Stručni rad
Prihvaćeno 15. 10. 1999.

MILJENKO LAPAINE

# Pramen konika zadan pomoću jedne dvostruke i dviju jednostrukih realnih točaka

**Conic Section Pencil Given by a Double Point and Two Single Real Points**

ABSTRACT

The algorithm is presented for the determination of coefficients in the equation of the type IV conic section pencils when the pencil is given by three base points one of which is a double point. In order to work with the points in infinity, the homogeneous coordinates are introduced. The approach is illustrated by several examples.

**Key words:** conic section pencil, homogeneous coordinates, computer graphics

**Pramen konika zadan pomoću jedne dvostruke i dviju jednostrukih realnih točaka**

SAŽETAK

Prikazan je algoritam za određivanje koeficijenata u jednadžbi pramena konika tipa IV kad je pramen zadan s tri točke od kojih je jedna dvostruka. Da bi se moglo raditi s neizmjerno dalekim točkama uvedene su homogene koordinate. Postupak je ilustriran s nekoliko primjera.

**Ključne riječi:** pramen konika, homogene koordinate, računalna grafika

MSC: 51N99

## 1. Uvod

Pramen konika općenito je određen s četiri realne i različite točke $A$, $B$, $C$ i $D$. Pramen konika tipa IV (Ščurić i Sachs, 1995, 1997) karakteriziran je svojstvom da se temeljne točke $C$ i $D$ podudaraju. Tom dvostrukom točkom prolazi zajednička tangenta svih konika pramena.

Grafički prikaz pramena konika može se učinkovito ostvariti primjenom računala i priključenog uređaja za crtanje. Matematička osnova razvijenog softvera opisana je u radu (Lapaine 1997). U ovome radu daje se algoritam za računanje koeficijenata u jednadžbi pramena konika tipa IV, ako je pramen zadan s tri točke (od kojih je jedna dvostruka) i zajedničkom tangentom svih konika pramena. Postupak se temelji na primjeni homogenih koordinata kako bi se i neizmjerno daleke točke ravnine mogle analitički obuhvatiti posve analogno kao i točke u konačnosti.

## 2. Pramen konika

Neka su

$$F(x,y)=a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+2d_1x+2e_1y+f_1=0, \tag{2.1}$$

$$G(x,y)=a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2+2d_2x+2e_2y+f_2=0, \tag{2.2}$$

jednadžbe dviju konika. Za proizvoljni $\mu\in R$ sastavimo izraz

$$H(x,y)=F(x,y)+\mu G(x,y). \tag{2.3}$$

Polinom $H$ je oblika

$$H(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f, \tag{2.4}$$

gdje smo označili

$$a=a_1+\mu a_2,\ \ldots,\ f=f_1+\mu f_2. \tag{2.5}$$

Za svaki pojedini $\mu\in R$, izraz

$$H(x,y)=F(x,y)+\mu G(x,y)=0 \tag{2.6}$$

je jednadžba konike ako je barem jedan od brojeva $a$, $b$ i $c$ različit od nule. Ako je $a=b=c=0$ tada se radi o specijalnim, ali jednostavnim slučajevima (Lapaine, 1997). Za zadane realne brojeve $a_1,b_1,\ldots,f_1,a_2,b_2,\ldots,f_2$ i $\mu\in R$ skup svih konika obuhvaćenih jednadžbom (2.6) naziva se pramenom konika. Konike pomoću kojih je pramen definiran i kojima odgovaraju jednadžbe

$$F(x,y)=0 \quad \text{i} \quad G(x,y)$$

nazivaju se osnovnim konikama pramena.

Za svaki čvrsti $\mu \in R$ jednadžba (2.4) predstavlja jednu krivulju pramena ili u specijalnom slučaju prazan skup. Jedan način određivanja tipa konike s mogućnošću grafičkog prikazivanja pomoću računala objašnjen je u radu (Lapaine i Jovičić 1996).

