Originelle wissenschaftliche Arbeit
Angenomen 26. 11. 1998.

ANA SLIEPČEVIĆ

Die Brennpunktskurven in KS–Büscheln und KS–Scharen der isotropen Ebene

The Focal Curve of the Pencil and the Range of Conics in an Isotropic Plane

ABSTRACT

Although the pencil and the range of conics in an isotropic plane are dual their focal curves are not dual. In the paper we proved that the focal curve of the pencil of conics in an isotropic plane is in general non rational cubic. This cubic is constructed in the general and for some degenerated cases. For the range of conics the focal curve is the rational cubic with the absolute point of the plane as a double point. This cubic is constructed in general and in some interesting special cases.

Key words: focal curve, isotropic plane, pencil of conics, range of conics

Krivulje žarišta u pramenovima krivulja drugog reda i drugog razreda u izotropnoj ravnini

SAŽETAK

Iako su pramen i niz konika u izotropnoj ravnini dualne tvorevine, njihove žarišne krivulje nisu dualne. U članku se dokazuje da je žarišna krivulja rednog pramena konika izotropne ravnine općenito neracionalna kubika. Ova se kubika konstruira u općem i u nekim degeneriranim slučajevima. U pramenu krivulja drugog razreda žarišna je krivulja racionalna kubika s dvostrukom točkom u apsolutnoj točki ravnine. Ova se kubika konstruira u općem i nekim zanimljivim posebnim slučajevima.

Ključne riječi: izotropna ravnina, niz konika, pramen konika, žarišna krivulja

Kegelschnittbüschel (i. f. KS–Büschel) in der isotropen Ebene Π wurden bereits in [4] untersucht und klassifiziert. Dagegen ist die Behandlung von KS–Scharen diesen Ebene anscheinend noch offen. Während die Klassifikationstheorien von KS–Büscheln und KS–Scharen aufgrund der Selbstdualität von Π i. w. einstimmen, sind z. B. die zugehörigen Brennpunktskurven nicht dual.

In einer isotropen Ebene sind die Brennpunkte einer algebraischen Kurve bekanntlich als die Berührungspunkte ihrer isotropen Tangenten definiert, sodaß die Anzahl der isotropen Brennpunkte einer algebraischen Kurve gleich ihrer Klasse ist.

In diesem Artikel wurden die Brennpunktsmengen der Kegelschnitte eines KS–Büschels wie auch einer KS–Schar konstruiert. Diese Punktmengen erwiesen sich als algebraische Kurven. Genau gilt

Satz 1.

Die Brennpunktskurve der Kegelschnitte eines KS–Büschels der isotropen Ebene ist eine i. a. nichtrationale Kurve dritter Ordnung, für welche ihrerseits die Grundpunkte des KS–Büschels isotrope Brennpunkte sind und die eine isotrope Asymptote besitzt.

Beweis. Im folgenden wird die isotrope Ebene stets als projektiv abgeschlossene reelle affine Ebene mit einem uneigentlichen Linienelement (f, F) als Absolutfigur aufgefaßt; diese Ebene wird im Hinblick auf die algebraische Fragestellung gelegentlich noch komplex erweitert.

Seien zunächst vier verschiedene Punkte A, B, C und D zulässig als Grundpunkte eines nichtausgearteten KS–Büschels (k_i) gegeben (Abb. 1). Jede Gerade des Büschels isotroper Geraden (F) berührt, im algebraischen Sinn gezählt, zwei Kegelschnitte von (k_i). Bestimmen die Punkte A, B, C, D zusammen mit dem absoluten Punkt F einen nicht ausgearteten Kegelschnitt k_F, so erwiest sich F trivialerweise für diesen als (einziger) isotroper Brennpunkt, sodaß die gesuchte Brennpunktskurve mit jeder isotropen Geraden im algebraischen Sinn drei Punkte gemeinsam hat. Für „allgemeine" KS–Büschel ist sie somit eine durch F gehende, also isotrop–zirkuläre, Kurve dritter Ordnung k^3. Auf der isotropen Tangente t_F von k_F liegt noch ein weiterer, i. a. von F verschiedener Punkt $\bar{F}$ von k^3. Dieser Punkt ist der Restschnittpunkt von k^3 mit der isotropen Asymptote t_F von k^3.

