

to najprije zaključujemo da su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  realni brojevi. Zatim,  $\lambda_1 = \lambda_2$  ako i samo ako je  $a = c$  i  $b = 0$ . Konačno, ne može biti  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , jer bi tada moralo biti  $a = b = c = 0$ , što je u suprotnosti s početnom pretpostavkom.

Ako je  $\lambda_1 = \lambda_2$  tj.  $a = c$  i  $b = 0$ , tada se lako uočava da je svaki vektor u ravnini svojstveni vektor matrice  $\delta$ . Ako svojstvene vrijednosti  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  nisu međusobno jednake, onda vrijedi relacija

$$\tan \theta = \frac{\lambda_1 - a}{b} \quad (2.10)$$

gdje smo s  $\theta$  označili kut što ga svojstveni vektor  $v_1$  koji pripada svojstvenoj vrijednosti  $\lambda_1$  zatvara s pozitivnim smjerom osi  $x$ . Činjenica da osim kuta  $\theta$ , relaciju (2.10) zadovoljavaju i kutovi oblika  $\theta + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ne otežava daljnju primjenu jer je očito sasvim svejedno koji ćemo od njih uzeti za smjer svojstvenog vektora  $v_1$  (možemo uzeti npr.  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ ).

Pri programiranju formule (2.10) moramo voditi računa

o tome da će ona zatajiti u slučaju kad je  $b = 0$ . Zato taj slučaj treba promatrati odvojeno. Lako se pokaže da tada mora biti  $\theta = 0$ .

Označimo još

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cos \theta + e \sin \theta \\ -d \sin \theta + e \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Postoji devet klasa konika, tj. za zadane  $a, b, c, d, e$  i  $f$ , jednadžba (2.1) jedan je od devet tipova ravninskih krivulja koje se nazivaju konikama. Od njih su dva tipa imaginarna jer u tim slučajevima ne postoje realne točke koje bi zadovoljile jednadžbu (2.1).

Ako je matrica  $\delta$  regularna,  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ , označimo

$$f' = f - \alpha^2 / \lambda_1 - \beta^2 / \lambda_2, \quad (2.12)$$

i imamo sljedeće slučajeve:

- (i)  $\text{sgn } \lambda_1 = \text{sgn } \lambda_2 = \text{sgn } f'$  i  $f' \neq 0$ ,  
imaginarna elipsa
- (ii)  $\text{sgn } \lambda_1 = \text{sgn } \lambda_2 \neq \text{sgn } f'$  i  $f' \neq 0$   
realna elipsa
- (iii)  $\text{sgn } \lambda_1 = \text{sgn } \lambda_2$  i  $f' = 0$   
točka
- (iv)  $\text{sgn } \lambda_1 \neq \text{sgn } \lambda_2$  i  $f' \neq 0$   
hiperbola
- (v)  $\text{sgn } \lambda_1 \neq \text{sgn } \lambda_2$  i  $f' = 0$   
dva pravca koji se sijeku.

Ako je matrica  $\delta$  singularna, a  $\lambda_1 \neq 0$  i  $\lambda_2 = 0$ , označimo

$$f' = f - \frac{\alpha^2}{\lambda_1}, \quad (2.13)$$

i imamo sljedeće slučajeve:

- (vi1)  $\beta \neq 0$   
parabola
- (vii1)  $\beta = 0$  i  $\text{sgn } \lambda_1 \neq \text{sgn } f'$  i  $f' \neq 0$ ,  
dva paralelna pravca
- (viii1)  $\beta = 0$  i  $\text{sgn } \lambda_1 = \text{sgn } f'$   
dva imaginarna pravca
- (ix1)  $\beta = 0$  i  $f' = 0$   
dvostruki pravac.

Ako je  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 \neq 0$ , tada označimo

$$f' = f - \frac{\beta^2}{\lambda_2} \quad (2.14)$$

i imamo sljedeće slučajeve:

- (vi2)  $\alpha \neq 0$   
parabola
- (vii2)  $\alpha = 0$  i  $\text{sgn } \lambda_2 \neq \text{sgn } f'$  i  $f' \neq 0$ ,  
dva paralelna pravca
- (viii2)  $\alpha = 0$  i  $\text{sgn } \lambda_2 = \text{sgn } f'$   
dva imaginarna pravca
- (ix2)  $\alpha = 0$  i  $f' = 0$   
dvostruki pravac.

