Franjo Hrabak,
Poljoprivredni fakultet Zagreb

LOGISTIČKA FUNKCIJA I NJENO PRILAGOĐAVANJE ZA RJEŠAVANJE PROIZVODNIH ZADATAKA

UVOD

Među funkcijama koje imaju svoju primjenu u ekonometriji i biometriji najčešće se kao proizvodne susreću Mitscherlichova (odnosno Spillmanova) logicistička funkcija; radi se o specijalnim tipovima eksponecijalnih funkcija. Zajedničko im je svojstvo da porastom nezavisne varijable (hrana, gnojivo, vrijeme i dr.) raste i zavisna varijabla (produkcija, težina i sl.) i to na način da se zavisna varijabla asimptotski približava maksimalnoj vrijednosti, horizontalnoj asimptoti. Bitna je razlika u tome što su Mitscherlichova i Spillmanova funkcija konveksne (gledano u negativnom smislu osi ordinata), dok logistička funkcija ima početnu vrijednost različitu od nule (dakle ne prolazi koordinananim početkom), najprije je konkavna, zatim preko tačke infleksije postaje konveksna.

Da bi se uočila razlika ovih dvaju tipova funkcija i time osiguralo pravilnu primjenu logističke funkcije, razmotrimo najprije Mitscherlichovu funkciju. Njen analitički zapis dan je s

$$y = y_o + d\ (1 - e^{-ax}) \tag{1}$$

gdje su d i a pozitivne konstante, $y_o \geqslant 0$, x nezavisna varijabla, $e \approx 2{,}718$ (baza prirodnih logaritama). Ako ova funkcija izražava ovisnost prinosa o množinu upotrebljenog gnojiva, znači y_o prinos bez upotrebe gnojiva, d graničnu vrijednost povećanja prinosa pri upotrebi gnojiva, a konstantu karakterističnu za pojedinu vrst gnojiva. Za $y_o = 0$ dobivamo iz (1)

$$y = d\ (1 - e^{-ax}); \tag{1'}$$

radi se o prinosu uzrokovanom množinom gnojiva. U tom slučaju je, prema (1'), $y(_o) = 0$; za $x \to \infty => y \to d$.

Anuliramo li prvu derivaciju funkcije (1'), dobivamo apscisu potencialne ekstremne vrijednosti, dok predznak druge derivacije za tako dobivenu apscisu govori o domeni konveksnosti odnosno konkavnosti krivulje. Provedimo naznačeni postupak.

$$y' = ad \cdot e^{-ax} \tag{4}$$

Za ekstrem je nužni uvjet $y' = 0$, dakle

$$ad \cdot e^{-ax} = 0 \tag{3}$$

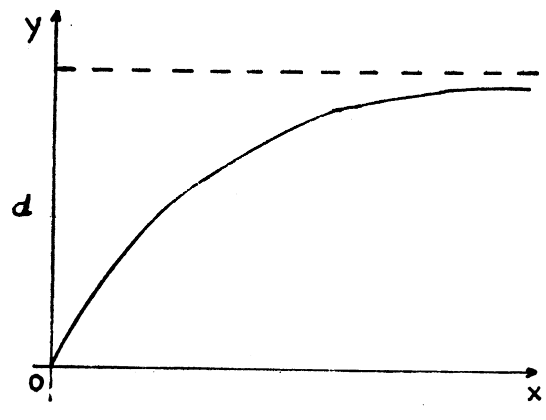
Realizacija (3) bit će moguća ako je $x = \infty$, što znači da nema ekstrema u konačnosti. Iz (2) nalazimo drugu derivaciju,

$$y'' = -a^2 d \cdot e^{-ax} \tag{4}$$

Iz (4) se lako zaključuje da je funkcija (1) striktno uzlazna i konveksna, jer je y'' za sve vrijednosti x negativan. Uzlaznost i konveksnost krivulje kaže da su sa porastom x relativni prirasti $\frac{\Delta y}{y}$ sve manji. Također vidimo da je y'' u konačnosti različito od nule, što znači da nema tačke infleksije. Iz (1) nalazimo

$$\lim_{x \to \infty} y = y_0 + d,$$

dakle jednadžbu horizontalne asimptote. Graf Mitscherlichove funkcije dan je slikom 1.



Slika 1.