Dass die Brennpunktskurve wirklich eine Kurve dritter Ordnung ist, kann man auch auf andere Weise beweisen. Die Brennpunkte eines Kegelschnittes k_i sind bekannlich in die Schnittpunkte seiner isotropen Tangenten mit der dem Punkt F zugeordneten Polaren. Die Polaren aller Kegelschnitte eines gegebenen KS–Büschels bezüglich des Pols F bilden ein Geradenbüschel $(\bar{F})$, dessen Grundpunkt zum

Punkt F bezüglich des KS–Büschels doppelt konjugiert ist [2]. Den Punkt $\bar{F}$ kann man z. B. als den Schnittpunkt je zwei der Polaren p_1, p_2, p_3 der drei entarteten Kegelschnitte des KS–Büschels konstruieren.

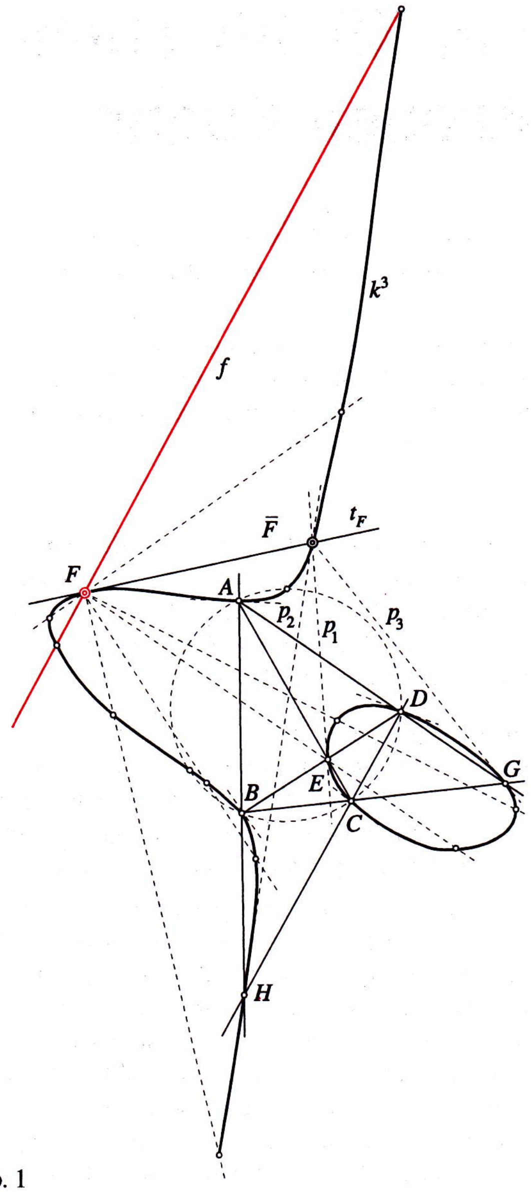

Abb. 1

In den Geradenbüscheln (F) und $(\bar{F})$ ordnen wir der Polaren von F bezüglich eines festen Kegelschnittes des KS–Büschels dessen zwei isotrope Tangenten zu. Das Erzeugnis dieser zwei Geradenbüschel ist also zunächst von vierter Ordnung. Weil aber die Gerade $F\bar{F}$, als die Tangente und die Polare des den Punkt F enthaltenden Kegelschnittes sich selbst zugeordnet ist, spaltet sich von dieser Kurve vierter Ordnung die Gerade $F\bar{F}$ ab, sodaß sich eine im allgemeinen ireduzible Kurve k^3 dritter Ordnung als die Brennpunktskurve des gegebenes KS–Büschels einstellt.

Die Brennpunktskurve k^3 schneidet die absoluten Gerade f, ausser im absoluten Punkt F, noch in den zwei Punkten. Es sind dies die uneigentlichen Berührungspunkte der beiden Parabeln des gegebenes KS–Büschels.

Das gegebene KS–Büschel induziert bekanntlich auf jeder Geraden g des Büschels (F), die keinen Grundpunkt enthält, eine involutorische Projektivität, die sogenannte Desargues–Involution. Genau in den Fixpunkten dieser Involution berührt g Kegelschnitte des KS–Büschels. Damit ist die Brennpunktskurve k^3 als Menge der Fixpunkte der Desargues–Involutionen auf den Geraden des Büschels (F) erklärt.

