

Izvođenje pet tipova pravčastih ploha 4. stupnja

Generation of Five Types of Ruled Quartics

ABSTRACT

According to Sturm ([4], [7]), the ruled quartics are classified into twelve types. In this paper only five types, where directing curves can be conics and straight lines are selected and there is one or more examples given for each of them. In these examples we described the constructive generation of the surfaces, and by means of their parametric equations we made the graphics in *Mathematica* 3.0.

Keywords: ruled quartics, ruled surfaces

Izvođenje pet tipova pravčastih ploha 4. stupnja SAŽETAK

Između dvanaest vrsta pravčastih ploha 4. reda, po Sturmovu ([4], [7]) razvrstavanju, izdvojeno je pet kod kojih se za ravnalice mogu odabrati konike i pravci. Za svaku od tih pet vrsta ploha dan je jedan ili više primjera. U primjerima su opisani načini njihova konstruktivnog izvođenja, a pomoću parametarskih jednadžbi napravljeni su crteži u programu *Mathematica* 3.0.

Ključne riječi: pravčate kvartike, pravčaste plohe

UVOD

Svakom točkom pravčaste plohe prolazi barem jedan pravac te plohe, što daje velik broj mogućnosti primjene pravčastih ploha u graditeljstvu. Stoga je konstruktivna obrada tih ploha sadržaj gotovo svake knjige koja se upotrebljava u nastavi geometrije na tehničkim fakultetima u nas (npr. [1], [2], [5], [8]). Cilj je ovoga rada prikazati jednostavnost njihova izvođenja i raznolikost njihovih oblika. Za grafičke prikaze ploha upotrijebiti ćemo programski sustav *Mathematica* 3.0.

1. OPĆENITO O ALGEBARSKIM PRAVČASTIM PLOHAMA

U ovom poglavlju navodimo neke opće definicije i teoreme vezane uz pravčaste plohe. Navodimo ih bez dokaza, za koje se čitatelja upućuje na bilo koju od knjiga [10], [7], [8] ili [9].

Prostor za naša razmatranja prošireni je euklidski prostor (model projektivnog prostora), tj. euklidski prostor nadopunjen neizmjereno dalekim elementima. Prostor sadrži ∞^3 točaka i ∞^4 pravaca. Stoga se u njemu mogu promatrati:

plohe - skupovi od ∞^2 neprekinuto povezanih točaka, *krivulje* - skupovi od ∞^1 neprekinuto povezanih točaka,

kompleksi - skupovi od ∞^3 neprekinuto povezanih pravaca,

kongruencije - skupovi od ∞^2 neprekinuto povezanih pravaca,

pravčaste plohe - skupovi od ∞^1 neprekinuto povezanih pravaca.

Pravčasta ploha nastaje neprekinutim gibanjem nekog pravca pri kojem se on sam u sebi ne pomiče. Osnovna je podjela tih ploha je na *razmotljive*, koje se mogu razviti u jednu ravninu bez kidanja, i *vitopere* kod kojih je takvo razvijanje nemoguće. Skup točaka kojih Kartezijeve koordinate zadovoljavaju neku algebarsku jednadžbu n -toga stupnja nazivamo *algebarskom* plohom n -toga reda. U ovom radu bavit ćemo se isključivo vitoperim algebarskim pravčastim ploham.

Algebarske plohe i krivulje, kompleksi i kongruencije razvrstavaju se prema njihovu redu i razredu. Konstruktivnoj obradi prostora primjerene su geometrijske interpretacije tih pojmova kojima se služi sintetička geometrija.

— Red (razred) algebarske plohe jednak je broju njezinih točaka (dirnih ravnina) incidentnih s nekim pravcem. Ako su red i razred plohe jednaki onda taj broj nazivamo njezinim stupnjem.

— Red prostorne krivulje jednak je broju njezinih točaka incidentnih s nekom ravninom, dok joj je razred jednak broju dirnih ravnina incidentnih s nekim pravcem.

— Red ravninske krivulje jednak je broju njezinih sjecišta s nekim pravcem incidentnim s ravninom krivulje, dok joj je razred jednak broju tangenata incidentnih s nekom točkom ravnine krivulje.

— Red kompleksa jednak je redu stošca što ga čine sve zrake (pravci koji pripadaju kompleksu) incidentne s nekom točkom, dok mu je razred jednak razredu krivulje koju omataju sve njegove zrake u nekoj ravnini. Red i razred nekog kompleksa uvijek su jednaki.

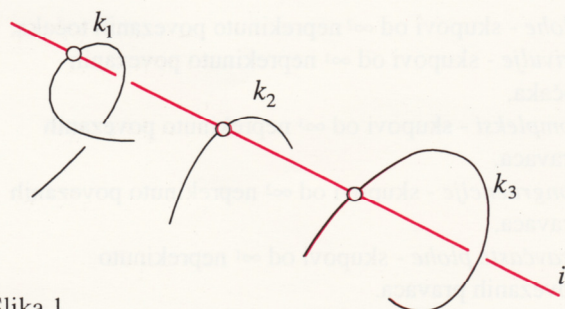
— Red (razred) kongruencije jednak je broju njezinih zraka incidentnih s nekom točkom (ravninom).

Pri tim prebrojavanjima računaju se realni i imaginarni elementi.

Izvođenje

Pravčaste plohe kao sustave od ∞^1 neprekinuto povezanih pravaca u prostoru možemo najopćenitije promatrati kao presjeke triju kompleksa ili kao presjek jedne kongruencije i jednoga kompleksa. Dosljedno sprovođenje tog drugog načina izvođenja zahtijevalo bi, međutim,

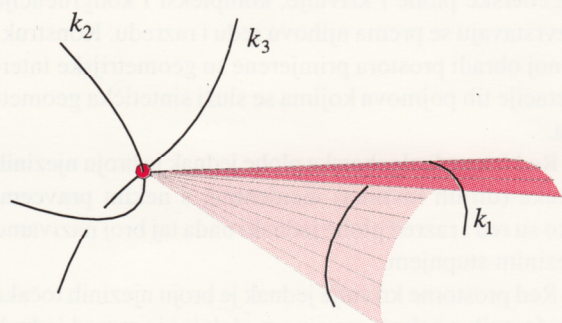
značajnije udubljivanje u pravčasti prostor. Zbog toga će predmet našeg proučavanja biti uglavnom one pravčaste plohe koje nastaju kao presjek triju kompleksa zadanih algebarskim krivuljama. U tom smislu pravčaste se plohe mogu promatrati kao skupovi od ∞^1 neprekinuto povezanih pravaca koji sijeku tri algebarske krivulje k_1 , k_2 i k_3 . Krivulje k_1 , k_2 i k_3 nazivamo *ravnalicama*, a pravce koji ih sijeku *izvodnicama* plohe. (Slika 1)



Slika 1

Red i razred

Ako su redovi krivulja k_1 , k_2 , k_3 redom n_1 , n_2 i n_3 te ako se one ne sijeku, red pravčaste plohe jednak je $2n_1n_2n_3$. Ako se, međutim, krivulje k_2 i k_3 sijeku u jednoj točki raspast će se pravčasta ploha reda $2n_1n_2n_3$ na stožac s vrhom u tom sjecištu i osnovicom k_1 (slika 2) te plohu reda $2n_1n_2n_3 - n_1$.



Slika 2

Stoga općenito vrijedi: ako se krivulje k_1 i k_2 sijeku u s_1 točke, krivulje k_1 i k_3 u s_2 točke, a krivulje k_2 i k_3 u s_3 točki tada je red pravčaste plohe koju ćemo promatrati jednak

$$2n_1n_2n_3 - (s_1n_1 + s_2n_2 + s_3n_3). \quad (1)$$

Ako ploha nastaje kao presjek kongruencije n -tog reda, m -tog razreda i kompleksa r -tog stupnja red plohe jednak je $r(n+m)$. Koliko će se i kakvi stošci pojaviti pri raspadu te plohe može se diskutirati u konkretnim slučajevima.

Red i razred pravčaste plohe uvijek su jednaki. Stoga pravčaste plohe imaju određeni stupanj.