## 3. Pramen konika zadan pomoću jedne dvostruke i dviju jednostrukih realnih točaka

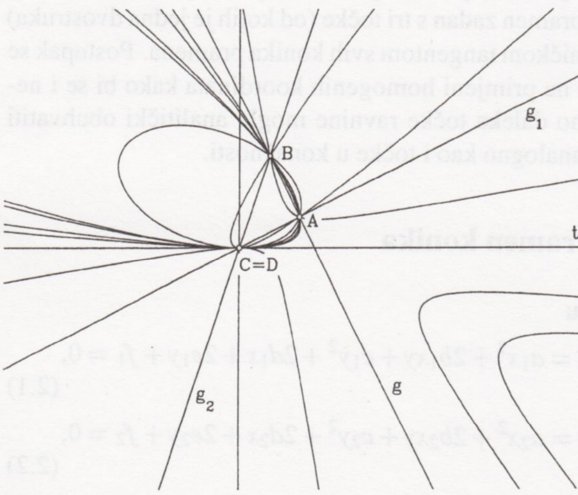
Ako su zadane četiri točke $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2,3,4$, u ravnini, od kojih nikoje tri nisu kolinearne, te ako je

$$g_{ik} = a_{ik}x + b_{ik}y + c_{ik} = 0, \quad i \neq k, \tag{3.1}$$

jednadžba pravca $P_iP_k$, tada je jednadžbom

$$g_{12}g_{34} + \mu g_{13}g_{24} = 0 \tag{3.2}$$

predočen pramen konika kojem su točke $P_i$ temeljne. Sve konike pramena prolaze točkama $P_i$ (Cesarec 1957).




Slika 1: Pramen konika tipa IV

Neka su sada zadane tri nekolinearne točke $A$, $B$ i $C$ i neka je $t$ bilo koji pravac koji prolazi točkom $C$, ali ne sadrži točke $A$ i $B$. Označimo pravac kroz točke $A$ i $B$ sa $g$, pravac kroz točke $A$ i $C$ sa $g_1$, te pravac kroz točke $B$ i $C$ sa $g_2$ (vidi sliku 1). Ako su

$$t = 0, \quad g = 0, \quad g_1 = 0 \quad \text{i} \quad g_2 = 0 \tag{3.3}$$

jednadžbe navedenih pravaca, tada je

$$g_1g_2 + \mu gt = 0 \tag{3.4}$$

jednadžba pramena konika kojem su $A$, $B$ i $C$ temeljne točke, a $t$ zajednička tangenta svih konika pramena. Zaista, točka $A$ je temeljna točka pramena jer leži na pravcima $g$ i $g_1$, točka B je temeljna jer leži na pravcima $g$ i $g_2$, a točka $C$ je temeljna jer je sjecište pravaca $t$ i $g_1(g_2)$. Za svaki zadani $\mu$ jednadžba (3.4) predstavlja jednu koniku pramena. Za točku $(x,y)$ koja je zajednička proizvoljnoj konici pramena i pravcu $t(x,y) = 0$ mora biti

$$g_1(x,y)\,g_2(x,y) = 0, \tag{3.5}$$

što vrijedi samo za točku koja je istovremeno na pravcima $t$ i $g_1$ ili $t$ i $g_2$. Dakle, radi se o točki $C$. Odatle zaključujemo da je pravac $t$ zajednička tangenta svih konika pramena jer sa svakom konikom ima samo jednu zajedničku točku. Ta zajednička točka $C$ naziva se dvostrukom temeljnom točkom pramena. Može se također reći i da je pramen zadan s četiri točke od kojih su dvije pale zajedno.

## 4. Homogene kartezijeve koordinate u ravnini

Pod homogenim kartezijevim koordinatama točke $P(x,y)$ podrazumijevamo uređenu trojku realnih brojeva $(x_0, x_1, x_2)$ za koje je

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0} \tag{4.1}$$

Iz definicije slijedi da homogene koordinate $(x_0, x_1, x_2)$ nisu jednoznačno određene pomoću nehomogenih $(x,y)$, jer ih još možemo pomnožiti bilo kojim realnim brojem različitim od nule, a da ipak daju iste vrijednosti $x$ i $y$. Tako npr. za $x = 3$, $y = 2$ imamo $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, ali i $x_0 = 2$, $x_1 = 6$, $x_2 = 4$ itd.

Ako je $x_0 = 0$, a $x_1$ i $x_2$ različito od nule, tada je $x = \infty$ i $y = \infty$, tj. ta je točka neizmjerno daleka točka ravnine i leži na spojnici ishodišta koordinatnog sustava s točkom $(x_1, x_2)$. I baš zbog toga, što su neizmjerno daleke točke ravnine karakterizirane time da im je homogena koordinata jednaka nuli, uvodimo homogene koordinate. Tako možemo te osobite točke ravnine analitički svladavati jednako kao i točke u konačnosti (Cesarec 1957). Na primjer, neizmjerno daleka točka osi $x$ ima homogene koordinate $(0,1,0)$, a ona na osi $y$ $(0,0,1)$.