Jede Gerade g des Geradenbüschels (F) berührt im allgemeinen zwei Kegelscnitte des KS–Büschels (k_i). Im Fall, daß die Gerade $g \in (F)$ einen Grundpunkt des KS–Büschels enthält, artet die Desargues–Involution aus mit einem einzigen in den Grundpunkt fallenden Fixpunkt. Die zugehörigen berührenden Kegelschnitte des KS–Büschels sind also in einem vereinigt. Die Geraden FA, FB, FC und FD sind deswegen die isotrope Tangenten der Brennpunktskurve, also sind A, B, C, D Brennpunkte von k^3. Da die den (nichtausgearteten) durch F gehenden Kegelschnitt $k_F \in (k_I)$ berührende isotrope Tangente zweifach zu zählen ist, und die Klasse von k^3 höchtens 6 betragen kann, sind die vier Grundpunkte A, B, C, D die einzigen eingentlichen Brennpunkten von k^3.

Das KS–Büschel (k_i) enthält im allgemeinen unendlich viele isotropen Ellipsen und Hyperbeln, die zwei Parabeln und keinen Kreis. Enthält das gegebene KS–Büschel (k_i) einen isotropen Kreis, so besitzt die entsprechende Brennpunktskurve die absolute Gerade f als die isotrope Asymptote, und ihr Zirkularitätsgrad ist gleich zwei (Abb. 2).

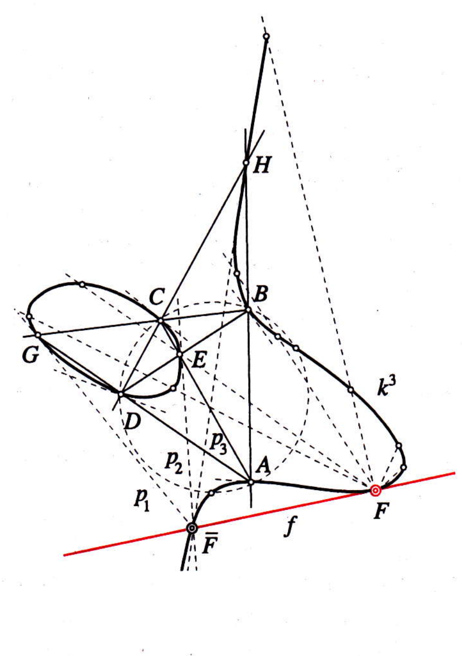

Abb. 2

Abb. 3. zeigt die Konstruktion der Brennpunktskurve eines Hyperbelbüschels. Fällt eine der Grundpunkte, etwa genau der Grundpunkt A, auf die absolute Gerade f, dann enthält das KS–Büschel abgesehen von einer einzigen Parabel nur Hyperbeln (vgl. Abb. 3). Die Brennpunktskurve k^3 ist dann eine parabolische Kubik mit dem uneigentlichen Linienelement (A, f).

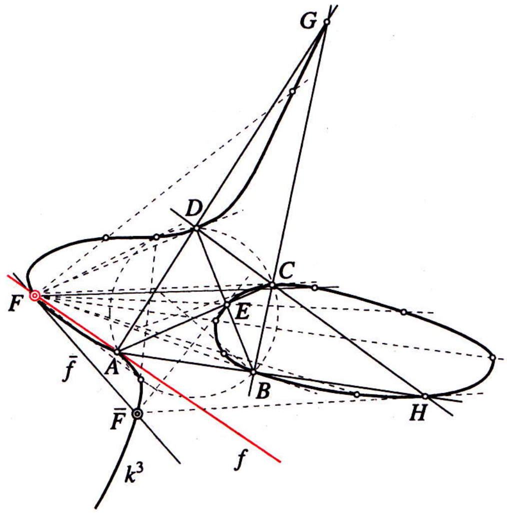

Abb. 3

Fällt der Grundpunkt A mit dem absoluten Punkt F zusammen, wird das Büschel der konfokalen speziellen Hyperbeln gegeben.

Sind zwei Grundpunkte, etwa A und B, mit der absoluten Geraden f inzident, zerfällt die Kurve k^3 in die Gerade f und einen Kegelschnitt durch C, D und die eigentlichen Diagonalenschnittpunkte E und G des Grundpunktvierecks $(A;B;C;D)$ (Abb. 4).