Višestruke linije

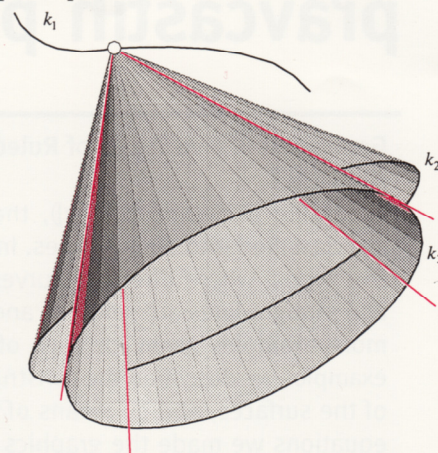
Višestruke linije vitopere pravčaste plohe njezine su ravnalice k_1 , k_2 i k_3 , a strukost im je redom

$$n_2n_3 - s_1, n_1n_3 - s_2 \text{ i } n_1n_2 - s_3. \quad (2)$$

To se lako zaključuje na temelju činjenice da svakom točkom npr. krivulje k_1 prolazi n_2n_3 izvodnica plohe koje su presjek stožaca s vrhom u toj točki i osnovicama k_2 i

k_3 (slika 3).

Napomena: u slučajevima kada se radi o pravčastoj ravnalici koja je ujedno i izvodnica tih stožaca koji su dijelovi raspada pravčaste plohe gornja se formula mora modificirati ovisno o tome koliko je puta pravčasta ravnalica brojena pri raspadu.



Slika 3

Sustavi izvodnica

Vitopere pravčaste plohe 2. reda (jednoplhi i parabolični hiperboloidi) jedine su plohe s dva sustava izvodnica, tj. u svakoj točki takve plohe sijeku se dvije njezine izvodnice. Sve pravčaste plohe reda većeg od 2 imaju samo jedan sustav izvodnica, tj. svakom njihovom točkom, koja ne leži na višestrukoj liniji, prolazi jedinstvena izvodnica plohe.

Dirne ravnine

Dirna ravnina u nekoj točki vitopere pravčaste plohe reda n sadrži izvodnicu koja prolazi diralištem te siječe plohu po krivulji reda $n-1$.

Pramen dirnih ravnina uzduž jedne izvodnice vitopere pravčaste plohe projektivno je pridružen nizu njihovih dirališta na toj izvodnici.

Konoidalne plohe i konoidi

Konoidalna pravčasta ploha nastaje onda kada je jedna od njezinih ravnalica neizmerno daleki pravac. Ako ploha uz taj neizmerno daleki pravac sadrži kao ravnalicu još i jedan pravac u konačnosti, nazivamo je konoidom.

Torzalni i oskularni pravci

Izvodnicu uzduž koje postoji jedinstvena dirna ravnina što plohu siječe još i u krivulji reda $n-2$ nazivamo *torzalnim pravcem 1. reda*, a onu uzduž koje jedinstvena dirna ravnina siječe plohu još i po krivulji reda $n-s$, *torzalnim pravcem reda $s-1$* , $s = 2, \dots, n-1$. Torzalni pravac 2. reda nazivamo i *oskularnim pravcem plohe*.

Kuspidalne točke

Kuspidalne ili šiljaste točke one su točke dvostruke linije plohe u kojima dvije tangencijalne ravnine koincidiraju. Na pravčastim plohama to su točke presjeka torzalnih pravaca i dvostrukih linija plohe. Svaki ravninski presjek kroz takvu točku imat će u njoj šiljak. One su ujedno i točke koje na dvostrukim linijama razdvajaju dijelove što sadrže čvorove od onih što sadrže izolirane dvostruke točke ravninskih presjeka plohe.

*Dvostruku točku ravninske krivulje nazivamo čvorom, šiljkom ili izoliranom dvostrukom točkom ako su u njoj dvije tangente krivulje realne i različite, realne i jednake ili konjugirano imaginarne.

2. PRAVČASTE PLOHE 4. STUPNJA

Neraspadnuta ravninska krivulja 4. reda može imati najviše tri dvostruke i najviše jednu trostruku točku. Stoga se na plohama 4. reda kao dvostruke krivulje mogu pojaviti samo prostorne krivulje 3. reda, konike ili pravci, a kao trostruka linija jedino pravac.

Pravčaste kvartike (plohe 4. reda) mogu se razvrstavati prema građi njihovih algebarskih jednadžbi [10, str. 203-213]. U geometrijskoj interpretaciji to je razvrstavanje prema redu i položaju njihovih ravnalica, te vrsti i broju torzalnih pravaca. Prema [4] prvu je takvu klasifikaciju načinio Cremona, a doradio Sturm. U knjizi [7, str. 246-294] pravčaste su kvartike detaljno obrađene prema Sturmovoju klasifikaciji po kojoj postoji dvanaest tipova. U daljnjem ćemo se izlaganju pozivati na to razvrstavanje prema kojemu su plohe obrađene i u radnji [6], a u knjigama [8] i [9] navedene su osnovne karakteristike pojedinih tipova. U knjizi [10] Salmon navodi Cayleyjevu klasifikaciju (također dvanaest tipova) te dodaje i svoju (trinaest) tipova. U knjizi [4, str. 76-80] dana je usporedba Cremonine, Sturmove i Cayleyjeve klasifikacije.

3. PRIMJERI PRAVČASTIH PLOHA 4. STUPNJA ZADANIH PRAVCIMA I KONIKAMA

Prema Sturmovu razvrstavanju postoji pet vrsta pravčastih kvartika kod kojih se kao ravnalice mogu odabrati konike i pravci. To su tipovi V, VII, VIII, IX i XI. U ovom ćemo poglavlju svaki od navedenih tipova ilustrirati s jednim ili više primjera.

Parametarske jednadžbe ploha, povoljne za crtanje u *Mathematici*, izvest ćemo u prvom primjeru dok ćemo ih u ostalima samo navesti. One se, naime, za svaki od idućih slučajeva izvode na sličan način.

Torzalne pravce plohe također ćemo istaknuti jedino u prvom primjeru. Dosljedno određivanje njihove vrste, realnosti, imaginarnosti ili podudaranja zahtijevalo bi zntnije zalaženje u područje diferencijalne geometrije ili pak, pri sintetičkom pristupu, vrlo dugačke opise.

3.1. VII. VRSTA U STURMOVOJ KLASIFIKACIJI

Taj tip pravčastih kvartika nastaje kada su ravnalice dva mimosmjerna pravca i konika koja ih ne siječe. Možemo ih promatrati kao presjek triju kompleksa određenih tim ravnalicama, ali i kao presjek kompleksa 2. stupnja određenog konikom i hiperboličke linearne kongruencije određene mimosmjernim pravcima. (Skup od ∞^2 transversala dvaju mimosmjernih pravaca nazivamo linearnom hiperboličkom kongruencijom). Ploha iste vrste nastaje i ako se bilo koji drugi kompleks 2. stupnja odabere kao temeljni.

Mimosmjerni su pravci dvostruke linije tih ploha.

Plohe upravo toga tipa najčešći su primjeri pravčastih kvartika u literaturi ([1, str.177], [3, str.313], [5, str. 180]).

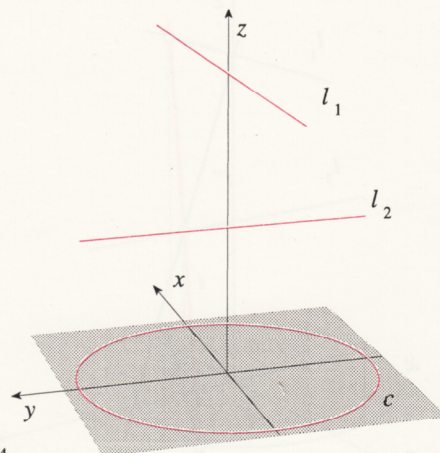
Primjer 3.1.1.

