Stručni rad
Prihvaćeno 20. 12. 1998.

MILJENKO LAPAINE I MIROSLAVA LAPAINE

Krivulja središta pramena konika

Curve of Centres of the Conic Section Pencil

ABSTRACT

The paper defines the centre of conic section and the curve of centres of the conic section pencil. A classification of conic section pencils is given, related to the elliptic, parabolic and hyperbolic type of curves included in the pencil. The equation of the curve of centres of the conic section pencil is derived and illustrated by number of examples.

Key words: centre of the conic section, conic section pencil, curve of centres of the conic section pencil

Krivulja središta pramena konika

SAŽETAK

U radu se definira središte konike i krivulja središta pramena konika. Daje se klasifikacija pramena konika s obzirom na eliptičke, paraboličke i hiperboličke krivulje u pramenu. Izvodi se jednadžba krivulje središta pramena konika i ilustrira većim brojem primjera.

Ključne riječi: središte konike, pramen konika, krivulja središta pramena konika

1. Uvod

Krivulje drugoga reda ili konike obično se dijele na centralne i necentralne. U radu Lapainea i Jovičića (1996) prikazana je jedna detaljna klasifikacija konika u kojoj se konike najprije dijele na centralne i necentralne, a zatim na njihove podtipove.

Zbog čega se neke konike nazivaju centralnima, a druge necentralnima? Najopćenitija jednadžba drugog stupnja od dviju varijabli x i y može se napisati u obliku

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{1.1}$$

gdje su a, b, c, d, e i f realni brojevi, i barem jedan od a, b i c različit od nule. Geometrijsko mjesto točaka (x,y) u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu (1.1) naziva se krivuljom drugoga reda, konusnim presjekom, konikom ili čunjosječnicom. Ako je skup točaka (x,y) koje zadovoljavaju jednadžbu (1.1) centralno simetričan s obzirom na neku točku $S(x_S,y_S)$, onda za svaku točku (x,y) koja zadovoljava (1.1) mora postojati točka (x',y'), koja također zadovoljava (1.1), tako da vrijedi

$$x_S = \frac{x+x'}{2}, \quad y_S = \frac{y+y'}{2}, \tag{1.2}$$

odnosno

$$x' = 2x_S - x, \quad y' = 2y_S - y. \tag{1.3}$$

Ako točka (x',y') pripada konici, odnosno ako njezine koordinate zadovoljavaju (1.1), tada je

$$F(x',y') = 0, \tag{1.4}$$

dakle

$$F(2x_S - x, 2y_S - y) = 0, \tag{1.5}$$

što je ekvivalentno s

$$\begin{aligned} &F(x,y) + 4(ax_S^2 + 2bx_Sy_S + cy_S^2 + dx_S + ey_S) - \\ &\quad -4x(ax_S + by_S + d) - 4y(bx_S + cy_S + e) = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Budući da je

$$F(x,y) = 0$$

i

$$\begin{aligned} &ax_S^2 + 2bx_Sy_S + cy_S^2 + dx_S + ey_S = \\ &\quad = x_S(ax_S + by_S + d) + y_S(bx_S + cy_S + e), \end{aligned}$$

to se (1.6) može napisati u obliku

$$\begin{aligned} &(x - x_S)(ax_S + by_S + d) + \\ &\quad + (y - y_S)(bx_S + cy_S + e) = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

No kako (1.7) mora vrijediti za svaki par (x,y) koji zadovoljava (1.1), to zaključujemo da je (1.7) ekvivalentno s

$$\begin{aligned} &ax_S + by_S + d = 0, \\ &bx_S + cy_S + e = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Kako bi sustav (1.8) imao jedinstveno rješenje, mora biti

$$ac - b^2 \neq 0 \tag{1.9}$$

i tada je

$$x_S = \frac{be - cd}{ac - b^2}, \quad y_S = \frac{bd - ae}{ac - b^2}. \tag{1.10}$$

Točku S s koordinatama (x_S, y_S) nazivamo središtem ili centrom konike. Ako konika ima *jedinstveno* središte, nazivamo je centralnom. U radu (Lapaine i Jovičić, 1996, str. 21) do istog smo zaključka došli na drugi način.

Napomenimo da koniku koja se raspala u par paralelnih pravaca ili koja je jedan dvostruki pravac ne ubrajamo u centralne konike, iako svaka od njih ima centar simetrije. Međutim, taj centar simetrije nije jedinstven.