Neovisno o tome u kolikoj se mjeri teorijska krivulja dana formulom (1) odnosno (1') priljubljuje empirijskim podacima, tj. u kolikoj mjeri ona stvarno može izraziti množinu prinosa kao funkciju količine gnojiva (utrošene hrane, proteklog vremena i dr.), problem izaziva teškoće pri samoj statističkoj obradi. Naime, metoda najmanjih kvadrata neprimjenjiva je izravno na funkciju oblika (1) odnosno (1'). Dovoljno je napisati sumu kvadrata odstupanja [npr. za (1')]

$$S\ (d,\ k) = \Sigma\ (Y_i - y_i)^2\ \Sigma\ [d\ (1 - e^{-ax}) - y_i]^2 \tag{5}$$

i brzo se uviđa da nije moguće sagraditi sume koje bi proizlazile iz samih empirijskih podataka x_i *i* y_i. Ako se parcijalne derivacije za (5) po d i a izjednače s nulom, postaje i vizuelno očito da se normalne jednanžbe za određivanje d i a ne mogu formirati. Kako se pomoću Spillmanove funkcije $y = M - A \cdot R^x$ mogu aproksimirati empirijski podaci iznio je O. Macháček u Statistika II, Úvod do statistických metod modelováni v zemědělstvi, Praha 1969. U citiranoj knjizi nalazi se (str. 18—24) i razmatranje o aproksimaciji empirijskih podataka logističkom krivuljom, dakle problematika koju treba da tretira ovaj članak.

LOGISTIČKA FUNKCIJA KAO ZAPIS OBJEKTIVNOG PROCESA

Logistička krivulja dana je analitičkim izrazom

$$f\ (x) = \frac{a}{1 + be^{-cx}} \tag{6}$$

gdje su a, b i c parametri odnosno pozitivne konstante karakteristične za pojedini proces, x nezavisna varijabla, $e = 2{,}718$. Radi li se o vremenu kao nezavisnoj varijabli (vremenske serije) pišemo (6) u obliku

$$f\ (t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}} \tag{7}$$

gdje t predočuje proteklo vrijeme procesa.

Razmatranja o primjeni metode najmanjih kvadrata, iznesena za Mitscherlichovu funkciju, vrijede i za funkciju (7); ni kod nje ne može biti govora o direktnoj primjeni metode najmanjih kvadrata. Kasnije će se dati postupci koji dovode do aproksimacije empirijskih podataka logističkom krivuljom, a prije toga upoznajmo neka svojstva ove funkcije.

$$\text{Za } t = 0 \text{ proizlazi iz (7) } f\ (0) = \frac{a}{1 + b}, \tag{8}$$

dakle početna vrijenost funkcije. Horizontalnu asimptomu dobivamo pomoću $t \to \infty$, dakle

$$\lim_{t \to \infty} y = \lim_{t \to \infty} \frac{a}{1 + be^{-ct}} = a.$$

Horzintalna asimptota ima dakle jednadžbu $y = a$ (9), a to je jednadžba pravca koji je paralelan s osi t u udaljenosti a.

Prva derivacija funkcije (7) anulirana dala bi informaciju da nema ekstrema, dok bi druga derivacija izjednačena s nulom pokazala da postoji tačka infleksije s apscisom t_0. Za $t \varepsilon (0, t_0)$ našli bismo $f''(t) > 0$, što znači da je krivulja konkavna, za interval (t_0, ∞) nalazi se $f''(t) < 0$, što znači da je za taj interval funkcija konveksna. Baš ovo svojstvo logističke krivulje da je najprije konkavna a zatim konveksna znači njenu veliku prednost za aproksimiranje niza procesa koje susrećemo u prirodi, društvu pa i ljudskom mišljenju. Činjenica što se procesi većinom aproksimiraju polinomima, potencijama i jednostavnom eksponencijalnom funkcijom i u slučajevima kada navedeni tipovi funkcija nisu zadovoljavajuće prilagodljivi danim empirijskim podacima, ima svoj djelomični uzrok u tome što primjena lagističke, Mitscherlichove i Spillmanove funkcije još nije »uhodana« zbog iznesenih teškoća pri njihovoj praktičnoj aplikaciji.

U želji da se pospješi primjena logističke funkcije tamo gdje njena svojstva najbolje pristaju, iznijet će se najprije ideja koja nužno vodi na tu funkciju na osnovu procesa koji se u praksi susreću, dok u nastavku slijedi kondenzirana teorijska obrada. Zadatak ovog rada, aplikacija logističke funkcije u matematičko-statističkoj obradi empirijiskih podataka, dobiva time svoje opravdanje.