Ravnalice plohe su kružnica u ravnini xy i dva mimosmjerna pravca paralelna s koordinatnim osima (slika 4).

$$c \dots x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

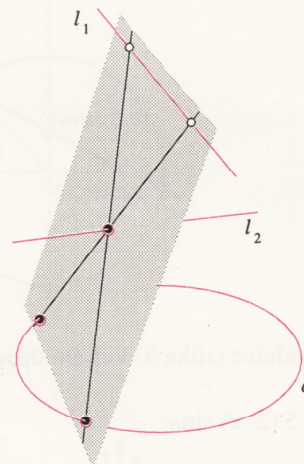
$$l_1 \dots y = 0, \quad z = 2$$

$$l_2 \dots x = 0, \quad z = 1$$

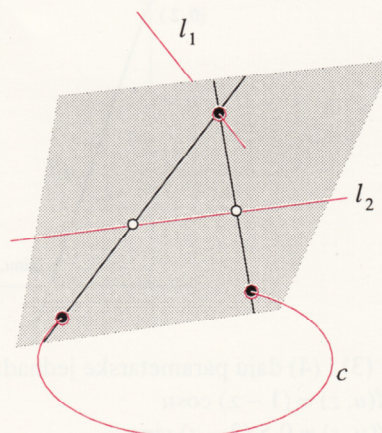


Slika 4

Izvodnice te plohe mogu se konstruirati kao spojnice probodišta pravca l_2 i kružnice c s ravninama pramena $[l_1]$ (slika5), ili kao spojnice probodišta pravca l_1 i kružnice c s ravninama pramena $[l_2]$ (slika6).



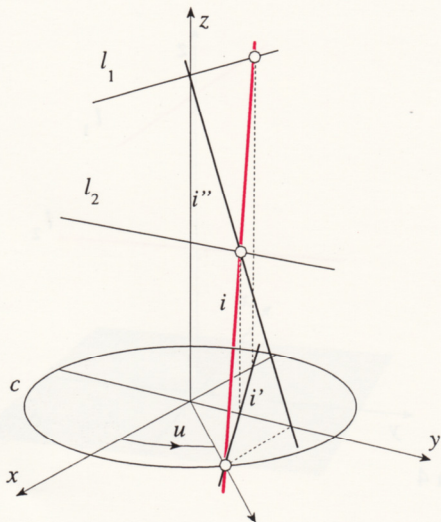
Slika 5



Slika 6

Za dobivanje grafičkog prikaza plohe u programu *Mathematica* najprikladnije je upotrijebiti njezine parametarske jednadžbe. Poznavajući samo osnove analitičke i

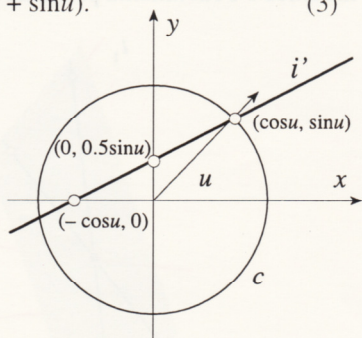
nacrtna geometrije one se u ovom slučaju vrlo jednostavno izvode. Zbog ravnomjerne raspoređenosti izvodnica parametrizirat ćemo plohu pomoću veličina u i z (slika 7).



Slika 7

Iz tlocrta izvodnice (slika 8) zaključujemo da ona leži u ravnini

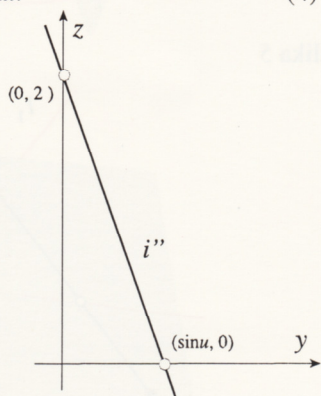
$$y = 0.5 (x \tan u + \sin u). \tag{3}$$



Slika 8

Iz nacrt izvodnice (slika 9) vidimo da se ona nalazi i u ravnini

$$y = 0.5 (2 - z) \sin u. \tag{4}$$



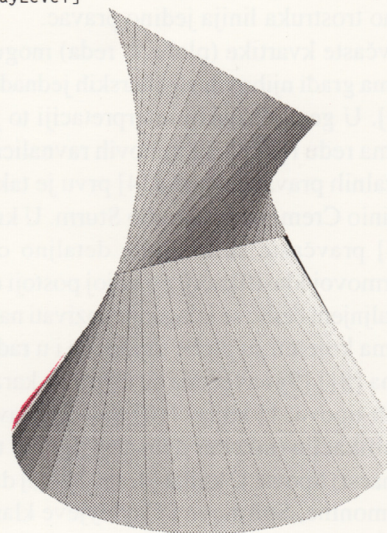
Slika 9

Relacije (3) i (4) daju parametarske jednadžbe plohe

$$\begin{aligned} X(u, z) &= (1 - z) \cos u \\ Y(u, z) &= 0.5 (2 - z) \sin u \\ Z(u, z) &= z, \quad u \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

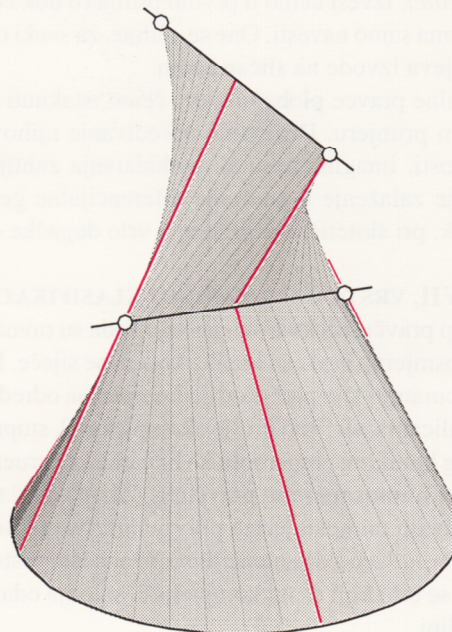
Na slici 10 prikazan je dio plohe omeđen ravninama $z = 0$ i $z = 2$ te naredba za crtanje.

```
<<Graphics'ParametricPlot3D';
ParametricPlot3D[
  {(1-z) Cos[u], 0.5(2-z) Sin[u], z},
  {u, 0, 2Pi, Pi/20}, {z, 0, 2, 1},
  ViewPoint->{-3.5, 2, 1.75},
  Boxed->False, Axes->None,
  ColorOutput->GrayLevel]
```



Slika 10

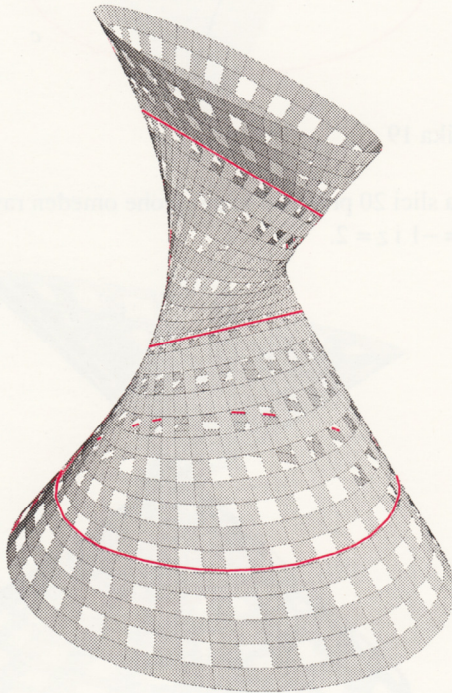
Torzalni pravci leže u onim ravninama pramenova $[l_1]$ i $[l_2]$ koje su dirne za kružnicu c . U svakoj od tih ravnina dvije izvodnice koje se sijeku na dvostrukom pravcu padaju zajedno u torzalni pravac. Ravnina pramena zajednička je dirna ravnina za sve točke torzalnog pravca, osim za kuspidalne. Kuspidalna točka, sjecište dviju neizmerno blizih izvodnica, nalazi se na dvostrukom pravcu koji nije nosilac pramena kojem pripada ravnina (slika 11).