Uobičajena oznaka za homogene koordinate je $(x_0 : x_1 : x_2)$, ali u ovome radu će se rabiti $(x_0, x_1, x_2)$ jer se radi o uređenoj trojki brojeva, a ne o produženom razmjeru. Osim toga, takav zapis je identičan onome koji se upoptrebljava pri programiranju.

Trojka $(0,0,0)$ nema značenja i isključuje se iz razmatranja.

## 5. Jednadžba pramena konika zadanog pomoću jedne dvostruke i dviju jednostrukih realnih točaka i homogene koordinate

Neka su pomoću homogenih koordinata zadane tri točke

$$\begin{aligned} &A\,(x_{0A}, x_{1A}, x_{2A}) \\ &B\,(x_{0B}, x_{1B}, x_{2B}) \\ &C\,(x_{0C}, x_{1C}, x_{2C}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Može se vidjeti da se jednadžba pravca $g$ koji prolazi točkama $A$ i $B$ može napisati u obliku

$$g_x x + g_y y + g_z = 0 \tag{5.2}$$

gdje smo označili

$$g_x = \begin{vmatrix} x_{2B} & x_{2A} \\ x_{0B} & x_{0A} \end{vmatrix},$$
$$g_y = -\begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1A} \\ x_{0B} & x_{0A} \end{vmatrix}, \tag{5.3}$$
$$g_z = \begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1A} \\ x_{2B} & x_{2A} \end{vmatrix}.$$

Analogno imamo za pravac $g_1$ koji prolazi točkama $C$ i $A$

$$g_{1x}x + g_{1y}y + g_{1z} = 0, \tag{5.4}$$

gdje smo označili

$$g_{1x} = \begin{vmatrix} x_{2A} & x_{2C} \\ x_{0A} & x_{0C} \end{vmatrix},$$
$$g_{1y} = -\begin{vmatrix} x_{1A} & x_{1C} \\ x_{0A} & x_{0C} \end{vmatrix}, \tag{5.5}$$
$$g_{1z} = \begin{vmatrix} x_{1A} & x_{1C} \\ x_{2A} & x_{2C} \end{vmatrix},$$

kao i za pravac $g_2$ koji prolazi točkama $C$ i $B$

$$g_{2x}x + g_{2y}y + g_{2z} = 0, \tag{5.6}$$

uz oznake

$$g_{2x} = \begin{vmatrix} x_{2B} & x_{2C} \\ x_{0B} & x_{0C} \end{vmatrix},$$
$$g_{2y} = -\begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1C} \\ x_{0B} & x_{0C} \end{vmatrix}, \tag{5.7}$$
$$g_{2z} = \begin{vmatrix} x_{1B} & x_{1C} \\ x_{2B} & x_{2C} \end{vmatrix}.$$

Pravac $t$ prolazi točkom $C$, a njegov smjer neka određuje pomoćna točka $T$ s homogenim koordinatama

$$T = (x_{0T}, x_{1T}, x_{2T}). \tag{5.8}$$

Jednadžba pravca $t$ koji prolazi točkama $C$ i $T$ tada glasi

$$t_x x + t_y y + t_z = 0, \tag{5.9}$$

gdje smo označili

$$t_x = \begin{vmatrix} x_{2T} & x_{2C} \\ x_{0T} & x_{0C} \end{vmatrix},$$
$$t_y = -\begin{vmatrix} x_{1T} & x_{1C} \\ x_{0T} & x_{0C} \end{vmatrix}, \tag{5.10}$$
$$t_z = \begin{vmatrix} x_{1T} & x_{1C} \\ x_{2T} & x_{2C} \end{vmatrix}.$$