Za krivulje tipa (i) - (iii) kaže se da su eliptičkog, dok su krivulje tipa (iv) - (v) hiperboličkog, a (vi) - (ix) paraboličkog tipa. U prethodnom je radu (Lapaine i Jovičić 1996) potanko prikazano kako se dolazi do opisane klasifikacije te kako se svaka od navedenih realnih krivulja može nacrtati uz pomoć računala i odgovarajuće jednadžbe krivulje u parametarskom obliku.

### 3. PRAMEN KONIKA

Neka su

$$F(x, y) = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0 \quad (3.1)$$

$$G(x, y) = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 = 0 \quad (3.2)$$

jednadžbe dviju konika. Za proizvoljni  $\mu \in R$  sastavimo izraz

$$H(x, y) = F(x, y) + \mu G(x, y) \quad (3.3)$$

Polinom  $H$  je oblika

$$H(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \quad (3.4)$$

gdje smo označili

$$a = a_1 + \mu a_2, \dots, f = f_1 + \mu f_2 \quad (3.5)$$

Za svaki pojedini  $\mu \in R$ , izraz

$$H(x, y) = F(x, y) + \mu G(x, y) = 0 \quad (3.6)$$

jednadžba je konike u smislu definicije iz prethodnog poglavlja, ako je barem jedan od brojeva  $a, b$  i  $c$  različit od nule. Za zadane realne brojeve  $a_1, b_1, \dots, f_1, a_2, b_2, \dots, f_2$  i  $\mu \in R$  skup svih konika obuhvaćenih jednadžbom (3.6) zove se pramen konika. Konike pomoću kojih je pramen definiran i kojima odgovaraju jednadžbe  $F(x, y)$  i  $G(x, y)$  zovu se osnovne konike pramena. Bez većih teškoća moguće je proširiti razmatranja na pramenove čije su osnovne krivulje reda  $\leq 2$ .

Za svaki čvrsti  $\mu \in R$  jednadžba (3.4) predstavlja jednu krivulju iz pramena ili u specijalnom slučaju prazan skup. Tip krivulje ovisit će prvenstveno o svojstvenim vrijednostima  $\lambda_1, \lambda_2$  matrice  $\delta$ . Njena determinanta je

$$\det(\delta) = \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 = m \mu^2 + n \mu + p \quad (3.7)$$

gdje smo označili

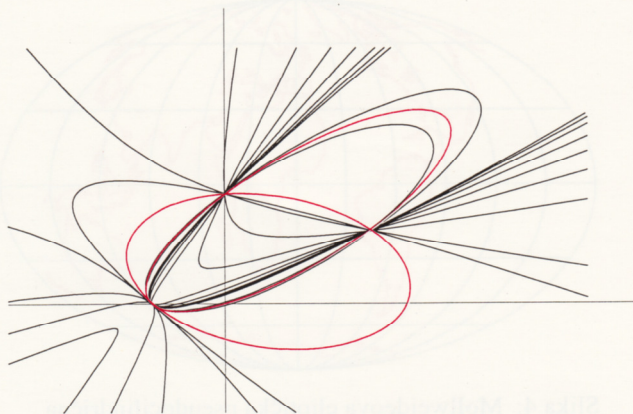
$$\begin{aligned} m &= a_2c_2 - b_2^2, \\ n &= a_1c_2 + c_1a_2 - 2b_1b_2, \\ p &= a_1c_1 - b_1^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Determinanta matrice  $\delta$  jednaka je nuli u sljedećim slučajevima:

1. za svaki  $\mu \in R$ , ako je  $m = n = p = 0$ ,
2. ni za koji  $\mu \in R$ , ako je  $m = n = 0, p \neq 0$  ili  $m \neq 0, D < 0$
3. za  $\mu = -p/n$ , ako je  $m = 0, n \neq 0$
4. za  $\mu = -p/2m$ , ako je  $m \neq 0, D = 0$
5. za  $\mu_{1,2} = (-n \pm \sqrt{D}) / 2m$ , ako je  $m \neq 0, D > 0$ ,

gdje je  $D = n^2 - 4mp$ .

