

Originelle wissenschaftliche Arbeit

Angenommen 28. 12. 1999.

GERT MEINL

Schließungssätze an Dreiecken im Umfeld des Satzes von WALLACE–SIMSON

Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Gerhard Geise zum 70. Geburtstag gewidmet

Zaključni teoremi o trokutu u području Wallace–Simsonovog teorema

SAŽETAK

Smatra se ([4]) da je Wallace–Simsonov teorem jedan od najljepših na području geometrije trokuta. Osobitu važnost ima u ravninskoj kinematici ([2,5]) gdje na način koji ne nalazimo nigdje drugdje u literaturi potiče raspravu o nekim klasičnim, ali i novim teoremima. Rad se bavi nekim istaknutim točkama i krivuljama koje nastaju zrcaljenjem točke na stranicama trokuta.

Ključne riječi: Wallace–Simsonov teorem, homologni položaji, polarni trokut

Closure Theorems at Triangles in the Sphere of WALLACE–SIMSON Theorem

ABSTRACT

The WALLACE–SIMSON theorem is considered ([4]) as one of the most beautiful theorems in the field of Geometry of triangles. Especially its importance for plane kinematics ([2,5]) is the starting point for discussing some classical but also new theorems in the sphere of the WALLACE–SIMSON theorem so far not found in any literature. The paper deals with some characteristic points and curves, if we reflect a point at the sides of a triangle.

Key words: Wallace–Simson theorem, homological positions, polar triangle

MSC: 51N20, 53A17

Gegeben seien in der Euklidischen Ebene ein Dreieck $P_{12}P_{23}P_{31}$ und ein Punkt X . Die Spiegelung von X an den Seiten des Dreiecks liefert die Punkte X_1, X_2, X_3 . Interpretiert man das Dreieck $P_{12}P_{23}P_{31}$ als Poldreieck dreier Lagen einer bewegten Ebene ([2,5]), so sind X_1, X_2, X_3 homologe Punktlagen. Der Punkt X heißt *Grundpunkt* dieser homologen Punktlagen (Bild 1). Der Mittelpunkt X^* des Kreises k durch die Lagen X_1, X_2, X_3 ist der zu X *isogonale* Punkt bezüglich des Poldreiecks.

Satz 1 (WALLACE–SIMSON):

Genau für die Punkte X des Umkreises u eines Poldreiecks $P_{12}P_{23}P_{31}$ gilt: Die homologen Lagen X_1, X_2, X_3 sind kollinear.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 entartet der Kreis k durch die homologen Lagen zu einer Geraden $w := k$, der sogenannten WALLACE–Geraden¹ zum Punkt X (Bild 2).

Alle WALLACE–Geraden eines Dreiecks bilden ein Geradenbüschel durch den Höhenschnittpunkt H .

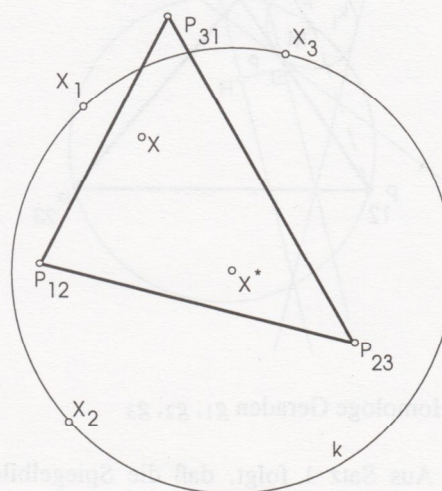


Bild 1: Homologe Punkte X_1, X_2, X_3

¹ In der ursprünglichen Fassung des Satzes ([8]) wird als WALLACE–Gerade die zu w parallele Verbindungsgerade der Lotfußpunkte von X auf die Dreiecksseiten bezeichnet.

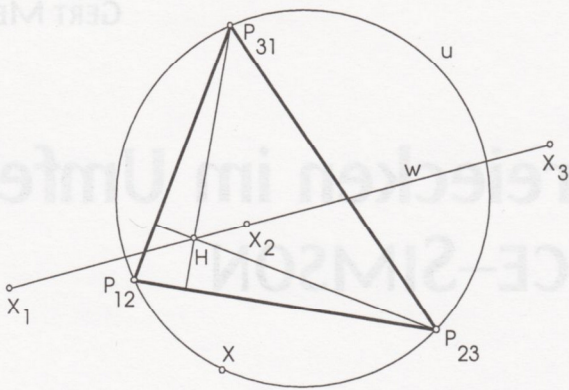


Bild 2: WALLACE–Gerade w zum Punkt X

Satz 2:

Spiegelt man eine Gerade g an den Seiten des Poldreiecks $P_{12}P_{23}P_{31}$ (Bild 3), dann gilt für das durch g_1, g_2, g_3 bestimmte Dreieck homologer Geraden:

- (I) Der Radius ρ des Inkreises k_I des Dreiecks ist gleich dem Abstand von g zum Höhenschnittpunkt H .
- (II) Der Inkreismittelpunkt M des Dreiecks liegt auf dem Umkreis des Poldreiecks. Die WALLACE–Gerade w zum Punkt M ist die zu g parallele Gerade durch H .
- (III) M ist Perspektivzentrum des Poldreiecks und des Dreiecks.

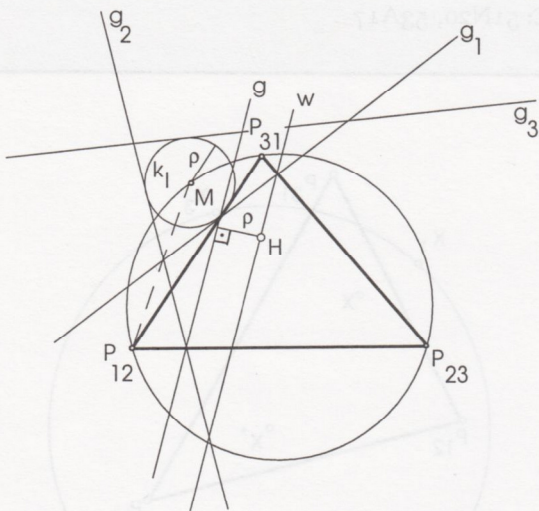


Bild 3: Homologe Geraden g_1, g_2, g_3

Beweis. Aus Satz 1 folgt, daß die Spiegelbilder einer WALLACE–Geraden w sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt M auf dem Umkreis schneiden. Für eine zu w im Abstand ρ parallele Gerade folgen genau die Aussagen (I) und (II). Schließlich sind die zur Schar der zu w parallelen Geraden gehörenden Spiegeldreiecke zentrisch ähnlich mit Ähnlichkeitszentrum M . Die Eckpunkte der Spiegeldreiecke liegen notwendig auf den Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte des Dreiecks mit M und es folgt (III).

Sei k_I ein beliebiger Kreis mit Radius ρ und Mittelpunkt auf dem Umkreis des Poldreiecks. Die gemeinsamen Tangenten g und h an die homologen Lagen k_1, k_2, k_3 des Kreises k_I sind genau jene Grundgeraden, deren Dreiseite homologe Lagen k_I als Inkreis besitzen (Bild 4).

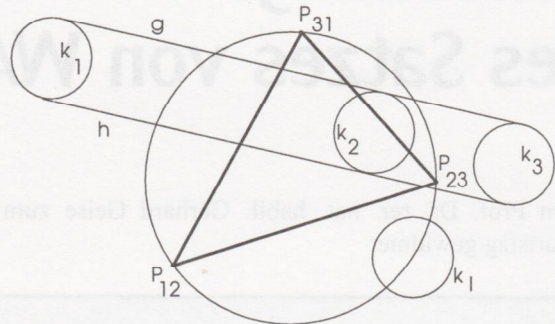


Bild 4: Grundgeraden g und h , deren homologe Lagen einen Kreis k_I berühren.

Für $\rho = 0$ sind g und h mit der WALLACE–Geraden zum Punkt M identisch. Die Ermittlung jener Grundgeraden, deren Inkreise ihrer homologe Lagen einen vorgegebenen Radius besitzen bzw. eine beliebig gewählte Gerade berühren, ist elementar.

Im weiteren sind alle Kreise k durch homologe Punktlagen gesucht, die einen konstanten Radius besitzen bzw. mit einem beliebig vorgegebenen Punkt inzidieren. Sind e_{12}, e_{23}, e_{31} die Abstände des zu X isogonalen Punktes X^* zu den entsprechenden Eckpunkten des Poldreiecks, r der Radius des Kreises k (mit Mittelpunkt X^*) durch X_1, X_2, X_3 und p^2 die Potenz von X^* bezüglich des Poldreiecksumkreises k_u , so gilt die folgende Identität ([1,5])

$$e_{12} e_{23} e_{31} = p^2 r. \tag{1}$$

Aus (1) folgt, daß alle Grundpunkte X zu Umkreisen homologer Lagen mit konstantem Radius auf einer trizirkularen Kurve 6. Grades, der sogenannten R_1 –Kurve [5], liegen. Insbesondere enthält die R_1 –Kurve mit jedem Punkt X auch dessen isogonalen Punkt X^* .