Razmatrat ćemo dakle poajvu koja je markantna po tome da proces najprije relativno rasta, određenog momenta se proces usporava približavajući se sve više nivou zasićenosti. Uz pomoć matematičke simbolike možemo rečeno izraziti ovim logaritmom: Tempo (brzina) rasta $\frac{dy}{dt}$ funkcije $y = f(t)$, npr. proizvodnje, 1) upravno je razmjeran s vrijednošću funkcije y, s tzv. faktorom kretanja i 2), zbog kasnijeg usporavanja procesa, tempo rasta je također upravno proporcionalan udaljenosti funkcije od nivoa zasićenosti (koji je u (7) označen sa a i obično se naziva parametar zasićenosti) — dakle s $a - y$, tzv. faktorom usporenja. Tako dolazimo do zaključka da navedenoj pojavi, koja se objektivno odvija, odgovara ovaj anamitički izraz

$$\frac{dy}{ty} = ky\,(a - y) \tag{10}$$

gdje je $k > 0$ koeficijent proporcionalnosti.

Relacija (10), koja izražava imanentno svojstvo znatnog broja procesa odnosno pojava, naziva se zakon porasta odnosno porast prema zakonu Roberstona*. Vrijedi uočiti da je brzina rasta $\frac{dy}{ty}$ upravo proporcionalna kako s y tako i s $a - y$. To zapravo znači da će $\frac{dy}{ty}$ biti to veći što su ovi faktori veći. Zadržimo se začas na upravnoj proporcionalnosti s drugim faktorom, s $a - y$: kako y raste (zahvaljujući rastu nezavisne varijable t), izraz $a - y$ sve više opada; ovaj faktor dakle usporava rast. Jednadžba (10) daje rast u

* O. Lange, Uvod u ekonometriju (prijevod s poljskog jezika), Sarajevo, 1960.

difrencijalnom obliku, dakle »brzinu rasta« izraženu pomoću funkcije rasta. Geometrijski uzeto, (10) daje tangens kuta što ga tangenta ma kojom tačkom traženekrivulje zatvara se osi t. Želimo li opravdati jednadžbe (7), moramo (10) integrirati i tako dokazati da (7) predočuje u nediferencijalnom obliku ekvivalent relaciji (10). Pisat ćemo diferencijalnu jednadžbu (10) u prikladnijem obliku

$$\frac{dy}{y\,(a - y)} = kdt \tag{10'}$$

i naći njeno rješenje, najbolje metodom parcijalnih razlomaka. Lijeva strana za (10') daje

$$\int \frac{dy}{y\,(a - y)} = \int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{a - y}\right) dy = \int \frac{A\,(a - y) + By}{y\,(a - y)}\, dy,$$

odakle čitamo $Aa = 1$, $- A + B = 0$, odnosno $A = B = \frac{1}{a}$. Supstitucijom vrijednosti za A i B nalazimo

$$a \int \frac{dy}{y\,(a - y)} = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{a - y} = ln\, y - ln\, (a - y) +$$

$$+ C = ln \frac{y}{a - y} + C$$

Kako je vrijednost integrala desne strane u (10') jednaka $kt + c_2$, vrijedi relacija

$$\frac{1}{a}\, ln \frac{y}{a - y} + c_1 = kt + c_2$$

$$ln \frac{y}{a - y}\; akt + ac_2 - ac_1$$

$$ln \frac{y}{a - y} = akt + c_o, \text{ gdje je konstanta } ac_2 - ac_1 \text{ označena sa } c_o.$$

Odatle dobivamo

$$\frac{y}{a - y} = e^{akt + c_o} \tag{11}$$

Rješenje po y daje

$$y = \frac{a}{1 + e^{-(akt + c_o)}} \tag{12}$$

Transformacijom $e^{-akt-c_0} = {}^{-akt} \cdot e^{-c_0}$ i supstitucijom $ak = c, e^{-c_0} = b$ dolazimo konačno do logističke funkcije (7), gdje je oznaka za funkciju $f\ (t)$, što je u skladu s eksplicitnim izražavanjem funkcije, $y = f\ (t)$.

Granica između obrzavanja i usporavanja rasta, tačka infleksije, određena je relacijom $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$. Iz (10') dobivamo dakle

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = k\ (a - 2\ y) = 0,$$

a odavde ordinatu tačke infleksije

$$y_o = \frac{a}{2}. \tag{13}$$

Algoritam kojim se od diferencijalne jednadžbe (10) došlo do logističke krivulje, dane jednadžbom (7), jasno ukazuje na to kako provedeni postupci i dobivene matematičke relacije dosljedno odražavaju proces koji se odvija u stvarnosti: funkcija najprije raste uz kontinuirani porast brzine (krivulja je konkavna), zatim preko tačke infleksije postaje konveksna i dalje rastući, ali porast brzine rasta je sve manji — on se približava asimptotski nuli.