Odatle možemo zaključiti da u pramenu konika ne može biti bilo koji broj konika paraboličkog tipa, nego takve mogu biti samo sve, ili jedna, ili dvije ili niti jedna. Pramenovi krivulja 2. reda mogu se zadavati i istraživati na različite načine. Tako je npr. Cesarec (1957) vrlo detaljno opisao dvije njihove klasifikacije: projektivnu i afinu.



Slika 1: Pramen konika

$$(24x^2 + 18xy + 80y^2 - 72x - 160y - 240) + \mu(84x^2 - 202xy + 200y^2 + 168x - 600y) = 0$$

Crvenom linijom prikazane su osnovne konike pramena

Pri ispitivanjima pramenova konika znatno mogu pomoći odgovarajući grafički prikazi. S obzirom na relativnu složenost takvih crteža, treba klasični mukotrpan i dugotrajan način crtanja zamijeniti crtanjem uz primjenu računala. U radu Lapainea i Jovičića (1996) pokazano je kako se može programirati grafičko prikazivanje pojedine konike na osnovi koeficijenata njezine jednadžbe u općem obliku. Takav program može se sada nadopuniti, tako da služi za crtanje skupa krivulja koje pripadaju nekom pramenu. U skladu s time, autor ovog rada sastavio je odgovarajući program za crtanje proizvoljnog pramena konika. Pomoću spomenutoga programa izrađen je crtež pramena na slici 1 (primjer preuzet od Cesarca (1957)).

U sljedećih pet poglavlja opisuju se neki primjeri pramenova konika u kartografiji.

#### 4. GNOMONSKA ILI CENTRALNA PROJEKCIJA

Jedan od lijepih primjera pramena konika u kartografiji skup je paralela u gnomonskoj ili centralnoj projekciji Zemljine sfere. Uzmimo za model Zemlje sferu polumjera  $R > 0$ ,

$$\mathcal{S} = \{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2\} \quad (4.1)$$

i parametrizirajmo je pomoću preslikavanja

$$[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ zadanog formulama}$$

$$\begin{aligned} X &= R \cos \phi \cos \lambda, \\ Y &= R \cos \phi \sin \lambda, \\ Z &= R \sin \phi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Tako definirana parametrizacija regularna je do na zanemariv skup. Parametri  $\phi$  i  $\lambda$  geografska su širina, odnosno duljina, a parametarske su krivulje paralele ( $\phi = \text{const.}$ ) i meridijani ( $\lambda = \text{const.}$ ). Gnomonska ili centralna projekcija može se geometrijski opisati kao perspektivno projiciranje sfere na ravninu s centrom projiciranja smještenim u središtu sfere. Ako ravnina projekcije tangira sferu u točki određenoj koordinatama  $(\phi_0, 0)$  tada

se jednadžbe gnomonske projekcije mogu napisati (lijevi koordinatni sustav!) u obliku (Borčić 1955):

$$x = \frac{R(\sin \phi_0 \cos \lambda - \cos \phi_0 \tan \phi)}{\sin \phi_0 \tan \phi + \cos \phi_0 \cos \lambda},$$

$$y = \frac{R \sin \lambda}{\sin \phi_0 \tan \phi + \cos \phi_0 \cos \lambda} \quad (4.3)$$