Slika 11

Pomoću programa *Mathematica* moguće je dobiti i prikaze koji, barem djelomice, otkrivaju i unutarnju stranu plohe. Na slici 12 dan je takav prikaz dijela plohe omeđenog ravninama $z = -0.5$ i $z = 2.5$ te naredba za crtanje.

```
Show[
  Table[
    ParametricPlot3D[{{(1-z) Cos[u],0.5(2-z) Sin[u],z},
      {u,0,2Pi,Pi/24},{z,i,i+3/31,3/31}},{i,-.5,2.5-3/31,6/31},
    DisplayFunction->Identity],
  Table[
    ParametricPlot3D[{{(1-z) Cos[u],0.5(2-z) Sin[u],z},
      {u,j,j+Pi/24,Pi/24},{z,-.5,2.5,3/31}},{j,0,2Pi-Pi/12,Pi/12},
    DisplayFunction->Identity],
    ViewPoint->{-3.5,2,1.75},
    Boxed->False,Axes->None,
    ColorOutput->GrayLevel,
    DisplayFunction->$DisplayFunction]]
```



Slika 12

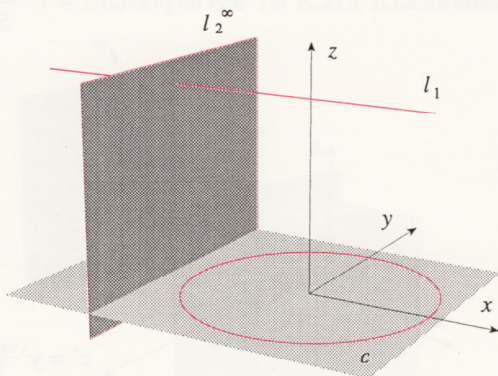
Primjer 3.1.2.

Ravnalice konoida su kružnica u xy ravnini, pravac paralelan s osi x te neizmjereno daleki pravac ravnine yz. (Neizmjereno daleki pravac prostora analitički ćemo zadavati pramenom paralelnih ravnina, dok ćemo pri grafičkom prikazu upotrebljavati bilo koju ravninu tog pramena, tzv. *direkcijsku*.) (Slika 13)

$$c \dots x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

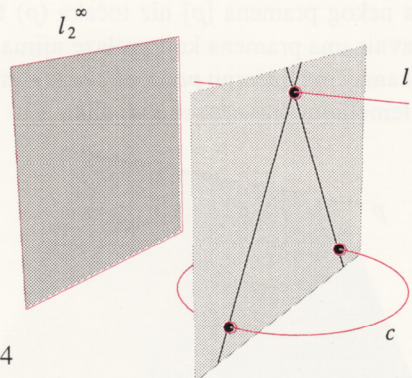
$$l_1 \dots y = 0, \quad z = 1.5$$

$$l_2^\infty \dots x = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

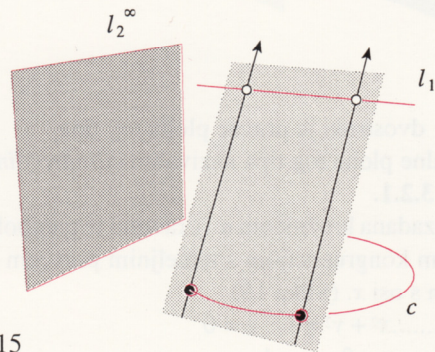


Slika 13

Izvodnice konoida određuju se kao spojnice probodišta pravca l_1 i kružnice c s ravninama pramena paralelnih ravnina $[l_2^\infty]$ (slika 14), ili u ravninama pramena $[l_1]$ kao paralele s direkcijskom ravninom kroz probodišta kružnice s ravninama pramena (slika 15).



Slika 14



Slika 15

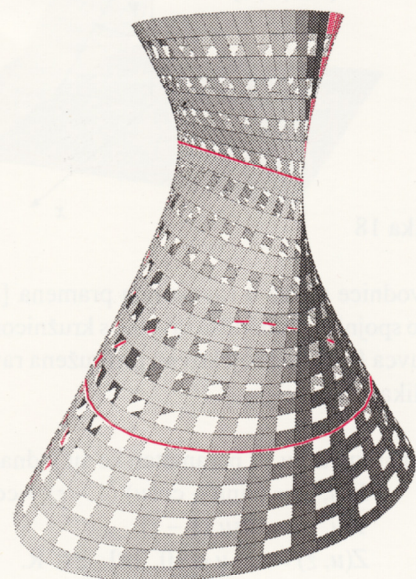
Za iste parametre kao u prethodnom primjeru parametarske su jednadžbe tog konoida:

$$X(u, z) = \cos u$$

$$Y(u, z) = \frac{3-2z}{3} \sin u$$

$$Z(u, z) = z, \quad u \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

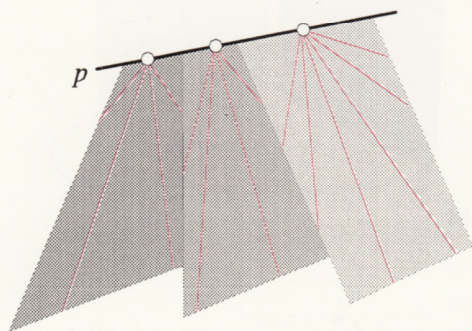
Na slici 16 prikazan je dio konoida omeđen ravninama $z = -0.8$ i $z = 2.3$.



Slika 16

3.2. VIII. VRSTA U STURMOVOJ KLASIFIKACIJI

Taj tip ploha nastaje iz prethodnog ako se pravci l_1 i l_2 podudaraju, tj. izvodnice plohe su zajedničke zrake kompleksa 2. stupnja i linearne paraboličke kongruencije s temeljnim pravcem $l = l_1 = l_2$. (Pridruži li se projektivno ravninama nekog pramena $[p]$ niz točaka (p) tada svi pravci u ravninama pramena koji prolaze njima pridruženim točkama čine linearnu paraboličku kongruenciju određenu temeljnim pravcem p . Vidi sliku 17.)



Slika 17

Pravac l dvostruki je pravac ploha tog tipa. Konoidalne plohe tog tipa nazivamo *cilindroidima*.

Primjer 3.2.1.

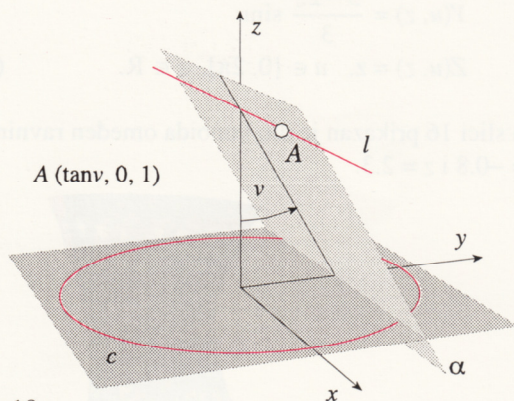
Ploha je zadana kružnicom u xy ravnini te paraboličkom linearnom kongruencijom s temeljnim pravcem koji je paralelan s osi x . (Slika 18)

$$c \dots x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

$$l \dots y = 0, \quad z = 1$$

Projektivitet između niza točaka (l) i pramena ravnina $[l]$, koji određuje paraboličku linearnu kongruenciju, zadan je na sljedeći način:

$$A \leftrightarrow \alpha \Leftrightarrow x_A = \tan v, \quad v = \angle(\alpha, z), \quad A \in (l), \quad \alpha \in [l].$$

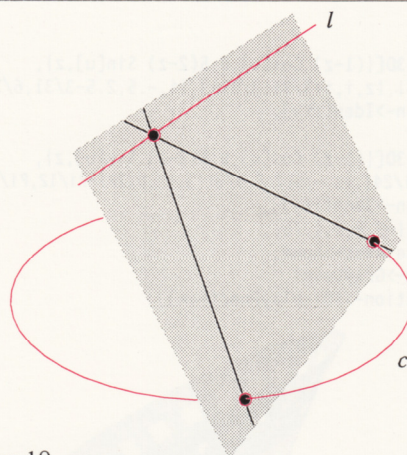


Slika 18

Izvodnice plohe u ravninama pramena $[l]$ određuju se kao spojnice probodišta ravnine s kružnicom c i one točke pravca l koja je projektivno pridružena ravnini pramena (Slika 19).