Iako je, zahvaljujući iskustvu, prilično poznato u kojim slučajevima se može za apromiksaciju podataka, koji predočuju rast, primijeniti konveksnu a kada konkavno-konveksnu krivulju, može biti od koristi da se na primjeru, koji treba ovdje da se do kraja obradi, ilustrira opravdanost primjene logističke krivulje. Za ilustraciju služe rezultati pokusa sa uzorkom od 40 pilića, prema podacima u tabeli 1*. Ograničimo se pri tome samo na matematičko-statističko razmatranje.

Tabela 1

Tjedan	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Tež. utr. hr. u dkg	0	4	7	21	44	74	110	150	200	230	285	352	410	470	541	608
Tež. pilića u dkg	4	8	15	26	40	55	71	88	107	125	142	157	171	184	196	209

Iz table 1 izračunajmo prosječni tjedni prirast težine hrane i pripadni prirast težine pilića (tabela 2).

* Podaci su iz Zavoda za hranidbu stoke i tehnologiju stočne hrane Poljoprivrednog fakulteta u Zagrebu (doc. dr B. Braun)

Tabela 2

U odnosu na tjedan	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Prirast težine utr. hrane	4	3	14	23	30	36	40	50	30	55	67	58	60	71	67
Prirast težine pilića	4	7	11	14	15	16	17	19	18	17	15	14	13	12	13

Tabela 2 ukazuje na to da se prirast utroška hrane povećava do desetog tjedna, zatim se gotovo stabilizira do kraja posljednjeg tjedna pokusa. Odgovarajući prirast težine pilića se također povećava do uključiv sedmog tjedna, zatim se sukcesivno smanjuje. Napomenimo da u ovom razmatranju nije bitna puna tačnost podataka jer se radi o iznošenju metode rada. Iz podataka se ipak može razabrati da se težina pilića kao funkcija proteklog vremena hranjenja ne bi mogla apromiksirati Mitscherlichovom odnosno Spillmanovom krivuljom, što se za težinu utrošene hrane ne bi moglo reći. Zapažamo da postoji negdje do sedmog tjedna paralelizam između prirasta težine hrane i prirasta težine pilića, da dakle pri kraju ove povezanosti postoji tačka infleksije funkcije koja izražava ovisnost težine pilića o proteklom vremenu. To je dakle najpovoljniji period za prodaju odnosno klanje pilića. Spoznaja da težinu pilića možemo tretirati kao funkciju vremena — pomoću logitsičke funkcije — znatno pojednostavljuje statističku obradu. Potrebni su stoga podaci dani u tabeli 3, gdje t_i označuje proteklo vrijeme, y_i težinu pilića.

Tabela 3

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	10	11	12	13	14	15
y_i	4	8	15	26	40	55	71	88	107	125	142	157	171	184	196	209

Raspoloživi podaci odnose se samo na prvih 15 tjedana, što je svakako nedovoljno. Očito će, kao posljedica nedovoljnih podataka, teorijska krivulja vidno odstupati od empirijskih podataka; podaci za određeni broj tjedana mogu dati kao rezultat samo ono što se na temelju njih može izračunati. Kako je zadatak ovog razmatranja da ukaže na matematičko-statističku metodu rada, ne treba navedenoj nedosljednosti dati vidnije značenje.

PRIMJENA METODE NAJMANJIH KVADRATA PREMA IDEJI H. T. DAVISA*

Spomenuto je i obrazloženo da se metoda najmanjih kvadrata ne može primijeniti na logističku funkciju zbog njene strukture. O. Macháček navodi postupak H. T. Davisa kao najpodesniji. Davisova ideja je ova: Polaji od empirijskih relativnih prirasta

$$\frac{y_i + l - y_i}{y_i} = d_i \tag{14}$$

* Davis H. T., The Analysis of Economic Time Series, Principia Press of Trinity University, San Antonio, Texas 1963.

i uspoređuje ih s odgovarajućim izrazom logističke funkcije, $\frac{f'(t_i)}{f(t_i)}$, dakle s njenim graničnim relativnim prirastima. Ako se tvrdi da je $\Sigma y_i \approx \Sigma f(t_i)$, zadatak je rješiv. Ako to nije, treba naći korigirane vrijednosti za $f(t_i)$, u oznaci $f(t_i)_{cor}$, i na kraju izračunati vrijednost parametra b, odnosno dati jednadžbu logističke krivulje koja najbolje aproksimira empirijske podatke.