Für die R_1 –Kurve wies ALT [1] eine Realisierung als Koppelkurve eines Gelenkvierecks nach. Es soll nunmehr gezeigt werden, daß dieselbe Kurve punktweise als Schnitt entsprechender Kreise zweier Kreisbüschel konstruiert werden kann.

Da X, X_i, X_j jeweils auf Kreisen um P_{ij} liegen, gilt wegen des Zentriwinkelsatzes für die Winkel in Bild 5

$$\begin{aligned} \angle XP_{12}P_{23} &= \angle XX_1X_2 =: \alpha_1, \\ \angle XP_{12}P_{31} &= \angle XX_2X_1 =: \alpha_2, \\ \angle XP_{23}P_{31} &= \angle XX_2X_3 =: \beta_1, \\ \angle XP_{23}P_{12} &= \angle XX_3X_2 =: \beta_2, \\ \angle XP_{31}P_{12} &= \angle XX_3X_1 =: \gamma_1, \\ \angle XP_{31}P_{23} &= \angle XX_1X_3 =: \gamma_2. \end{aligned} \tag{2}$$

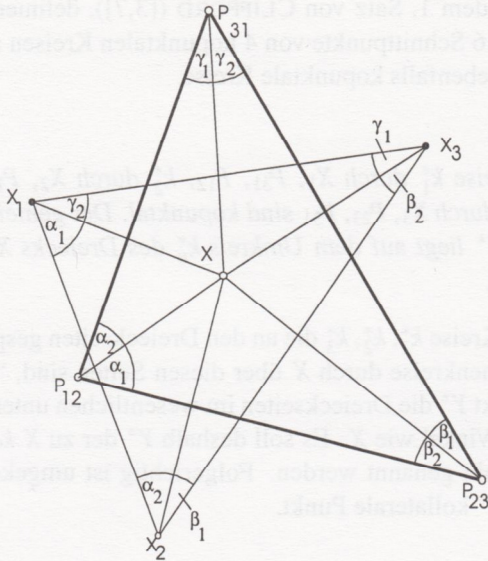


Bild 5

Für die homologen Lagen X'_1, X'_2, X'_3 aller Grundpunkte X' auf dem Kreis durch X, P_{23}, P_{31} gilt dann

$$\angle X'_2 X'_3 X'_1 = \angle X_2 X_3 X_1 = \beta_2 + \gamma_1 = \text{const.}$$

Läuft dagegen X' auf dem Kreis durch X mit Mittelpunkt P_{12} , so ist $\overline{X'_1 X'_2}$ eine Sehne konstanter Länge desselben Kreises zum Zentriwinkel $2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Ein fest gewählter Radius r des Kreises durch X'_1, X'_2, X'_3 ordnet jedem Kreis $\beta_2 + \gamma_1 = \text{const.}$ über $P_{23}P_{31}$ in eindeutiger Weise einen Kreis um P_{12} mit Radius R gemäß

$$R \cos(\beta_2 + \gamma_1) = r \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

zu. Die (reellen) Schnittpunkte einander zugeordneter Kreise sind genau die gesuchten Grundpunkte (Bild 6).

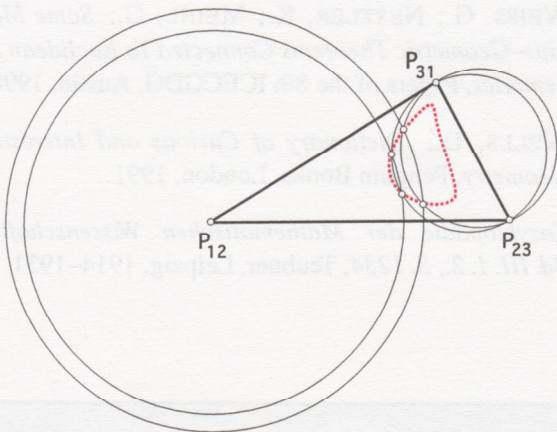


Bild 6: Punktweise Erzeugung der R_1 -Kurve mittels zweier Kreisbüschel

Ersetzt man in (1) r durch den Abstand $\text{dist}(X^*, Z)$, wobei Z ein beliebiger festgewählter Punkt sei, dann ist (1) genau für jene Punkte X^* erfüllt, die Mittelpunkte von mit Z inzidierenden Spiegeldreiecksumkreisen sind. Es erweist sich dabei (1) als Gleichung 5. Grades. Die Eckpunkte des Poldrei-

ecks sind Singularitäten der Lösungsquintik (Bild 7), welche Z_m -Kurve genannt werden soll.