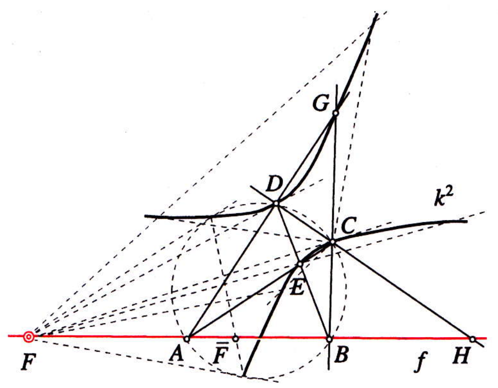

Abb. 4

Fällt der uneigentliche Diagonalenschnittpunkt H dabei in den absoluten Punkt F, dann ist auch dieser Restkegelschnitt noch reduzibel, sodaß die Brennpunktskurve dann aus f und den Geraden CD und EG besteht.

Ein Zerfall der Brennpunktskubik tritt auch dann ein, wenn eine der sechs Seiten des Grundpunktvierecks, etwa AB, isotrop ist ohne daß dabei Grundpunkte auf der absoluten Geraden f zu liegen brauchen (Abb. 5). Auch in diesem Fall entartet die Brennpunktskurve auf die isotrope Gerade AB und einen Kegelschnitt durch C, D und die nicht auf AB liegenden Diagonalecken E und G. Im Fall, daß die auf AB liegende Diagonalecke H mit dem absoluten Punkt F übereinstimmt, zerfällt k^3 in die drei Geraden AB, CD und EG.

Die Diskusion der übrigen Typen von KS–Büscheln (z. B. Berührbüschel, Oskulationsbüschel, Hyperoskulationsbüschel) hinsichtlich ihrer möglichen Brennpunktskurven kann nach dem verstehenden Muster erfolgen und wird deshalb dem Leser überlassen.

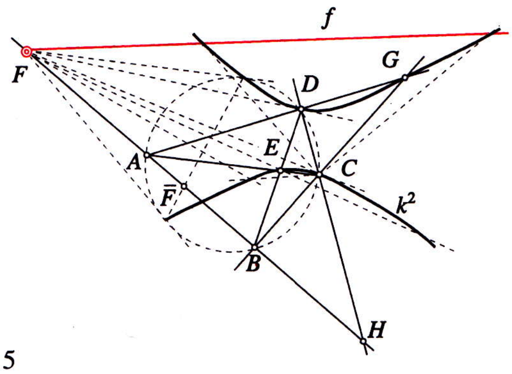

Abb. 5

Für KS–Scharen mit vier verschiedenen, reellen Grundtangenten m, n, p, q gilt

Satz 2.

Die Brennpunktskurve einer allgemeinen KS–Schar der isotropen Ebene ist eine rationale Kubik.

Beweis. Eine KS–Schar (k^i) möge „allgemein" heißen, wenn sie ein Grundtangentenvierseit besitzt, dessen Seiten und Diagonalen bzw. dessen sechs Ecken fremd zum absoluten Linienelement (F, f) liegen. Jede isotrope Gerade $t \in (F)$ ist Tangente genau eines Kegelschnittes einer solchen KS–Schar, jedem Kegelschnitt sind nämlich wieder zwei isotrope Tangenten, also auch zwei Brennpunkte zugeordnet, sodaß eine (1,2)–Korespondenz zwischen den Kegelschnitte der Schar und den isotropen Geraden vorliegt.

Der absolute Punkt F gehört zwei Scharkegelschnitten an. Für diese beiden Kegelschnitte ist F jeweils der einzige Brennpunkt, sodaß die gesuchte Brennpunktskurve in F einen Doppelpunkt besitzt und dort die beiden Scharkegelschnitte berührt.

Weil jede isotrope Gerade außer dem Doppelpunkt F noch einen weiteren Brennpunkt trägt, folgt damit, daß die Brennpunktskurve eine rationale Kubik oder eine reduzible Kurve 3. Ordnung sein muß.

Diesen Satz kann man auch auf andere Weise beweisen. Nämlich, die Brennpunkte jedes Kegelschnittes $k \in (k^i)$ sind die Schnittpunkte seiner isotropen Tangenten $t_1, t_2 \in (F)$ mit seiner dem Punkt F zugeordneten Polare.