Lako se može izvesti da su projekcije meridijana u toj projekciji pravci koji pripadaju pramenu

$$y = \tan \lambda (x \sin \phi_0 + R \cos \phi_0) \quad (4.4)$$

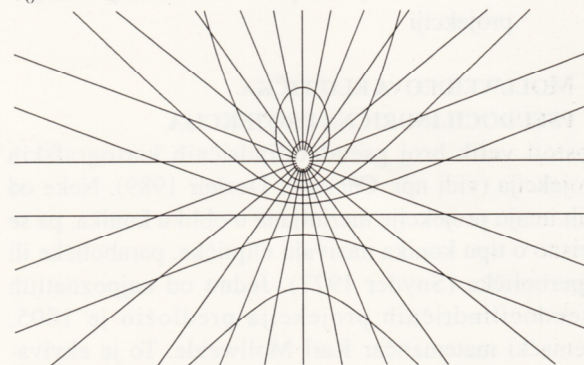
dok su projekcije paralela određene pramenom

$$(x \cos \phi_0 - R \sin \phi_0)^2 - \tan^2 \phi [(\cos \phi_0 - R \sin \phi_0)^2 + y^2] = 0 \quad (4.5)$$

Ako je  $\phi_0 \in (0, \pi/2)$ , tada su projekcije paralela:

- hiperbole      ako je  $\phi \in (-\pi/2, \phi_0)$
- parabola       $\phi = \phi_0$
- elipse         $\phi \in (\phi_0, \pi/2)$
- dvostruki pravac       $\phi = 0$
- točka         $\phi = -\pi/2$  ili  $\phi = \pi/2$ .

Mreža meridijana i paralela u gnomonskoj projekciji uz  $\phi_0 = \pi/4$  prikazana je na slici 2.



Slika 2: Mreža meridijana i paralela u gnomonskoj projekciji

#### 5. STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA

Neka je sfera polumjera  $R$  parametrizirana geografskom parametrizacijom (vidi prethodno poglavlje). Stereografska projekcija može se geometrijski opisati kao perspektivno projiciranje sfere na njezinu proizvoljnu tangencijalnu ravninu. Središte je projiciranja u točki što leži na sferi, dijametralno suprotno diralištu tangencijalne ravnine. Ako ravnina projekcije tangira sferu u točki određenoj koordinatama  $(\phi_0, 0)$ , tada se jednadžbe stereografske projekcije mogu napisati u obliku (Borčić 1955):

$$x = \frac{R(\sin \phi_0 \cos \phi \cos \lambda - \cos \phi_0 \sin \phi)}{1 + \sin \phi_0 \sin \phi + \cos \phi_0 \cos \phi \cos \lambda},$$

$$y = \frac{R \sin \lambda \cos \phi}{1 + \sin \phi_0 \sin \phi + \cos \phi_0 \cos \phi \cos \lambda} \quad (5.1)$$

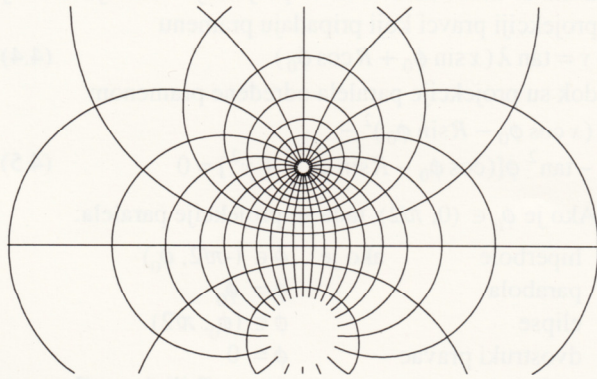
Lako se može izvesti da projekcije meridijana u toj kartografskoj projekciji pripadaju pramenu

$$Ry + \tan \lambda \cos \phi_0 (x^2 - 2Rx \tan \phi_0 + y^2 - R^2) = 0 \quad (5.2)$$

dok su projekcije paralela iz pramena

$$x^2 + y^2 + \frac{2R \cos \phi}{\sin \phi_0 + \sin \phi} x = 0 \quad (5.3)$$

Iz relacije (5.2) i (5.3) može se izvesti da su za  $\phi_0 \in (0, \pi/2)$ , projekcije meridijana kružnice ili pravac, dok su projekcije paralela kružnice ili točka. Mreža meridijana i paralela u stereografskoj projekciji uz  $\phi_0 = \pi/4$  prikazana je na slici 3.