2. Pramen konika

Neka su

$$F(x,y) = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0, \qquad (2.1)$$

$$G(x,y) = a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2 = 0, \qquad (2.2)$$

jednadžbe dviju konika. Za proizvoljni $\mu \in \mathbb{R}$ sastavimo izraz

$$H(x,y) = F(x,y) + \mu G(x,y). \qquad (2.3)$$

Polinom H je oblika

$$H(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \qquad (2.4)$$

gdje smo označili

$$a = a_1 + \mu a_2, \ldots, f = f_1 + \mu f_2. \qquad (2.5)$$

Za svaki pojedini $\mu \in \mathbb{R}$, izraz

$$H(x,y) = F(x,y) + \mu G(x,y) = 0 \qquad (2.6)$$

je jednadžba konike ako je barem jedan od brojeva a, b i c različit od nule. Za zadane realne brojeve $a_1, b_1, \ldots, f_1, a_2, b_2, \ldots, f_2$ i $\mu \in \mathbb{R}$ skup svih konika obuhvaćenih jednadžbom (2.6) naziva se pramen konika. Konike s pomoću kojih je pramen definiran i kojima odgovaraju jednadžbe

$$F(x,y) = 0 \quad \text{i} \quad G(x,y) = 0$$

nazivaju se osnovnim konikama pramena.

Za svaki čvrsti $\mu \in \mathbb{R}$ jednadžba (2.4) predstavlja jednu krivulju iz pramena ili u specijalnom slučaju prazan skup. Prema Lapaineu (1997) tip krivulje ovisit će ponajprije o svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2 matrice

$$\delta = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}. \qquad (2.7)$$

Osim podjele na centralne i necentralne, konike je moguće podijeliti i na druge načine. Primjerice, u skladu s (Lapaine i Jovičić, 1996), uz pretpostavku da matrica δ nije nul–matrica, ovisno o predznaku njezine determinante, prirodno je konike klasificirati na sljedeći način:

eliptička konika,	ako je $\det(\delta) > 0$,
parabolička konika,	ako je $\det(\delta) = 0$,
hiperbolička konika,	ako je $\det(\delta) < 0$.

Determinanta matrice δ iz (2.7) je

$$\det(\delta) = \lambda_1\lambda_2 = ac - b^2 = m\mu^2 + n\mu + p, \qquad (2.8)$$

gdje smo označili

$$\begin{aligned} m &= a_2c_2 - b_2^2, \\ n &= a_1c_2 + c_1a_2 - 2b_1b_2, \\ p &= a_1c_1 - b_1^2. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Označimo još diskriminantu kvadratne funkcije (2.8) s

$$D = n^2 - 4mp.$$

Determinanta matrice δ iz (2.8) jednaka je nuli u sljedećim slučajevima:

1. za svaki $\mu \in \mathbb{R}$, ako je $m = 0,\ n = 0,\ p = 0$;
2. ni za koji $\mu \in \mathbb{R}$, ako je $m = 0,\ n = 0,\ p \neq 0$ ili $m \neq 0,\ D < 0$;
3. za $\mu = -p/n$, ako je $m = 0,\ n \neq 0$;
4. za $\mu = -n/2m$, ako je $m \neq 0,\ D = 0$;
5. za $\mu_{1,2} = (-n \pm \sqrt{D})/2m$, ako je $m \neq 0,\ D > 0$.

Odatle možemo zaključiti da u pramenu konika ne može biti proizvoljan broj konika paraboličkoga tipa, nego takve mogu biti samo sve (slučaj 1), niti jedna (slučaj 2), jedna (slučajevi 3 i 4) ili dvije konike (slučaj 5).

Na temelju spomenute analize može se izvesti klasifikacija pramenova konika s obzirom na sadržavanje konika eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa. Takva je klasifikacija prikazana u tablici 1.

3. Krivulja središta pramena konika

U ovome nas radu zanimaju centralne konike nekog pramena. Neka je zadan pramen (2.3) s osnovnim konikama (2.1) i (2.2). Označimo

$$\begin{aligned} a_S &= a_1b_2 - b_1a_2, \\ 2b_S &= a_1c_2 - c_1a_2, \\ c_S &= b_1c_2 - c_1b_2, \\ 2d_S &= a_1e_2 - b_1d_2 + d_1b_2 - e_1a_2, \\ 2e_S &= b_1e_2 - c_1d_2 + d_1c_2 - e_1b_2, \\ f_S &= d_1e_2 - e_1d_2. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Dokazat ćemo sljedeći

Teorem.