Alle dem Punkt F zugeordnete Polaren bezüglich aller Kegelschnitte der KS–Schar (k^i) bilden eine Kurve (p_k) zweiter Klasse. Ordnen wir das Geradenbüschel (F) und diese Polarkurve (p_k) so zu, dass die Tangenten und Polaren der gleichen Kegelschnitte der KS–Schar (k^i) zugeordnet sind, wird das Erzeugnis dieser zwei Geradenmengen eine Kurve fünfter Ordnung (nach Chasles) [1]. Weil aber die Tangenten $t_1, t_2 \in (F)$ der beiden den Punkt F enthaltenden Kegelschnitte als die Polaren der gleichen Kegelschnitte sich selbst zugeordnet sind, entartet diese Kurve fünfter Ordnung in diese zwei isotropen Geraden t_1, und t_2 und eine Kurve dritter Ordnung k^3, die die gesuchte Brennpunktskurve der gegebener KS–Schar ist.

Die Kurve k^3 enthält die Schnittpunkte $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ der Grundtangenten m, n, p und q, weil diese Punktepaare die Brennpunkte der entarteten Kegelschnitte der KS–Schar sind.

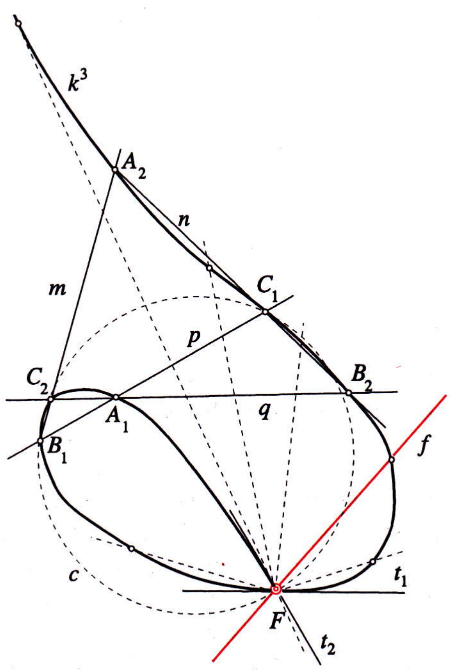

Abb. 6

In Abb. 6. wurde die Brennpunktskurve k^3 als die Menge der Berührungspunkte von Scharkegelschnitten mit isotropen Tangenten $t \in (F)$ mittels Brianchons Theorem, also linear, konstruiert. Im Doppelpunkt F wurden die Tangenten t_1 und t_2 der Brennpunktskurve k^3 als die Doppelstrahlen der von (k^i) in (F) induzierten Desargues–Involution konstruiert. Diese Konstruktion wurde mittels des Steiner Kreises c durchgeführt [2].

Die in Abb. 6. gegebene KS–Schar enthält unendlich viele Ellipsen und Hyperbeln, zwei spezielle Hyperbeln und nur eine Parabel. Ist diese einzige Parabel ein isotroper Kreis, wird die Brennpunktskurve vollständig isotropzirkulär. Die absolute Gerade ist nämlich ihre Tangente im absoluten Punkt (Abb. 7).

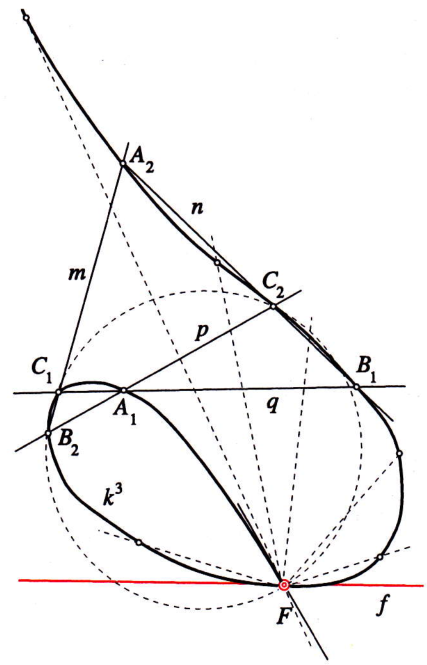

Abb. 7

Im Fall, dass eine der Grundtangenten der KS–Schar die absolute Gerade f ist, z. B. $f = m$, enthält die KS–Schar nur Parabeln (Abb. 8). Jede Parabel dieser Schar hat einen Brennpunkt auf der absoluten Gerade f und deswegen entartet die Brennpunktskurve in diese Gerade und einen die eigentliche Schnittpunkte der Grundtangenten enthaltenden Kegelschnitt k^2. Weil eine solche KS–Schar (k^i) immer einen Kreis enthält und dessen beide Brennpunkte mit dem absoluten Punkt zusammenfallen, berührt die Brennpunktskurve die absolute Gerade in dem absoluten Punkt F, ist also ein isotroper Kreis. (Vgl. den analogen Fall einer Parabelschar in einer euklidischen Ebene [3]).