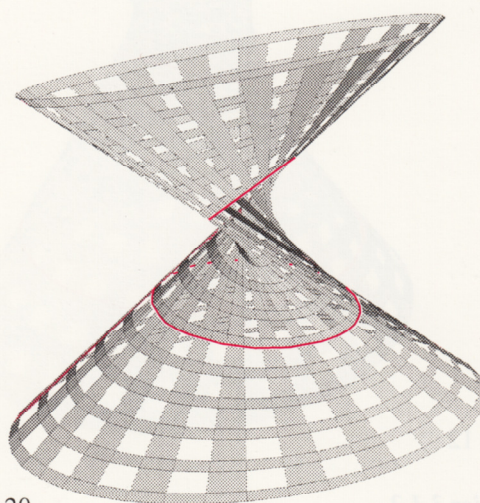
Za parametre u i z parametarske su jednadžbe plohe:

$$\begin{aligned} X(u, z) &= (\sin u - \cos u)(1 - z) + \cos u \\ Y(u, z) &= \cos u(1 - z) \\ Z(u, z) &= z, \quad u \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7)$$



Slika 19

Na slici 20 prikazan je dio plohe omeđen ravninama $z = -1$ i $z = 2$.



Slika 20

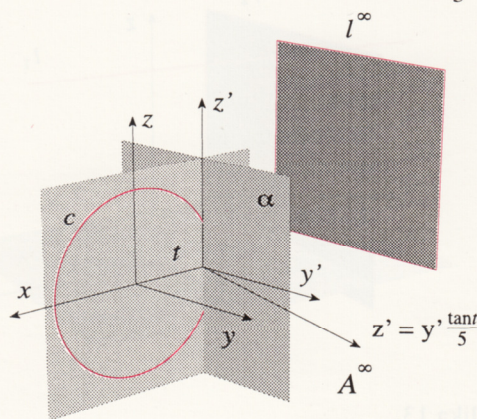
Primjer 3.2.2.

Cilindroid je zadan kružnicom u ravnini xz , neizmjereno dalekim pravcem ravnine yz te paraboličkom linearnom kongruencijom kojoj je taj pravac temeljni (slika 21).

$$c \dots x^2 + z^2 = 1, \quad y = 0$$

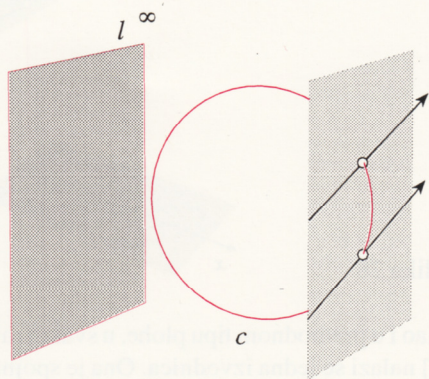
$$l^\infty \dots x = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Projektivitet $[l^\infty] \overline{(l^\infty)}$ određen je na sljedeći način: Ako je ravnina $\alpha \in [l^\infty]$ dana jednadžbom $x = t$, tada njoj pridružena točka $A^\infty \in \alpha, A^\infty \in l^\infty$ leži na pravcu $z = y \frac{\tan t}{5}$.



Slika 21

Izvodnice plohe u ravninama pramena $[l^\infty]$ određuju se kao spojnice probodišta ravnine s kružnicom c i one točke pravca l^∞ koja je projektivno pridružena ravnini pramena (slika 22).

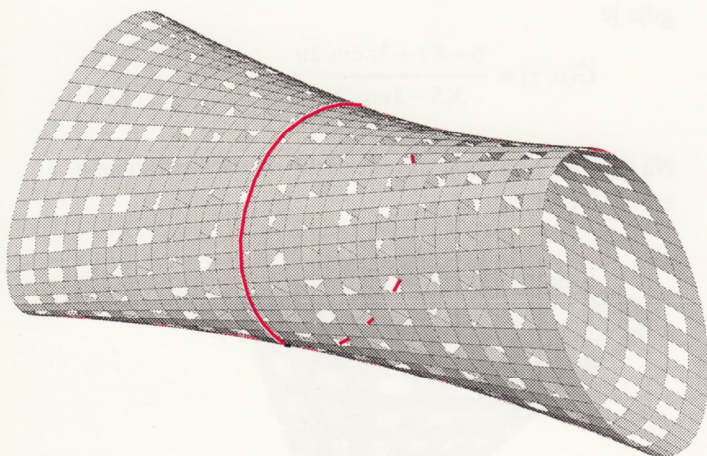


Slika 22

Za ravnine pramena $[l^\infty]$ u kojima leže realne izvodnice cilindroida možemo uvesti supstituciju $t = \cos u$, $u \in [0, \pi]$. Sada su parametarske jednadžbe plohe, za parametre u i y , dane sa:

$$\begin{aligned} X(u, y) &= \cos u \\ Y(u, y) &= y \\ Z_{1,2}(u, y) &= y \frac{\tan(\cos u)}{5} \pm \sin u, \\ u &\in [0, \pi], y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8)$$

Na slici 23 prikazan je dio plohe omeđen ravninama $y = -3$ i $y = 3$.



Slika 23

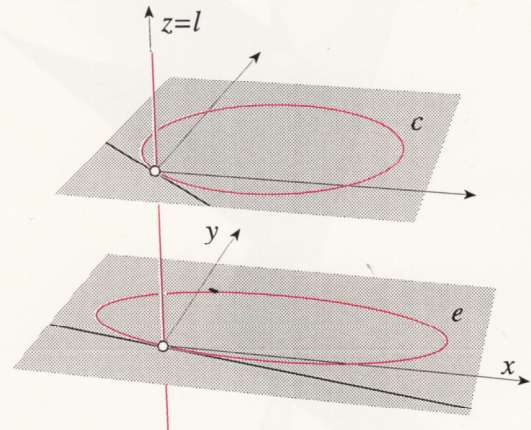
3.3. IX. vrsta u Sturmovoj klasifikaciji

Plohe tog tipa nastaju onda ako se kao ravnalice odaberu dvije konike koje se ne sijeku i jedan pravac što svaku od njih siječe u jednoj točki, dok su tangente konika u tim sjecištima s pravcem mimosmjerne. Pravac je trostruka linija ploha. Prema formuli (3) izašlo bi da je to četverostruka linija. Međutim, taj se pravac, iako se konike ne sijeku, pojavljuje kao zajednička izvodnica stožaca koji nastaju pri raspadu plohe osmoga reda te pri računanju njegove višestrukosti treba od vrijednosti izraza (3) oduzeti broj 1.

Primjer 3.3.1.

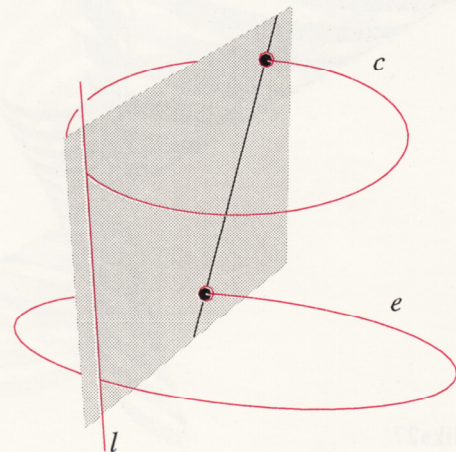
Ploha je zadana elipsom u ravnini xy , kružnicom u ravnini paralelnoj s ravninom xy te s osi z (slika 24).

$$\begin{aligned} e \dots\dots (2x - 1)^2 + (5y - \sqrt{3})^2 &= 4, z = 0 \\ c \dots\dots (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 &= 2, z = 1 \\ l \dots\dots x = 0, y = 0 \end{aligned}$$



Slika 24

U svakoj ravnini pramena $[l]$ nalazi se jedna izvodnica te plohe. Ona je spojnica probodišta ravnine s konikama c i e (slika 25). Izvodnice plohe mogu se također dobiti i kao prodorne izvodnice dvaju stožaca kojima je vrh u točki pravca l , a osnove konike c i e . To je ujedno i način na koji se pokazuje da je pravac l trostruki pravac plohe.