Neka je zadan pramen konika (2.3) s osnovnim konikama (2.1) i (2.2). Koordinate središta (x_S, y_S) svih centralnih konika iz pramena (2.3) zadovoljavaju jednadžbu

$$a_Sx_S^2 + 2b_Sx_Sy_S + c_Sy_S^2 + 2d_Sx_S + 2e_Sy_S + f_S = 0. \qquad (3.2)$$

Tablica 1. Pregled mogućih tipova pramenova konika uz pretpostavku da δ nije nul–matrica

$m=0$	$n=0$	sve su krivulje pramena eliptičke za	$p>0$
		sve su krivulje pramena paraboličke za	$p=0$
		sve su krivulje pramena hiperboličke za	$p<0$
	$n\neq 0$	pramen sadrži eliptičke krivulje za paraboličku krivulju za hiperboličke krivulje za	$\mu>-p/n$ $\mu=-p/n$ $\mu<-p/n$
$m>0$	$D>0$	pramen sadrži eliptičke krivulje za paraboličke krivulje za hiperboličke krivulje za	$\mu\in(-\infty,\mu_1)\cup(\mu_2,+\infty)$ $\mu=\mu_1,\ \mu=\mu_2$ $\mu\in(\mu_1,\mu_2)$
	$D=0$	pramen sadrži eliptičke krivulje za paraboličku krivulju za	$\mu\neq-n/2m$ $\mu=-n/2m$
	$D<0$	sve krivulje pramena su eliptičke	
$m<0$	$D>0$	pramen sadrži hiperboličke krivulje za paraboličke krivulje za eliptičke krivulje za	$\mu\in(-\infty,\mu_1)\cup(\mu_2,+\infty)$ $\mu=\mu_1,\ \mu=\mu_2$ $\mu\in(\mu_1,\mu_2)$
	$D=0$	pramen sadrži hiperboličke krivulje za paraboličku krivulju za	$\mu\neq-n/2m$ $\mu=-n/2m$
	$D<0$	sve krivulje pramena su hiperboličke	

Dokaz. Ako je za neki čvrsti μ konika $H(x,y)=0$ centralna, tada koordinate njezina središta S moraju zadovoljavati sustav jednadžbi (1.8). Izrazimo li koeficijente a,b,c,d,e iz (1.8) s pomoću a_1,b_1,c_1,d_1,e_1 i a_2,b_2,c_2,d_2,e_2 primjenjujući (2.5) te nakon toga eliminiramo parametar μ, dobit ćemo (3.2) i time je teorem dokazan.

Na temelju dokazanog teorema možemo zaključiti da je skup svih središta pramena konika opet jedna konika ako je barem jedan od koeficijenata a_S, b_S, c_S različit od nule. Skup svih središta nekog pramena konika ne može biti imaginarna konika. Naime, ako središte neke konike iz pramena postoji, njegove su koordinate (1.10) rješenje sustava linearnih jednadžbi (1.8), a to su realni brojevi, jer su takvi svi koeficijenti sustava (1.8).

U sljedećem će se poglavlju pokazati na primjerima da realne konike svih mogućih tipova mogu biti krivulje središta nekog pramena konika.

4. Primjeri

Svi primjeri koji slijede ilustrirani su crtežima izrađenim s pomoću računala. Debljom su crtom izvučene osnovne konike pramena, a crvenom je crtom prikazana krivulja središta pramena.

Da bi se dobili ‚lijepi' primjeri trebalo je za zadane a_S, b_S, c_S, d_S, e_S i f_S riješiti nelinearan sustav (3.1).

Primjer 1.