Für $Z = H$ zerfällt die Kurve Z_m in die Ferngerade und eine Quartik mit genau 3 reellen, in die Ecken des Poldreiecks fallenden isolierten Punkten. Es sind also die WALLACE-Geraden (im Sinne der Möbius-Geometrie) die einzigen Kreise durch homologe Punktlagen, welche mit H inzidieren.

Bei welchen Lagen von Z spaltet sich eine eigentliche Gerade von der Z_m ab, d.h. wann existiert ein mit Z inzidierendes Kreisbüschel? Eine solche Gerade ist in trivialer Weise jede Poldreiecksseite. Man wähle für Z den der Seite gegenüberliegenden Pol oder dessen Spiegelpunkt bezüglich dieser Seite. Im ersten Fall zerfällt die Restquartik in ein Paar konjugiert komplexer Geraden durch den Pol und in den mit H inzidierenden Kreis durch die beiden übrigen Pole.

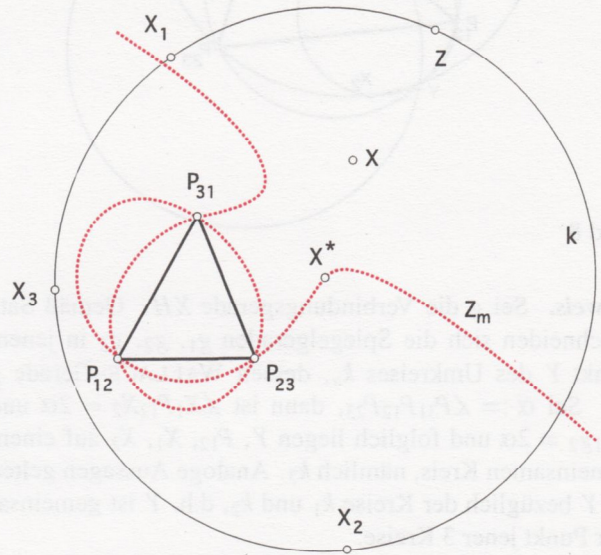


Bild 7: Z_m -Kurve und Mittelpunkt X^* eines mit Z inzidierenden Kreises k durch homologe Punkte.

Bemerkung 1: Jeder (reelle) Fernpunkt der Z_m ist "Mittelpunkt" einer WALLACE-Geraden durch Z . Für $Z \neq H$ existiert damit genau ein Fernpunkt der Z_m mit einer zur WALLACE-Geraden HZ normalen Asymptote. Sei a_Z die Asymptote der Z_m und Z^* der Schnittpunkt von a_Z und HZ . Experimentell kann gezeigt werden, daß Z der Schnittpunkt der Asymptote der Z_m^* mit HZ ist. Ein geometrischer Beweis des involutorischen Charakters der Abbildung $\iota : Z \rightarrow \iota(Z) := a_Z \cap HZ$ der Punkte auf einer WALLACE-Geraden HZ ist nicht bekannt.

Bemerkung 2: Indem man sukzessive die homologen Lagen X_1, X_2, X_3 als neues Poldreieck zum selben festgewählten Grundpunkt X wählt, wird ein iterativer Prozeß erklärt, der eine Folge von Dreiecken liefert [6], die aus 3 Serien untereinander ähnlicher Dreiecke besteht. Gemäß der in Bild 5 dargestellten Winkelverhältnisse erhält man nämlich nach jeweils 3 Schritten ein zum Ausgangsdreieck ähnliches Dreieck.

Ein weiterer eng mit WALLACE–Geraden verknüpfter Satz ist folgender

Satz 3:

Die Kreise k_1 durch X_2, X_3, P_{23} , k_2 durch X_3, X_1, P_{31} und k_3 durch X_1, X_2, P_{12} sind kopunktal. Der gemeinsame Punkt Y liegt auf dem Umkreis k_u des Dreiecks $P_{12}P_{23}P_{31}$ (Bild 8).