Slika 25

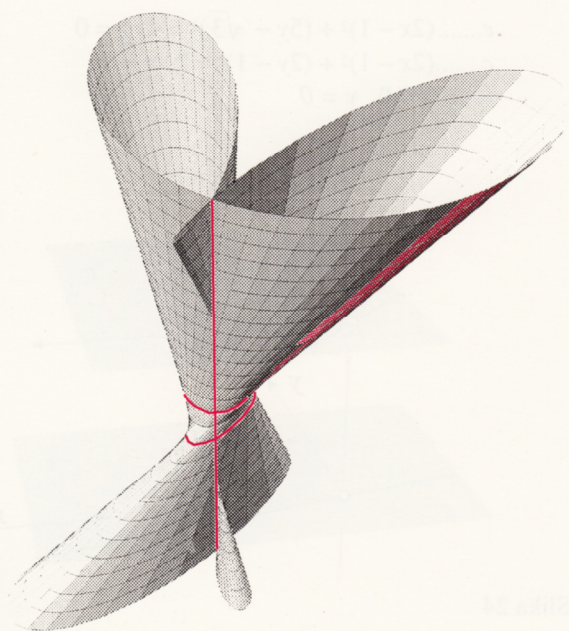
Za parametre u i z parametarske su jednadžbe plohe:

$$\begin{aligned} X(u, z) &= \frac{\cos u}{58 - 42 \cos 2u} F(u, z) \\ Y(u, z) &= \frac{\sin u}{58 - 42 \cos 2u} F(u, z) \\ Z(u, z) &= z, \quad u \in [0, \pi], z \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (9)$$

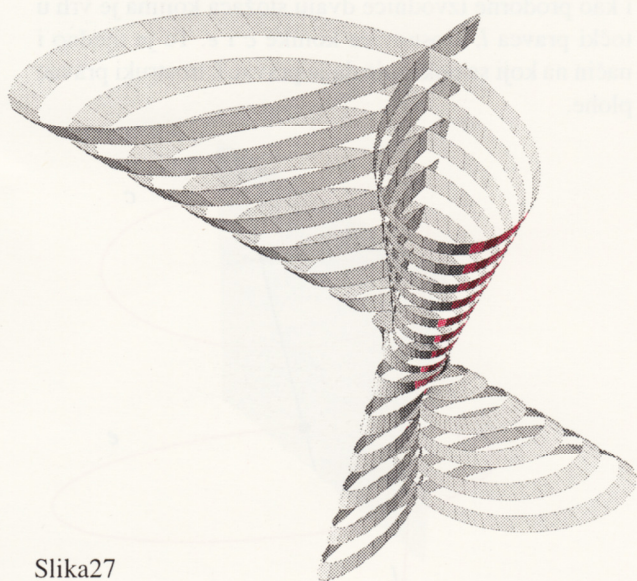
gdje je

$$\begin{aligned} F(u, z) &= \cos u (16 + 21z) - 21z \cos 3u \\ &- 40\sqrt{3} \sin u (z - 1) + 2z \sin u (29 - 21 \cos 2u). \end{aligned}$$

Na slikama 26 i 27 prikazan je dio te plohe omeđen ravninama $z = -5$ i $z = 8$.



Slika 26



Slika 27

3.4. XI. VRSTA U STURMOVOJ KLASIFIKACIJI

Kod ploha tog tipa ravnalice su jednake onima u prethodnom tipu, samo što tangente konika u njihovim sjecištima s pravcem leže u istoj ravnini.

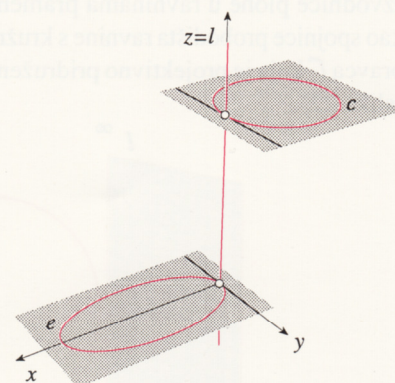
Primjer 3.4.1.

Ploha je zadana elipsom u ravnini xy , kružnicom u ravnini paralelnoj s ravninom xy , te s osi z . Tangente konika u njihovim sjecištima s osi z paralelne su (slika 28).

$$e \dots (x-1)^2 + 4y^2 = 1, \quad z = 0$$

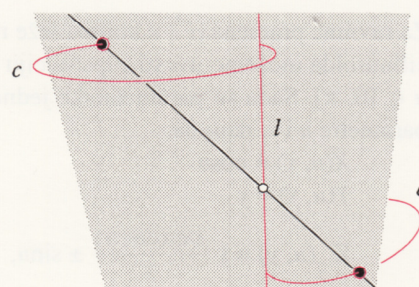
$$c \dots (3x+1)^2 + 9y^2 = 4, \quad z = 2$$

$$l \dots x = 0, \quad y = 0$$



Slika 28

Kao i u prethodnom tipu plohe, u svakoj ravnini pramena $[l]$ nalazi se jedna izvodnica. Ona je spojnica probodišta ravnine s konikama c i e (slika 29).



Slika 29

Za parametre u i z parametarske su jednadžbe plohe:

$$X(u, z) = 2 \cos^2 u G(u, z)$$

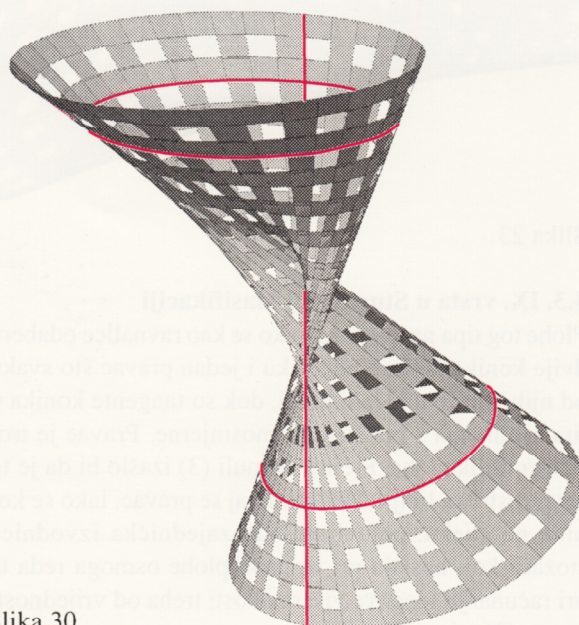
$$Y(u, z) = \sin 2u G(u, z)$$

$$Z(u, z) = z, \quad u \in [0, \pi], \quad z \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

gdje je

$$G(u, z) = \frac{6 - 8z + 3z \cos 2u}{3(5 - 3 \cos 2u)}$$

Na slici 30 prikazan je dio ove plohe omeđen ravninama $z = -0.5$ i $z = 2.5$.



Slika 30

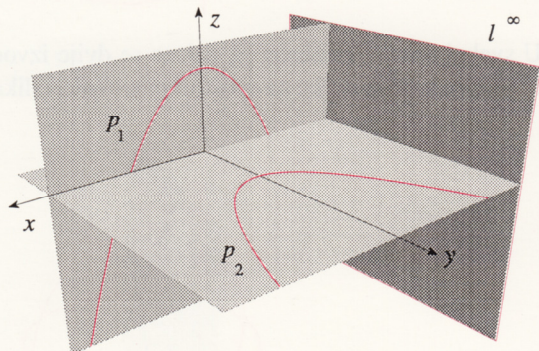
Primjer 3.4.2.

Konoidalna ploha zadana je dvjema parabolama koje leže u ravninama xz i xy te neizmjerljivo dalekim pravcem ravnine paralelne s njihovim osima (slika 31). Tangente parabola u njihovim neizmjerljivo dalekim točkama leže u neizmjerljivo dalekoj ravni prostora.

$$p_1 \dots z = -0.5x^2 + 2, \quad y = 0$$

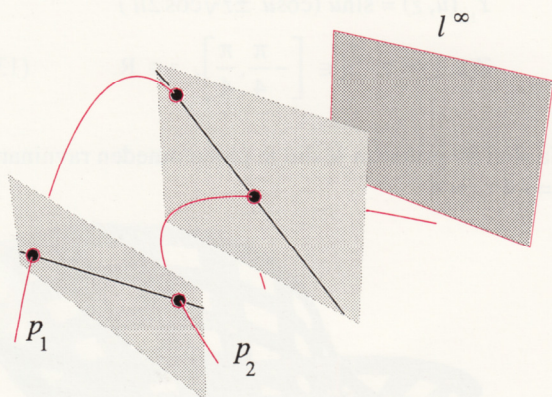
$$p_2 \dots y = 0.5x^2 + 2, \quad z = 0$$

$$l^\infty \dots x = t, \quad t \in \mathbb{R}$$



Slika 31

Izvodnice plohe u paralelnim ravninama pramena $[l^\infty]$ određuju se kao spojnice probodišta ravnine s parabolama (slika 32). One se također mogu dobivati i kao proodne krivulje paraboloidnih valjaka kojima su izvodnice paralelne s direkcijskom ravninom.