Slika 3: Mreža meridijana i paralela u stereografskoj projekciji.

## 6. MOLLWEIDEOVA ELIPTIČKA PSEUDOCILINDRIČNA PROJEKCIJA

Postoji velik broj pseudocilindričnih kartografskih projekcija (vidi npr. Canters i Declair 1989). Neke od njih imaju projekcije meridijana u obliku konika, pa se ovisno o tipu konika nazivaju eliptičke, paraboličke ili hiperboličke (Snyder 1977). Jednu od najpoznatijih pseudocilindričnih projekcija predložio je 1805. njemački matematičar Karl Mollweide. To je ekvivalentna pseudocilindrična projekcija s eliptičnim meridijanima, koja se prema svome autoru zove Mollweideova projekcija.

Neka je sfera polumjera  $R$  parametrizirana geografskom parametrizacijom (vidi 4. poglavlje). Mollweideova je projekcija definirana jednadžbama

$$x = R\sqrt{2} \sin \beta, \quad y = \frac{2R\sqrt{2} \lambda}{\pi} \cos \beta \quad (6.1)$$

gdje je  $\beta$  pomoćni kut koji zadovoljava transcendentu jednadžbu

$$\sin \beta + 2\beta = \pi \sin \phi \quad (6.2)$$

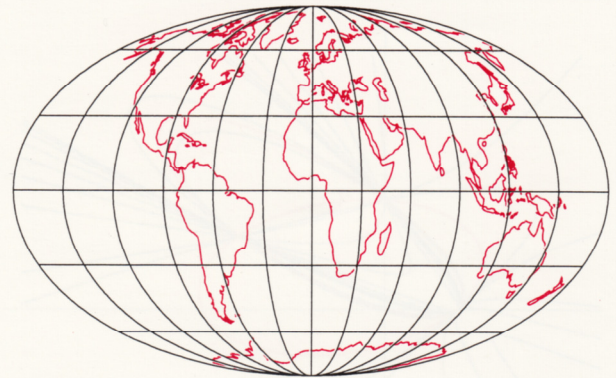
Projekcije meridijana u toj kartografskoj projekciji pripadaju pramenu elipsa:

$$\pi^2 y^2 + 4\lambda^2 (x^2 - 2R^2) = 0 \quad (6.3)$$

dok su paralele dijelovi međusobno paralelnih pravaca

$$x = R\sqrt{2} \sin \beta \quad (6.4)$$

Na slici 4. prikazane su mreža meridijana i paralela i konture kontinenata u Mollweideovoj projekciji.



Slika 4: Mollweideova eliptička pseudocilindrična projekcija

## 7. CRASTEROVA PARABOLIČKA PSEUDOCILINDRIČNA PROJEKCIJA

Neka je sfera polumjera  $R$  parametrizirana geografskom parametrizacijom (vidi 4. poglavlje). Potpukovnik Craster predložio je 1929. paraboličku pseudocilindričnu projekciju koja je definirana jednadžbama (Steers 1965, Canters i Declair 1989):

$$x = \sqrt{3\pi} R \sin \frac{\phi}{3}, \quad y = \sqrt{3\pi} R \lambda (2 \cos \frac{2\phi}{3} - 1) \quad (7.1)$$

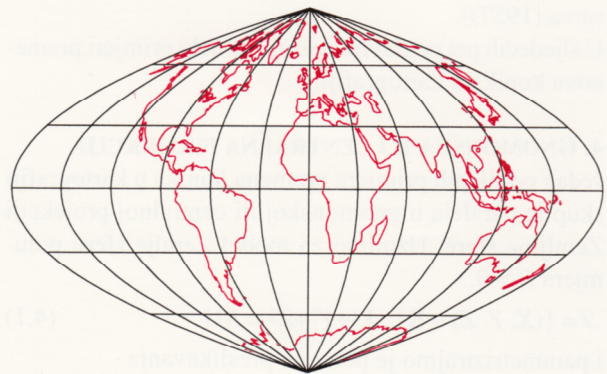
Projekcije meridijana u toj kartografskoj projekciji dijelovi su parabola koje pripadaju pramenu:

$$\pi \sqrt{3\pi} R y + \lambda (4x^2 - 3\pi R^2) = 0 \quad (7.2)$$

dok su paralele dijelovi međusobno paralelnih pravaca

$$x = \sqrt{3\pi} R \sin \frac{\phi}{3} \quad (7.3)$$

Na slici 5. prikazani su mreža meridijana i paralela i konture kontinenata u Crasterovoj projekciji.