U 3. poglavlju ustanovili smo da je

$$g_1 g_2 + \mu g t = 0 \tag{3.4}$$

jednadžba pramena konika kojem su $A$, $B$ i $C$ temeljne točke, a $t$ zajednička tangenta svih konika pramena. Pomoću relacija (5.1)–(5.10) može se izvesti da je $g_1g_2$ oblika

$$\begin{aligned} g_1g_2 &= F(x,y) \\ &= a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1, \end{aligned} \tag{5.11}$$

uz oznake

$$\begin{aligned} a_1 &= g_{1x}g_{2x} & b_1 &= \tfrac{1}{2}(g_{1x}g_{2y} + g_{1y}g_{2x}) \\ c_1 &= g_{1y}g_{2y} & d_1 &= \tfrac{1}{2}(g_{1x}g_{2z} + g_{1z}g_{2x}) \\ e_1 &= \tfrac{1}{2}(g_{1y}g_{2z} + g_{1z}g_{2y}) & f_1 &= g_{1z}g_{2z}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Analogno, $gt$ je oblika

$$\begin{aligned} gt &= G(x,y) \\ &= a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2, \end{aligned} \tag{5.13}$$

uz oznake

$$\begin{aligned} a_2 &= g_xt_x & b_2 &= \tfrac{1}{2}(g_xt_y + g_yt_x) \\ c_2 &= g_yt_y & d_2 &= \tfrac{1}{2}(g_xt_z + g_zt_x) \\ e_2 &= \tfrac{1}{2}(g_yt_z + g_zt_y) & f_2 &= g_zt_z. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Pomoću izvedenih formula možemo sastaviti program za računalo koji na temelju zadanih točaka $A$, $B$, $C$ i $T$ određuje koeficijente u jednadžbi pramena

$$\begin{aligned} F(x,y) &+ \mu G(x,y) \\ &= a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 + \\ &+ \mu(a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2x + 2e_2y + f_2) = 0. \end{aligned}$$

## 6. Primjeri

Prethodna su razmatranja izvedena početkom 1990-ih radi izrade crteža za rad Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der Isotropen Ebene, II, V. Ščurić i H. Sachsa koji je objavljen 1997.

Za proučavanje geometrije izotropne ravnine može se upotrijebiti npr. monografija H. Sachsa (1987). Budući da računala početkom 1990-ih nisu imala ugrađeno poznavanje geometrije izotropne ravnine, a koliko mi je pozanto nemaju ni danas, trebalo se nekako snaći, odnosno pojedine jednadžbe ‚prevesti' na jezik geometrije euklidske ravnine. U tu je svrhu, na temelju u ovome radu prikazanih formula, bio sastavljen odgovarajući potprogram za računalo u Basicu, koji polazeći od zadanih homogenih koordinata točaka $A$, $B$, $C$ i $T$ određuje koeficijente u jednadžbi pripadnog pramena konika. Postupak se temelji na primjeni homogenih koordinata kako bi se i neizmjerno daleke točke ravnine mogle analitički obuhvatiti analogno kao i one u konačnosti. Točka $C$ je dvostruka točka, a točka $T$ je pomoćna točka koja zajedno s točkom $C$ definira zajedničku tangentu svih konika pramena.

Nakon što su bili izračunani koeficijenti u jednadžbi pramena, primjena odgovarajućeg programa omogućila je grafičko prikazivanje pramena (Lapaine 1997). Postupak se odvija na taj način da se najprije za svaku krivulju pramena izračunaju koordinate niza uzastopnih točaka. Pritom se gustoća točaka uzduž pojedine krivulje i gustoća krivulja u pramenu mogu interaktivno regulirati. Gustoća točaka uzduž pojedine krivulje bira se tako da se pri iscrtavanju ne primijeti izlomljenost linije, ali da se istovremeno prevelikom gustoćom ne preopterećuje memorija i vrijeme izvođenja. Gustoća krivulja u pramenu određuje se odabirom koraka parametra na taj način da na slici ne bude previše linija te time slika nečitljiva i na djelovima zacrnjena, ali da se istovremeno prikažu sve karakteristične krivulje pramena.