Zadan je pramen konika

$$F(x,y)+\mu G(x,y)=0,$$

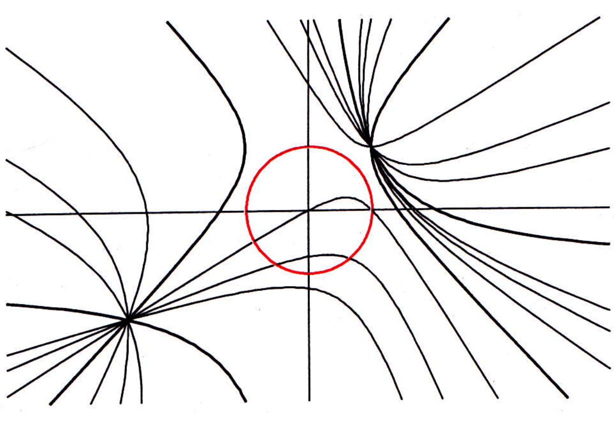
gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x,y)=x^2-y^2+2y-2=0,$$
$$G(x,y)=xy+x-2=0,$$

dvije hiperbole. Prva ima središte u točki $(0,1)$, a druga u točki $(0,-1)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m=-1/4$, $n=0$, $p=-1$ i $D=-1<0$, pa možemo zaključiti da je determinanta pramena δ uvijek negativna, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa. Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$$a_S=0.5,\quad b_S=0,\quad c_S=0.5,$$
$$d_S=0,\quad e_S=0,\quad f_S=-0.5.$$

To znači da je krivulja središta kružnica $x^2+y^2=1$ (vidi sliku 1).



Slika 1: Pramen $x^2-y^2+2y-2+\mu(xy+x-2)=0$ kojemu je krivulja središta kružnica

Primjer 2.

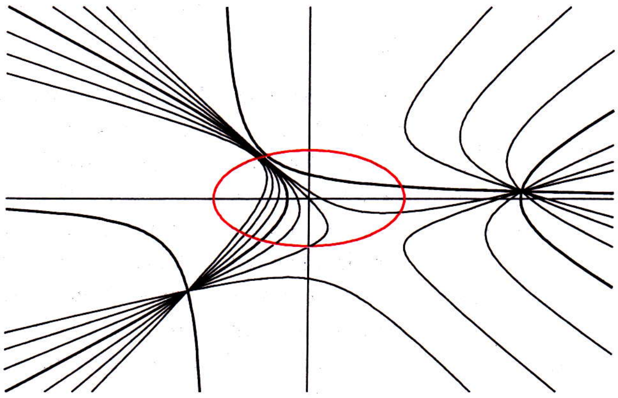
Zadan je pramen konika $F(x,y)+\mu G(x,y)=0$, gdje su osnovne konike pramena,

$$F(x,y)=x^2-4y^2-4x-2=0,$$
$$G(x,y)=xy+2y-1=0,$$

dvije hiperbole. Prva ima središte u točki $(2,0)$, a druga u točki $(-2,0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m=-1/4$, $n=0$, $p=-4$ i $D=-4<0$, pa možemo zaključiti da je determinanta pramena δ uvijek negativna, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa. Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$a_S = 0.5,\ b_S = 0,\ c_S = 2,\ d_S = 0,\ e_S = 0,\ f_S = -2.$

To znači da je krivulja središta elipsa $x^2 + 4y^2 = 4$ (vidi sliku 2).



Slika 2: Pramen $x^2 - 4y^2 - 4x - 2 + \mu(xy + 2y - 1) = 0$ kojemu je krivulja središta elipsa

Primjer 3.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$F(x,y) = x^2 - y^2 + 2 = 0,$

$G(x,y) = xy - 1 = 0,$

dvije hiperbole. Obje imaju središte u točki $(0,0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4$, $n = 0$, $p = -1$ i $D = -1 < 0$, pa možemo zaključiti da je determinanta pramena δ uvijek negativna, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa. Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$a_S = 0.5,\ b_S = 0,\ c_S = 0.5,\ d_S = 0,\ e_S = 0,\ f_S = 0.$

To znači da su središta svih konika pramena u jednoj te istoj točki, ishodištu koordinatnog sustava (vidi sliku 3).