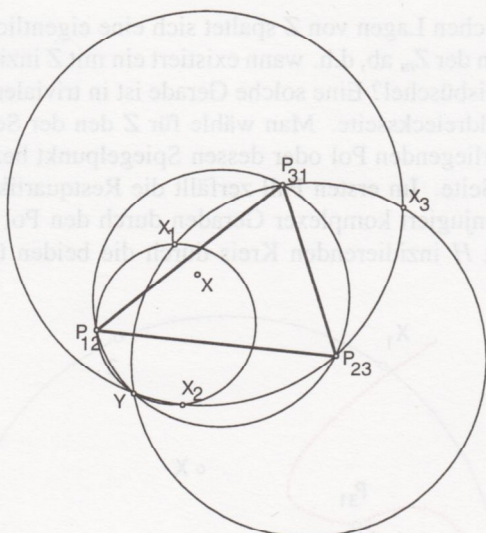


Bild 8

Beweis. Sei g die Verbindungsgerade XH . Gemäß Satz 2 schneiden sich die Spiegelgeraden g_1, g_2, g_3 in jenem Punkt Y des Umkreises k_u , dessen WALLACE–Gerade g ist. Sei $\alpha := \angle P_{31}P_{12}P_{23}$, dann ist $\angle X_1P_{12}X_2 = 2\alpha$ und $\angle g_1g_2 = 2\alpha$ und folglich liegen Y, P_{12}, X_1, X_2 auf einem gemeinsamen Kreis, nämlich k_3 . Analoge Aussagen gelten für Y bezüglich der Kreise k_1 und k_2 , d.h. Y ist gemeinsamer Punkt jener 3 Kreise.

Bemerkung 3: Satz 3 wird in [7] ohne Beweis erwähnt. Insbesondere fehlt dort der Zusammenhang des gemeinsamen Punktes Y mit der WALLACE–Geraden XH .

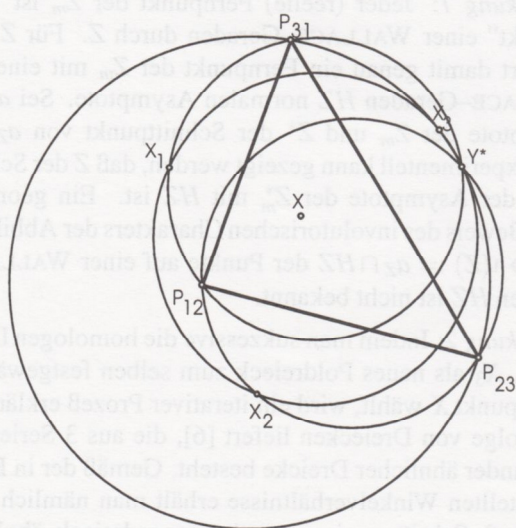


Bild 9

Gemäß dem 1. Satz von CLIFFORD ([3,7]), definieren die übrigen 6 Schnittpunkte von 4 kopunktalen Kreisen noch 4 weitere ebenfalls kopunktales Kreise.

Satz 4:

Die Kreise k_1^* durch X_1, P_{31}, P_{12} , k_2^* durch X_2, P_{12}, P_{23} und k_3^* durch X_3, P_{23}, P_{31} sind kopunktal. Der gemeinsame Punkt Y^* liegt auf dem Umkreis k_u^* des Dreiecks $X_1X_2X_3$ (Bild 9).

Da die Kreise k_1^*, k_2^*, k_3^* die an den Dreieckseiten gespiegelten Sehnenkreise durch X über diesen Seiten sind, "sieht" der Punkt Y^* die Dreieckseiten im wesentlichen unter demselben Winkel wie X . Es soll deshalb Y^* der zu X kollaterale Punkt genannt werden. Folgerichtig ist umgekehrt X der zu Y^* kollaterale Punkt.

Literatur

- [1] ALT, H.: *Zur Synthese der ebenen Mechanismen*, ZAMM, 1 (1921), 373–398.
- [2] BOTTEMA, O.; ROTH, B.: *Theoretical Kinematics*, Dover Publications Inc., New York, 1979.
- [3] COXETER, H. S. M.: *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser Verlag, 1963.
- [4] FLADT, K.: *Analytische Geometrie Spezieller Flächen*, Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt/M., 1962.
- [5] LICHTENHELD, W.: *Konstruktionslehre der Getriebe*, Akademie–Verlag, Berlin, 1961.
- [6] WEISS, G.; NESTLER, K.; MEINL, G.: *Some Möbius–Geometric Theorems Connected To Euclidean Kinematics*, Papers of the 8th ICECGDG, Austin, 1998.
- [7] WELLS, D.: *Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books, London, 1991.
- [8] *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. III. 1. 2., S. 1234, Teubner, Leipzig, 1914–1931

Dr. Gert Meinl

Technische Universität Dresden

Willersbau, Zi.–Nr. C9,

Zellescher Weg 12–14, 01069 Dresden

tel: 4632877, fax: 4636927

e–mail: meinl@math.tu–dresden.de