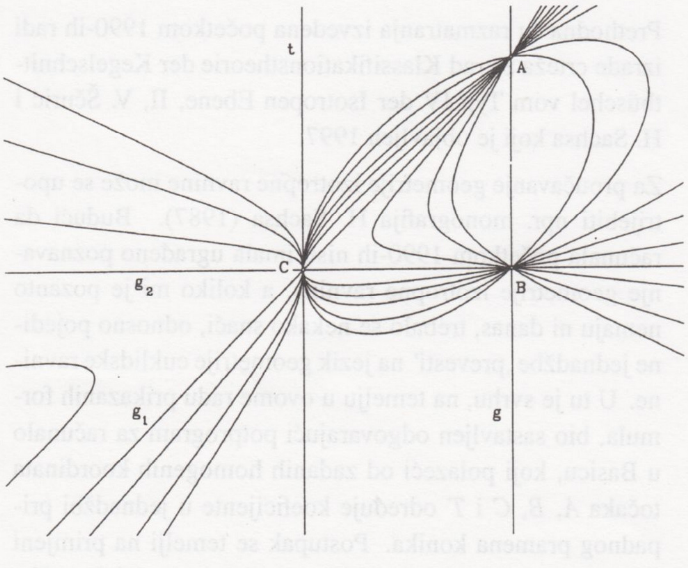
Nakon što smo zadovoljni s prikazom na ekranu monitora, slika se sprema u `.DXF` zapisu kako bismo je mogli učitati u AutoCAD te dalje uređivati. Tu se prvenstveno misli na opis slike, eventualno brisanje suvišnih elemenata te zadavanje boje, odnosno debljine onih linija koje na slici želimo istaknuti.

Primjeri koji slijede označeni su u skladu s radom (Ščurić i Sachs, 1997).

**Primjer 1.**: *Pramen tipa* $IV_3$

Zadane su točke u homogenim koordinatama $A(1,4,4)$, $B(1,4,0)$, dvostruka točka $C(1,0,0)$ i pomoćna točka $T(1,0,1)$. Jednadžba pramena je:

$$xy - y^2 + \mu(x^2 - 4x) = 0.$$

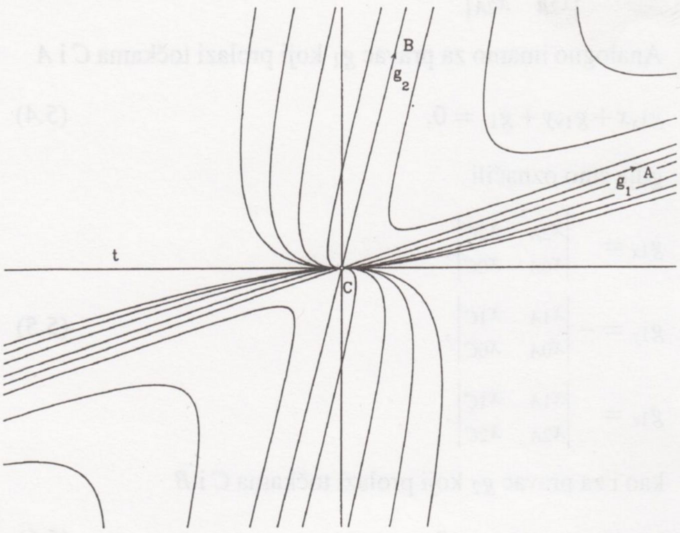



Slika 2: Pramen tipa $IV_3$

**Primjer 2.**: *Pramen tipa* $IV_{4,1,1}$

Zadane su točke u homogenim koordinatama $A(0,3,1)$, $B(0,1,4)$, dvostruka točka $C(1,0,0)$ i pomoćna točka $T(1,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$$4x^2 - 13xy + 3y^2 + \mu y = 0.$$

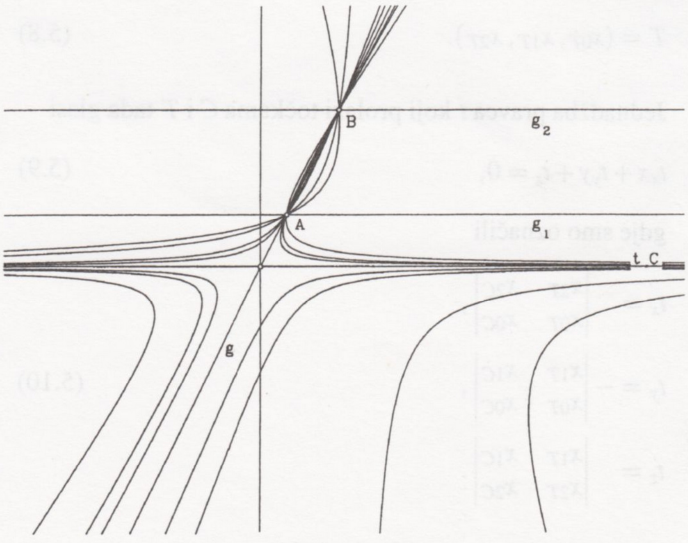



Slika 3: Pramen tipa $IV_{4,1,1}$

**Primjer 3.**: *Pramen tipa* $IV_{4,2}$

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(1,1,2)$, $B(1,3,6)$, dvostruka točka $C(0,1,0)$ i pomoćna točka $T(1,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$$y^2 \; 8y + 12 + \mu(2xy - y^2) = 0.$$