Slika 32

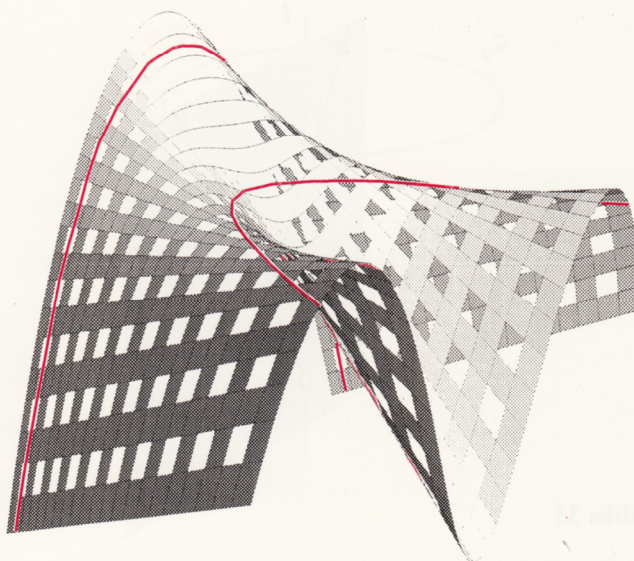
Za crtanje u Mathematici eksplicitni oblik jednadžbe plohe prikazat ćemo parametarski.

$$X(x, y) = x$$

$$Y(x, y) = y$$

$$Z(x, y) = \frac{-x^4 - 8y + 2x^2y + 16}{2(4 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Na slici 33 prikazan je dio plohe omeđen ravninama $x = -3.9, x = 3.9, y = -0.5$ i $y = 6.5$.



Slika 33

3.5. V. VRSTA U STURMOVOJ KLASIFIKACIJI

Plohe tog tipa mogu se zadati dvjema konikama koje se sijeku u dvjema točkama, te pravcem koji u jednoj točki siječe jednu od njih. Pravac i konika koja se s njim siječe dvostruke su linije tih ploha.

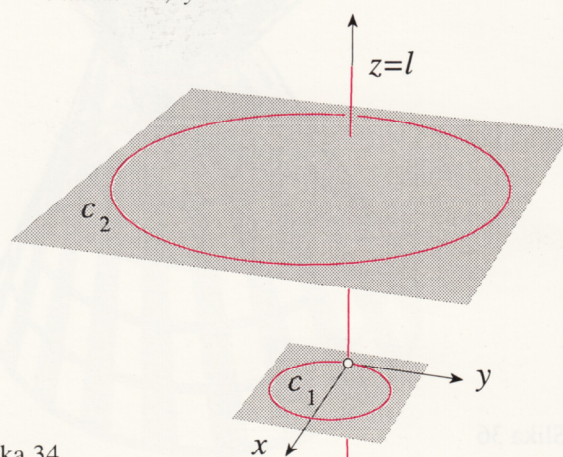
Primjer 3.5.1.

Ploha je zadana dvjema kružnicama koje leže u ravninama paralelnim s ravninom xy . (Budući da svaka kružnica prolazi parom apsolutnih točaka neizmjerljivo dalekog pravca njezine ravnine, te su točke sjecišta svih kružnica u ravninama paralelnog pramena). Jedna od kružnica siječe os z koja je također ravnalica plohe (slika 34). Takav je primjer obrađen u knjizi [3, str.318]

$$c_1 \dots (x - 1)^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

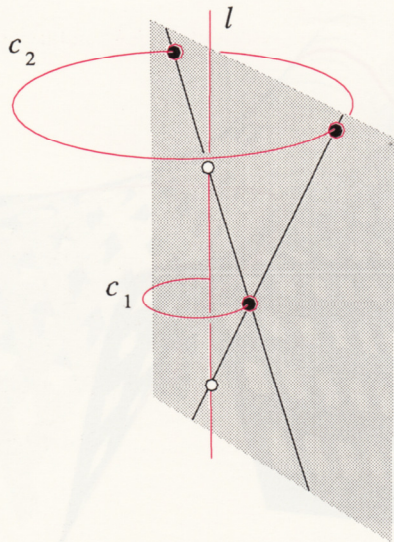
$$c_2 \dots (x - 2)^2 + y^2 = 9, \quad z = 4$$

$$l \dots x = 0, \quad y = 0$$



Slika 34

U svakoj ravni pramena $[l]$ nalaze se dvije izvodnice te plohe koje se sijeku na dvostrukoj kružnici c_1 (slika 35). Izvodnice se također mogu dobiti i kao proodne izvodnice dvaju stožaca kojima se vrhovi nalaze na pravcu l , a osnove su im kružnice c_1 i c_2 . Svaka dva takva stožca sijeku se u paru izotropnih izvodnica te u dvjema izvodnicama plohe.

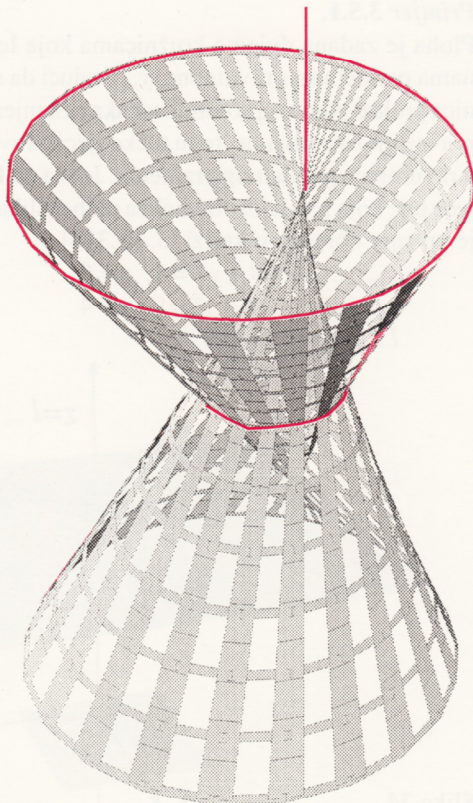


Slika 35

Za parametre u i z parametarske su jednadžbe plohe:

$$\begin{aligned} X(u, z) &= 1 + \cos 2u + 0.25 z \cos u \sqrt{7 + 2 \cos 2u} \\ Y(u, z) &= \sin 2u + 0.25 z \sin u \sqrt{7 + 2 \cos 2u} \\ Z(u, z) &= z, \quad u \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (12)$$

Na slici 36 prikazan je dio ove plohe omeđen ravninama $z = -4$ i $z = 4$.

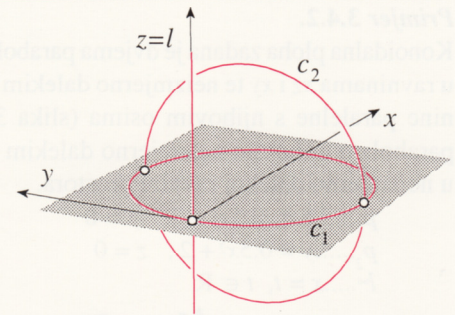


Slika 36

Primjer 3.5.2.

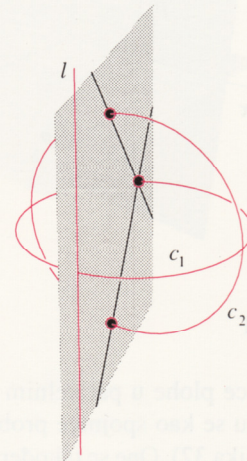
Ploha je zadana s dvije kružnice koje se sijeku u dvije realne točke. Jedna od kružnica siječe os z koja je također ravnalica plohe. (Slika 37)

$$\begin{aligned} c_1 \dots (x-1)^2 + y^2 &= 1, \quad z = 0 \\ c_2 \dots y^2 + z^2 &= 1, \quad x = 1 \\ l \dots x = 0, \quad y &= 0 \end{aligned}$$



Slika 37

U svakoj ravnini pramena l nalaze se dvije izvodnice ove plohe koje se sijeku na dvostrukoj kružnici (slika 38).