Primjer 4.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

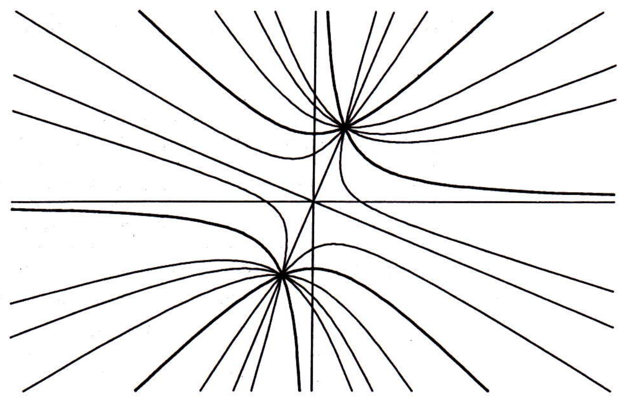
$F(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4x - 8 = 0,$

$G(x,y) = xy + 2y - 6 = 0,$

elipsa i hiperbola. Središte elipse je u točki $(2,0)$, a hiperbole u točki $(-2,0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4$, $n = 0$, $p = 4$ i $D = 4 > 0$, što znači da su konike pramena različitih tipova. Za $\mu_1 = -4$ i $\mu_2 = 4$ imamo dvije parabole u pramenu:

$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 16 = 0,$

$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 8y - 32 = 0.$

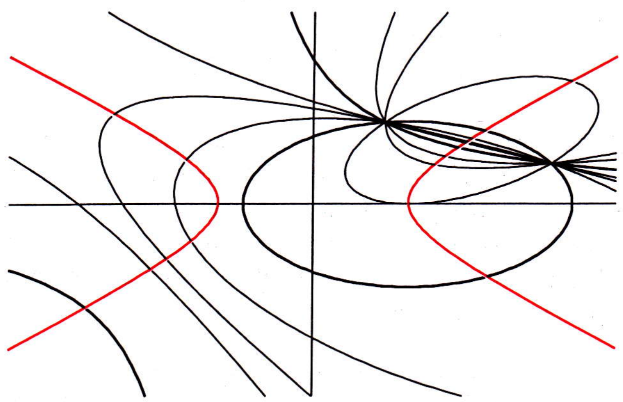


Slika 3: Pramen $x^2 - y^2 + 2 + \mu(xy - 1) = 0$ kojemu je krivulja središta jedna točka

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta:

$a_S = 0.5,\ b_S = 0,\ c_S = -2,\ d_S = 0,\ e_S = 0,\ f_S = -2.$

To znači da je krivulja središta hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ (vidi sliku 4).



Slika 4: Pramen $x^2 + 4y^2 - 4x - 8 + \mu(xy + 2y - 6) = 0$ kojemu je krivulja središta hiperbola

Primjer 5.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$F(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 15 = 0,$

$G(x,y) = 2xy + 2x - 2y - 3 = 0,$

kružnica i hiperbola. Središte kružnice je u točki $(-1,1)$, a hiperbole u točki $(1,-1)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1$, $n = 0$, $p = 1$ i $D = 4 > 0$, što znači da su konike pramena različitih tipova. Za $\mu_1 = -1$ radi se o paru paralelnih pravaca

$(x - y - 2\sqrt{3})(x - y + 2\sqrt{3}) = 0.$

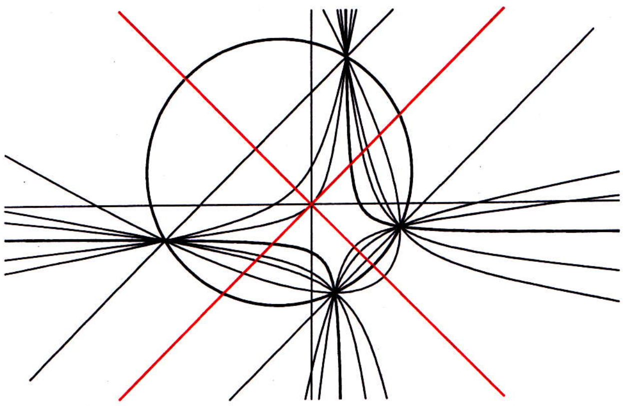
dok je za $\mu_2 = 1$ riječ o paraboli:

$x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0.$

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$a_S = 1,\ b_S = 0,\ c_S = -1,\ d_S = 0,\ e_S = 0,\ f_S = 0.$

To znači da je krivulja središta par ukrštenih pravaca $x^2 - y^2 = 0$ (vidi sliku 5).



Slika 5: Pramen $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 15 + \mu(2xy + 2x - 2y - 3) = 0$ kojemu dva ukrštena pravca čine krivulju središta

Primjer 6.