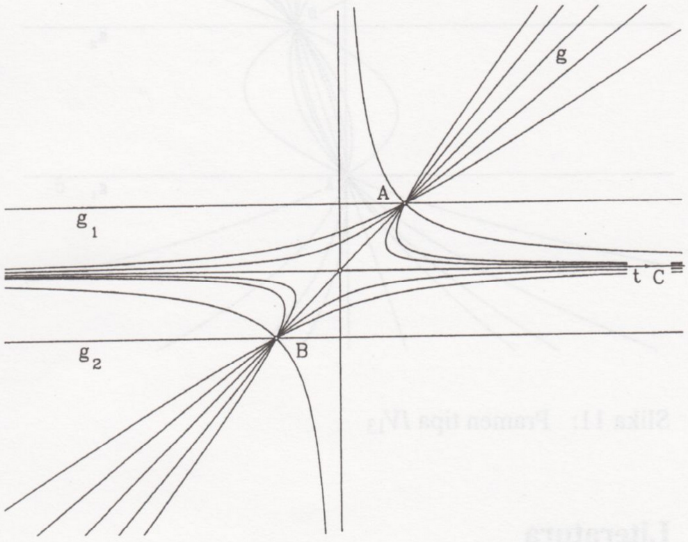



Slika 4: Pramen tipa $IV_{4,2}$

**Primjer 4.:** *Pramen tipa* $IV_{4,2k}$

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$, dvostruka točka $C(0,1,0)$ i pomoćna točka $T(1,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$y^2 - 1 + \mu(xy - y^2) = 0.$

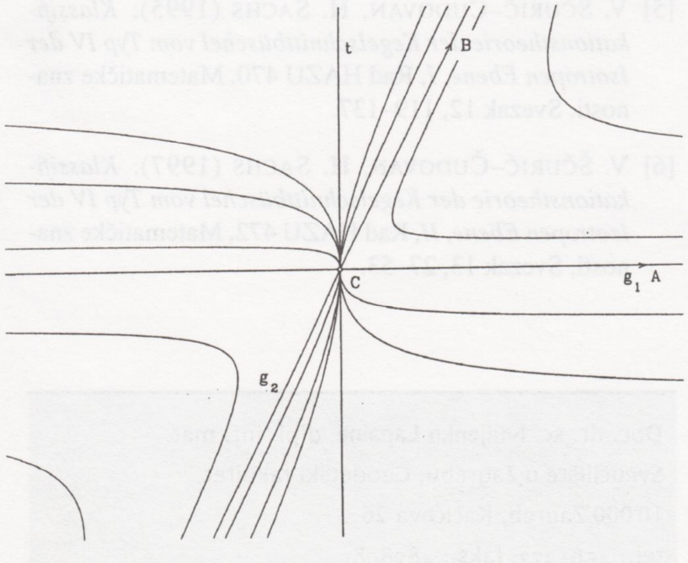



Slika 5: Pramen tipa $IV_{4,2k}$

**Primjer 5.:** *Pramen tipa* $IV_{5,1}$

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(0,1,0)$, $B(0,1,2)$, dvostruka točka $C(1,0,0)$ i pomoćna točka $T(1,0,1)$. Jednadžba pramena je:

$2xy - y^2 + \mu x = 0.$

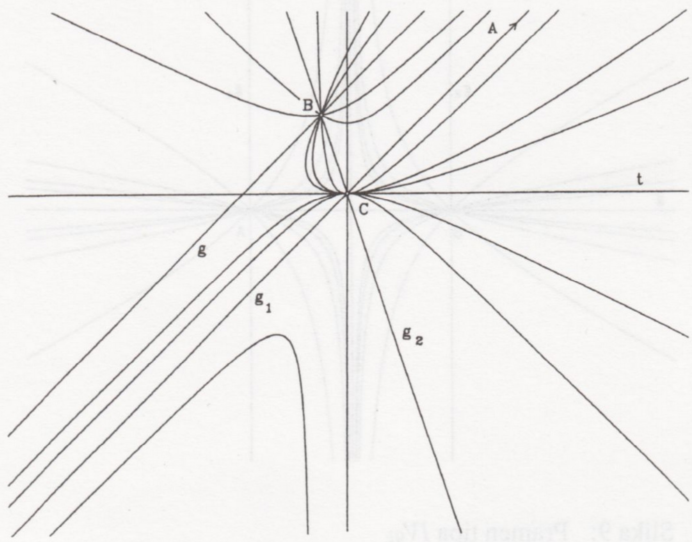



Slika 6: Pramen tipa $IV_{5,1}$

**Primjer 6.:** *Pramen tipa* $IV_7$

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(0,1,1)$, $B(1,-0.5,1.5)$, dvostruka točka $C(1,0,0)$ i pomoćna točka $T(1,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$3x^2 - 2xy - y^2 + \mu(xy - y^2 + 2y) = 0.$

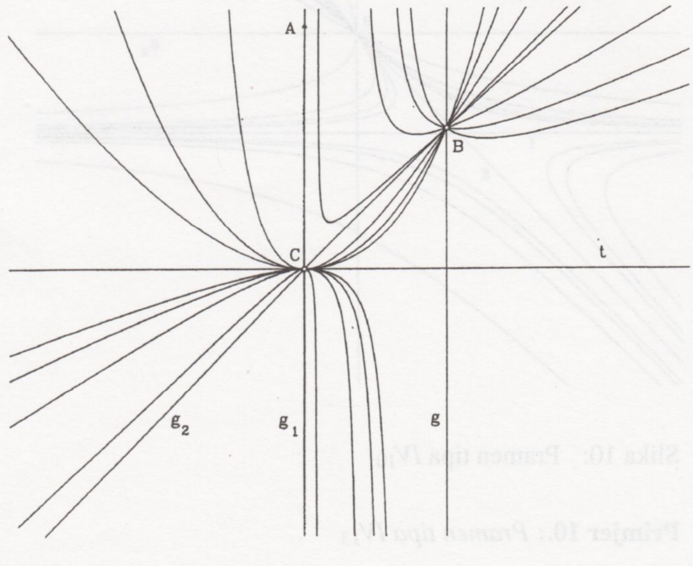



Slika 7: Pramen tipa $IV_7$

**Primjer 7.:** *Pramen tipa* $IV_8$

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(0,0,1)$, $B(1,2,2)$, dvostruka točka $C(1,0,0)$ i pomoćna točka $T(1,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$x^2 - xy + \mu(xy - 2y) = 0.$

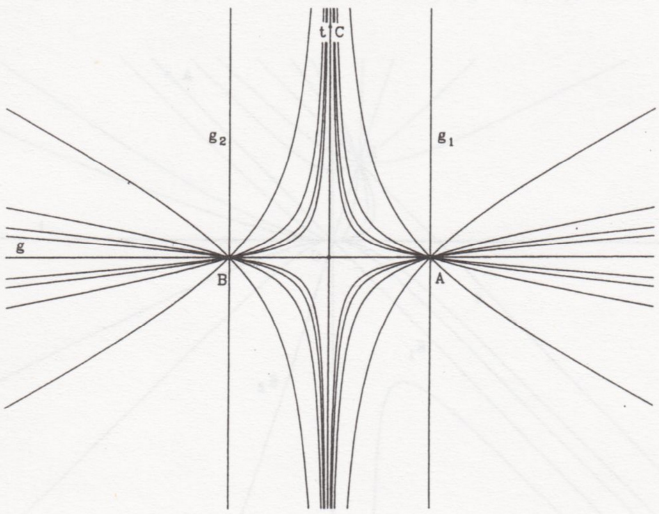



Slika 8: Pramen tipa $IV_8$

**Primjer 8.:** *Pramen tipa* $IV_{9k}$

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(1,2,0)$, $B(1,-2,0)$, dvostruka točka $C(0,0,1)$ i pomoćna točka $T(1,0,1)$. Jednadžba pramena je:

$x^2-4+\mu xy=0.$

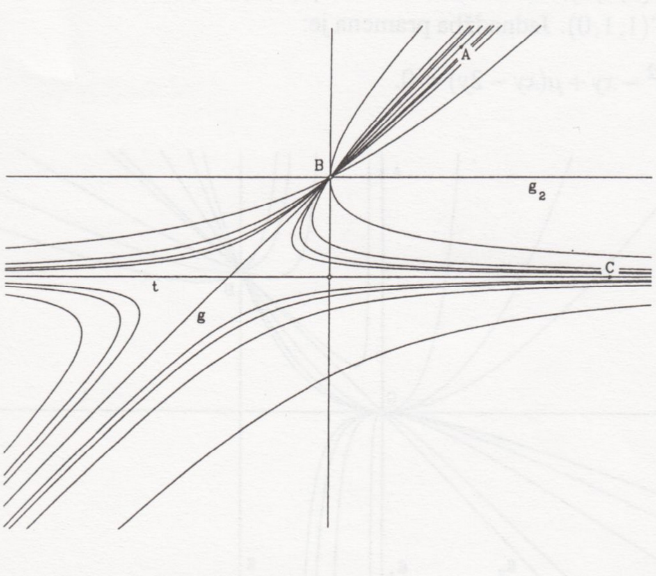



Slika 9: Pramen tipa $IV_{9k}$

**Primjer 9.:** *Pramen tipa* $IV_{10}$

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(0,1,1)$, $B(1,0,2)$, dvostruka točka $C(0,1,0)$ i pomoćna točka $T(1,1,0)$. Jednadžba pramena je:

$y-2+\mu(xy-y^2+2y)=0.$

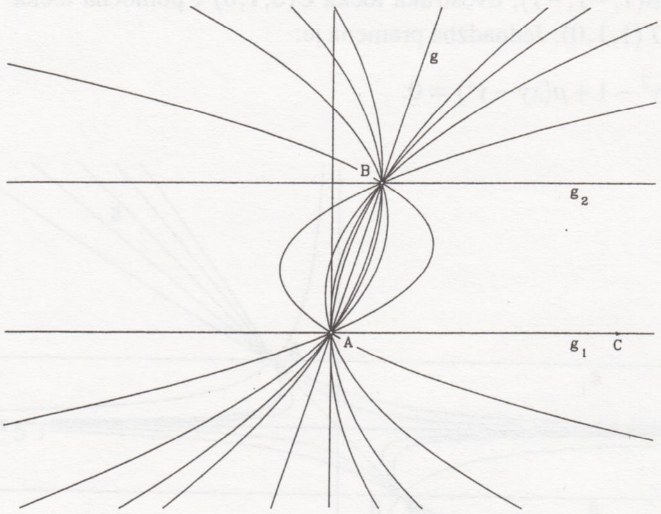



Slika 10: Pramen tipa $IV_{10}$

**Primjer 10.:** *Pramen tipa* $IV_{13}$

Zadane točke u homogenim koordinatama: $A(1,0,0)$, $B(1,1,3)$, dvostruka točka $C(0,1,0)$ i pomoćna točka $T(0,0,1)$. Jednadžba pramena je:

$y^2-3y+\mu(3x-y)=0.$




Slika 11: Pramen tipa $IV_{13}$

## Literatura

[1] R. CESAREC (1957): *Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područa, I dio.*, Školska knjiga, Zagreb.

[2] M. LAPAINE (1997): *Grafički prikaz pramena konika pomoću računala*, KoG 2, 43–47.

[3] M. LAPAINE, D. JOVIČIĆ (1996): *Grafički prikazi konika pomoću računala*, KoG 1, 19–26.

[4] H. SACHS (1987): *Ebene Isotrope Geometrie*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden.

[5] V. ŠČURIĆ–ČUDOVAN, H. SACHS (1995): *Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der Isotropen Ebene, I*, Rad HAZU 470, Matematičke znanosti, Svezak 12, 119–137.

[6] V. ŠČURIĆ–ČUDOVAN, H. SACHS (1997): *Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der Isotropen Ebene, II*, Rad HAZU 472, Matematičke znanosti, Svezak 13, 27–53.

Doc. dr. sc. **Miljenko Lapaine**, dipl. inž. mat.
Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet,
10 000 Zagreb, Kačićeva 26
tel.: 45 61 273, faks.: 48 28 081
e-mail: mlapaine@public.srce.hr