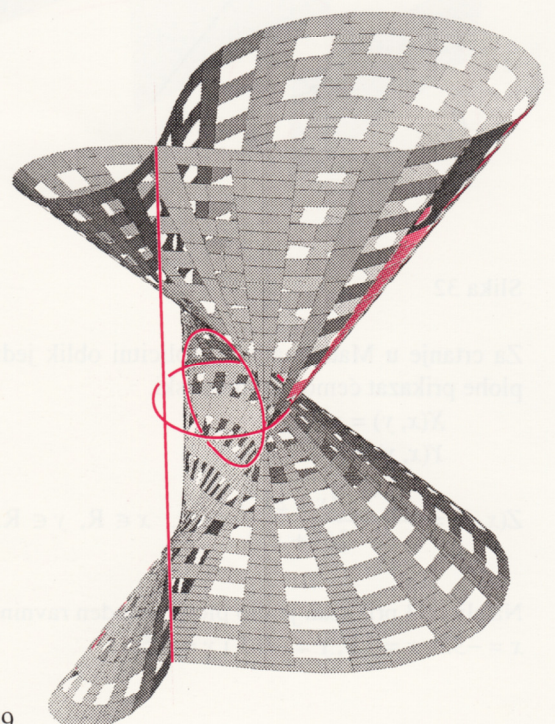


Slika 38

Za parametre u i z parametarske jednadžbe plohe su:

$$\begin{aligned} X_{1,2}(u, z) &= \cos u (\cos u \pm z \sqrt{\cos 2u}) \\ Y_{1,2}(u, z) &= \sin u (\cos u \pm z \sqrt{\cos 2u}) \\ Z(u, z) &= z, \quad u \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Na slici 39 prikazan je dio te plohe omeđen ravninama $z = -4$ i $z = 4$.



Slika 39

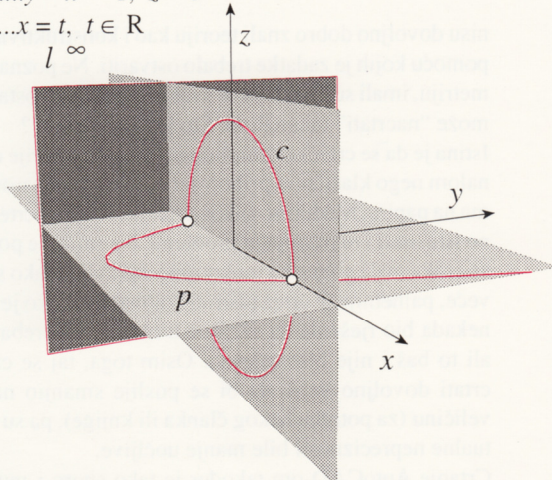
Primjer 3.5.3.

Konoidalna ploha tog tipa zadana je kružnicom i parabolom koje se sijeku te neizmjerljivo dalekim pravcem u ravni paralelnoj s osi parabole, tj. pravcem koji siječe parabolu u njezinoj neizmjerljivo dalekoj točki. Parabola i neizmjerljivo daleka ravnalica dvostruke su linije te plohe (slika 40).

$$c \dots x^2 + z^2 = 1, y = 0$$

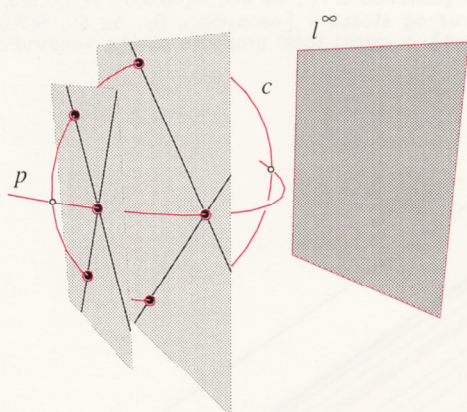
$$p \dots y = x^2 - 1, z = 0$$

$$l^\infty \dots x = t, t \in \mathbb{R}$$

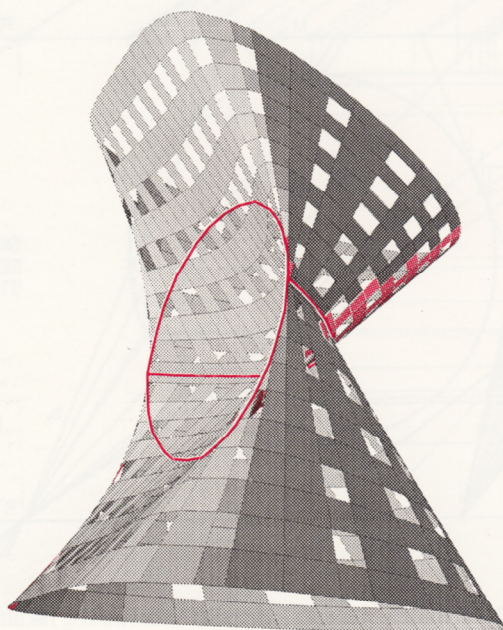


Slika 40

U svakoj ravni paralelnoj s ravninom yz nalaze se dvije izvodnice te plohe koje se sijeku u točki parabole (slika 41).



Slika 41



Slika 42

U ravninama $x = t$ izvodnice plohe dane su jednadžbama

$y = t^2 \pm z\sqrt{1-t^2} - 1$. Stoga se parametarske jednadžbe plohe mogu napisati:

$$X(x, z) = x$$

$$Y_{1,2}(x, z) = x^2 \pm z\sqrt{1-x^2} - 1$$

$$Z(x, z) = z, \quad x \in [-1, 1] \quad z \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Na slici 42 prikazan je dio konoida omeđen ravninama $z = -2$ i $z = 2$.

ZAKLJUČAK

Na principima izvođenja sprovedenim u ovom radu mogu se lako dobiti brojni oblici različitih pravčastih ploha 4. stupnja, kako odabirom položaja ravnalica tako i odabirom vrsta konika.

Kako su one nastavne teme koje snažnije potiču kreativnost studenata nedvojbeno plodonosnije u smislu ostvarenja obrazovnih ciljeva, sklona sam zaključiti da bi znatnije uključivanje takvih sadržaja u nastavu geometrije, u prvom redu na fakultetima graditeljskih usmjerenja, pridonijelo njezinoj kvaliteti.

Skice generirane u programu *Mathematica 3.0*, doradene su za tisak u programu *FreeHand 7.0*.

LITERATURA

- [1] BABIĆ, I., GORJANC, S., SLIEPČEVIĆ, A., SZIROVICZA, V.: *Konstruktivna geometrija - vježbe*, IGH, Zagreb, 1994.
- [2] BRAUNER, H., KICKINGER, W.: *Geometrija u graditeljstvu I*, (prijevod: P. Kurilj, B. Hajsig) Školska knjiga, Zagreb, 1980.
- [3] FLADT, K., BAUR, A.: *Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven*, Friedr. Viewg & Sohn, Braunschweig 1975.
- [4] JESSOP, C. M.: *A Treatise on the Line Complex* Chelsea Publishing Company, New York, 1969. (reprint)
- [5] KUČINIĆ, B., KRISTOFOROVIĆ, O., SALER, I.: *Oble forme u graditeljstvu*, Zagreb, 1992.
- [6] KURILJ, P.: *Konstruktivna obrada pravčastih ploha 3. i 4. stupnja*, magistarski rad, Zagreb, 1968.
- [7] MÜLLER, E., KRAMES, J. L.: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen*, Franc Deuticke, Leipzig und Wien, 1931.
- [8] NIČE, V.: *Deskriptivna geometrija II*, Školska knjiga, Zagreb, 1980.
- [9] NIČE, V.: *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.
- [10] SALMON, G.: *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*, Chelsea Publishing Company, New York, 1965. (reprint)

Mr. sc. Sonja Gorjanc

Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Kačićeva 26, 10000 Zagreb
e-mail: sgorjanc@grad.hr