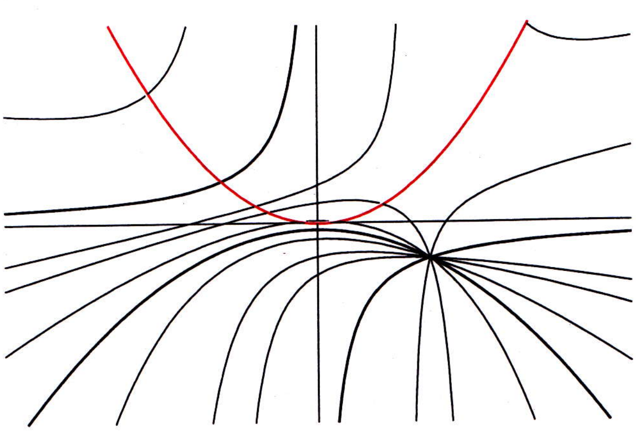
Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$F(x,y) = x^2 + 16y + 4 = 0,$

$G(x,y) = xy + 5 = 0,$

parabola i hiperbola sa središtem u točki $(0,0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4, n = 0, p = 0$ i $D = 0$, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa, osim za $\mu = 0$, kada se radi o paraboli

$x^2 + 16y + 4 = 0.$



Slika 6: Pramen $x^2 + 16y + 4 + \mu(xy + 5) = 0$ kojemu je parabola krivulja središta

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta:

$a_S = 0.5,\ b_S = 0,\ c_S = 0,\ d_S = 0,\ e_S = -4,\ f_S = 0.$

To znači da je krivulja središta parabola $x^2 - 8y = 0$ (vidi sliku 6).

Primjer 7.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$F(x,y) = x^2 + 2x - 16 = 0,$

$G(x,y) = xy - y - 6 = 0,$

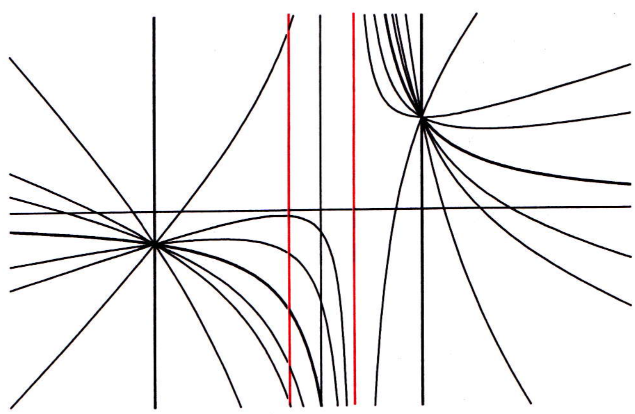
par paralelnih pravaca i hiperbola sa središtem u točki $(1,0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1/4$, $n = 0$, $p = 0$ i $D = 0$, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa, osim za $\mu = 0$, kada se radi o dva paralelna pravca

$x^2 + 2x - 16 = 0.$

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$a_S = 0.5,\ b_S = 0,\ c_S = 0,\ d_S = 0,\ e_S = 0,\ f_S = -0.5.$

To znači da je krivulja središta pramena par paralelnih pravaca $x^2 = 1$ (vidi sliku 7).



Slika 7: Pramen $x^2 + 2x - 16 + \mu(xy - y - 6) = 0$ kojemu par paralelnih pravaca čini krivulju središta

Primjer 8.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$F(x,y) = x^2 - 4 = 0,$

$G(x,y) = x^2 - 2xy - 4 = 0,$

par paralelnih pravaca i hiperbola sa središtem u točki $(0,0)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = -1$, $n = 0$,

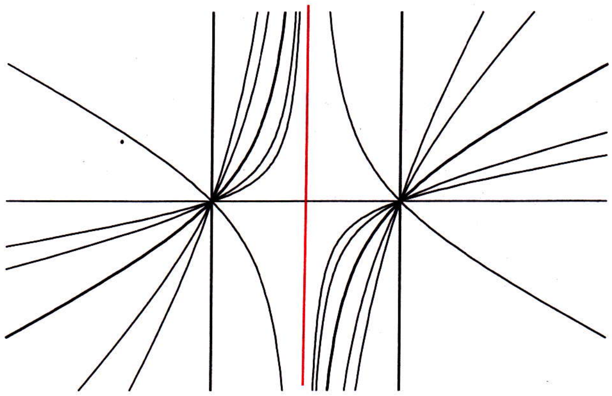
$p = 0$ i $D = 0$, što znači da su sve konike pramena hiperboličkoga tipa, osim za $\mu = 0$, kada se radi o paru paralelnih pravaca

$x^2 - 4 = 0.$

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta pramena:

$a_S = -1,\ b_S = 0,\ c_S = 0,\ d_S = 0,\ e_S = 0,\ f_S = 0.$

To znači da je krivulja središta dvostruki pravac $x^2 = 0$, odnosno dvostruka os y (vidi sliku 8).