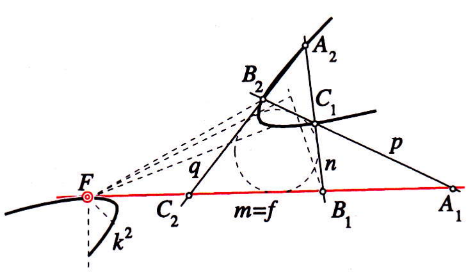

Abb. 8

Im Fall, dass eine der Grundtangenten der KS–Schar eine isotrope Gerade ist, entartet die Brennpunktskurve in diese isotrope Gerade und einen Kegelschnitt, der die Schnittpunkte der nichtisotropen Grundtangenten enthält (Abb. 9).

Sind zwei der Grundtangenten isotrop, so zerfällt die Brennpunktskurve in diese beiden Grundtangenten und in die isotrope Gerade g durch den Schnittpunkt C_1 der beiden nichtisotropen Grundtangenten. Diese Gerade g stellt nähmlich die durch das Eckenpaar $(C_1, C_2 = F)$ repräsentierte, singuläre Kurve 2. Klasse dar, für die also jeder Punkt von g als Brennpunkt aufgefaßt werden muß.

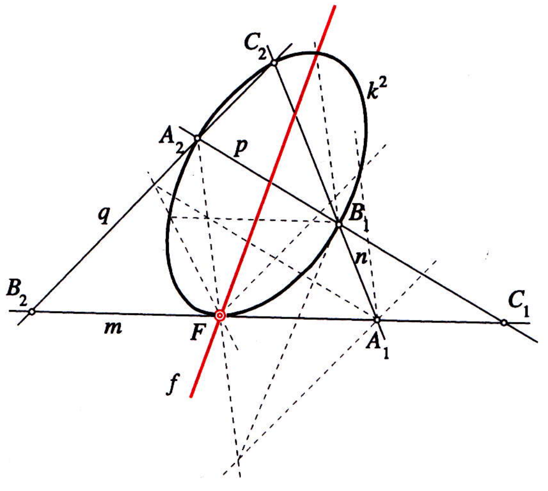

Abb. 9

In der Abb. 10. ist eine KS–Schar mit zwei Paaren parallelen Grundtangenten dargestellt. Die zugehärige Brennpunktskurve zerfällt in die Gerade f und einen Kegelschnitt, der die eigentlichen Schnittpunkte der Grundtangenten wie auch den absoluten Punkt F enthält und durch diese Angabe festgelegt ist.

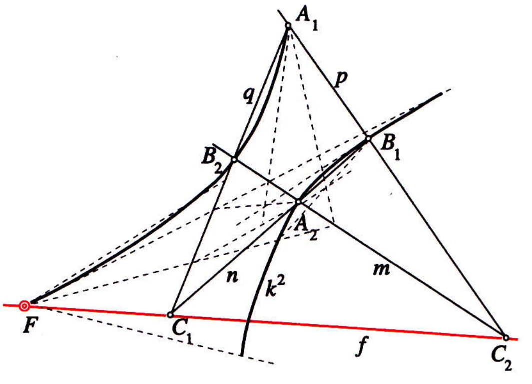

Abb. 10

Auch im Fall der KS–Scharen muß die Diskusion weiteren, projektiv–spezieller Typen von KS–Scharen dem Leser überlassen werden.

Literatur

[1] MÜLLER, E.; KRAMES, L.: *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, Band III, Leipzig–Wien, 1931.

[2] NIČE, V.: *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[3] SLIEPČEVIĆ, A.: *Žarišne krivulje u pramenovima krivulja u realnoj projektivnoj, hiperboličkoj i izotropnoj ravnini*, doktorska disertacija, Zagreb, 1998.

[4] ŠČURIĆ–ČUDOVAN, V.: Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, I. Teil, *Rad JAZU*, [450] 9 (1990), 41–51.

Dr. sc. Ana Sliepčević
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
10 000 Zagreb, Kačićeva 26
tel/fax: +385(01) 66 00 642
e-mail: anasli@juraj.gradnz.grad.hr