Slika 5: Crasterova parabolička pseudocilindrična projekcija

## 8. PUTNIŠOVA P<sub>5</sub> HIPERBOLIČKA PSEUDOCILINDRIČNA PROJEKCIJA

R. V. Putniš predložio je 1934. dvanaest pseudocilindričnih projekcija, a svaka od njih ima meridijane u obliku elipsa, parabola ili hiperbola (Putniš 1934).

Neka je sfera polumjera  $R$  parametrizirana geografskom parametrizacijom (vidi 4. poglavlje). Putnišova P<sub>5</sub> hiperbolička pseudocilindrična projekcija definirana je jednadžbama

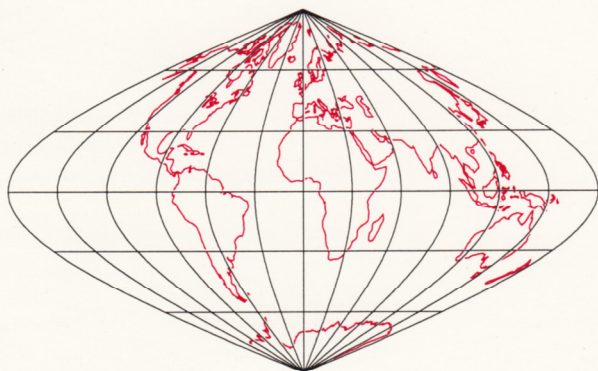
$$x = k R \phi, \quad y = k R \lambda (2 - \sqrt{1 + 12\phi^2 / \pi^2}) \quad (8.1)$$

gdje je  $k = 1.01346$ . Projekcije meridijana u toj kartografskoj projekciji dijelovi su hiperbola koje pripadaju pramenu:

$$(x - k R \lambda)^2 - \lambda^2 (12y^2 / \pi^2 + k^2 R^2) = 0 \quad (8.2)$$

dok su paralele dijelovi međusobno paralelnih pravaca

$$x = k R \phi \quad (8.3)$$



Slika 6: Putninšova  $P_5$  hiperbolička pseudocilindrična projekcija

Na slici 6. prikazani su mreža meridijana i paralela i konture kontinenata u Putninšovoj  $P_5$  projekciji. Uočava se da je pramen (8.2) oblika

$$F(x, y) + \lambda G(x, y) + \lambda^2 H(x, y) = 0$$

Autoru ovoga rada nije poznato jesu li se matematičari bavili proučavanjem takvih pramenova konika.

#### LITERATURA

- BORČIĆ, B. (1955): *Matematička kartografija*, Tehnička knjiga, Zagreb.
- CANTERS, F. i DECLEIR, H. (1989): *The World in Perspective*, John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.
- CESAREC, R. (1957): *Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja*, I. dio. Školska knjiga, Zagreb.
- LAPAINÉ, M. i JOVIČIĆ, D. (1996): Grafički prikaz konika pomoću računala, KoG, 1, 19-26.
- PUTNINŠ, R. V. (1934): Jaunas projekcijas pasaules kartem, Geografiski raksti, Folia Geographica 3 and 4, 180-209.
- SNYDER, J. P. (1977): A Comparison of Pseudocylindrical Map Projections, *The American Cartographer*, Vol 4, No. 1, 59-81.
- STEERS, J. A. (1965): *An Introduction to the Study of Map Projections*, University of London Press Ltd, London.

#### Doc. dr. sc. Miljenko Lapaine

Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu  
10 000 Zagreb, Kačićeva 26  
tel.: 456 1222,  
faks: 482 8081  
e-mail: Miljenko.Lapaine@public.srce.hr