Slika 8: Pramen $x^2 - 4 + \mu(x^2 - 2xy - 4) = 0$ kojemu je dvostruki pravac krivulja središta

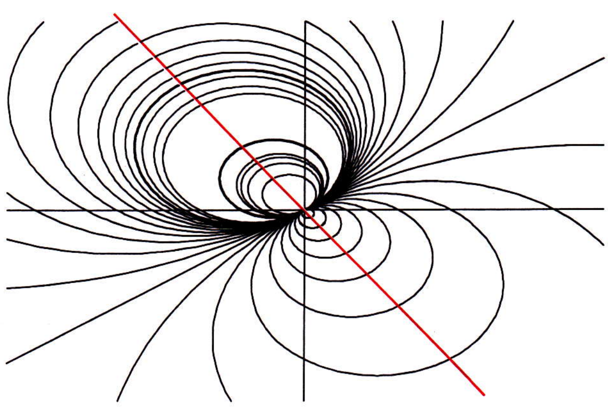
Primjer 9.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$F(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x - 4y = 0,$

$G(x,y) = x^2 + 2y^2 + x - 2y = 0,$

dvije elipse sa središtima u točki $(-1,1)$, odnosno $(-1/2, 1/2)$. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = 2$,



Slika 9: Pramen $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + \mu(x^2 + 2y^2 + x - 2y) = 0$ kojemu krivulja središta svih konika nije konika nego jednostruki pravac

$n = 4$, $p = 2$ i $D = 0$, što znači da su sve konike pramena elipse, osim za $\mu = -1$, kad odgovarajuća krivulja pramena nije konika nego pravac $x - 2y = 0$.

Prema (3.1) odredimo koeficijente jednadžbe krivulje središta:

$a_S = 0,\ b_S = 0,\ c_S = 0,\ d_S = -1,\ e_S = -1,\ f_S = -1.$

To znači da je krivulja središta svih konika pramena pravac $2x + 2y + 1 = 0$ (vidi sliku 9).

Primjer 10.

Zadan je pramen konika $F(x,y) + \mu G(x,y) = 0$, gdje su osnovne konike pramena,

$F(x,y) = x^2 + 2x + 2y = 0,$

$G(x,y) = x^2 + 3x + 2y = 0,$

dvije parabole. Prema formulama (2.9) izračunamo $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$ i $D = 0$, što znači da su u pramenu sve konike paraboličkoga tipa, tj. nema ni jedne centralne konike. Prema tome, taj pramen nema krivulje središta.

Prema (3.1) odredimo koeficijente:

$a_S = 0,\ b_S = 0,\ c_S = 0,\ d_S = 0,\ e_S = 0,\ f_S = -1/2,$

što zbog $-1/2 \neq 0$ još jedanput potvrđuje da krivulja središta ne postoji.

Zahvala. Autori najsrdačnije zahvaljuju mr. sc. Jeleni Beban–Brkić na korisnim savjetima koji su pomogli da se početni rukopis transformira u bolji i pregledniji rad.

Literatura

[1] LAPAINE, M.; JOVIČIĆ, D. (1996): Grafički prikazi konika pomoću računala, *KoG* **1**, 19–26.

[2] LAPAINE, M. (1997): Grafički prikaz pramena konika pomoću računala, *KoG* **2**, 43–47.

Doc. dr. sc. **Miljenko Lapaine**, dipl. inž. mat.
Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet
10 000 Zagreb, Kačićeva 26
tel.: 45 61 273, faks: 48 28 081
e-mail: mlapaine@public.srce.hr

Mr. sc. **Miroslava Lapaine**, dipl inž. elekt.
10 000 Zagreb, Ilica 164
tel.: 37 04 628