Za dobivanje graničnog relativnog prirasta $\frac{f'(t)}{f(t)}$ treba najprije derivirati (7) po t, dakle

$$f'(t) = \frac{abce^{-ct}}{(1+be^{-ct})^2} = \frac{a \cdot bce^{-ct}}{(1+be^{-ct})(1+be^{-ct})} =$$

$$= f(t) \cdot \frac{bce^{-ct}}{1+be^{-ct}} \tag{15}$$

Pomoću (7) može se transformirati (15):

$$be^{-ct} = \frac{a - f(t)}{f(t)}, \; 1 + be^{-ct} = \frac{a}{f(t)}. \tag{16}$$

Supstituiranjem u (15) dobivamo

$$f'(t) = \frac{c\,[a - f(t)]}{a} f(t), \text{ odnosno } \frac{f'(t)}{f(t)} = c - \frac{c}{a} f(t).$$

Ovdje možemo ustanoviti da se radi o linearnoj funkciji kojoj je nezavisna varijabla logistička funkcija,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = c + qf(t) \tag{17}$$

uz supsttiuciju

$$q = -\frac{c}{a} \tag{18}$$

Za isti podatak glasit se (17)

$$\frac{f'(t)}{f(t_i)} = c + qf(t_i) \tag{19}$$

Relaciji (19) za teorijske vrijednosti odgovara za empirijske podate (vidi (14) i pripadni tekst) približno relacija

$$d_i = c + qy_i \tag{20}$$

gdje je d_i empirijski relativni prirast y_i podatak kojem odgovara taj prirast. Iz (20) možemo metodom najmanjih kvadrata uz pomoć podataka u tabeli 3 izračunati c i q, odnosno c i a, a to su već vrijednosti za dva parametra koji se odnose na logističku funkciju (7). Pripadni sustav normalnih jednadžbi bit će

$$\begin{aligned} (n - 1) + q\,\Sigma\, y_i &= \Sigma\, d_i \\ c\,\Sigma\, y_i + q\,\Sigma\, y_i^2 &= \Sigma\, d_i\, y_i \end{aligned} \qquad (21)$$

Sastavimo tabelu 4 koja nam daje koeficijente pomoću kojih se razrješava po c i q sustav normalnih jednadžbi (21).

Tabela 4

t_i	y_i	$d_i aps$	$d_i rel$	y_i^2
0	4	4	1,0000	16
1	8	7	0,8750	64
2	14	11	0,7333	225
3	26	14	0,5384	676
4	40	15	0,3750	1600
5	55	16	0,2909	3025
6	71	17	0,2394	5041
7	88	19	0,2159	7744
8	107	18	0,1682	11449
9	125	17	0,1360	15625
10	142	15	0,1056	20164
11	157	14	0,0892	24649
12	171	13	0,0760	29241
13	184	12	0,0652	33856
14	196	13	0,0663	38416
15	209	x	x	x
Σ	1389 (1598)	205	4,9744	191791

U gornjoj tabeli predočuje d_i *aps* apsolutni prirast $y_{i+1} - y_i$, d_i *rel* relativni prirast $\frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}$ empirijiskih podataka. Za produkte $y_i\, d_i$ nije unesen posebni stupac; lako se uviđa da se pripadni podaci već nalaze u stupcu d_i *aps*. U prvoj normalnoj jednadžbi (21) ne piše n već $n - 1$, što izražava činjenicu da kvocijenata ima za jedinicu manje od broja vrijednosti y_i. Unesimo vrijednosti dobivene u tabeli 4 u sustav normalnih jednadžba (21); imamo

$$\begin{aligned} 15c + 1389q &= 4{,}9744 \\ 1389c + 191791q &= 205, \end{aligned}$$

dakle sustav za određivanje c i q, a prema tome i a.

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 4{,}9744 & 1369 \\ 205 & 191791 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & 1389 \\ 1389 & 191791 \end{vmatrix}} = 0{,}70635$$

$$q = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 4{,}9744 \\ 1389 & 205 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1389 & 191791 \\ 15 & 1389 \end{vmatrix}} = -\ 0{,}00405$$

$$a = -\frac{c}{q} = 174{,}5497$$

Prije nego što provjerimo da li je $\Sigma\ y_i \approx \Sigma\ f\ (t_i)$, potrebno je zadržati se na logici i uvjetima za povezivanje (19) sa (20). Očito je da će empirijskim podacima y_i odgovarati teorijski podaci $f\ (t_i)$, ali se bez pripadne specijalizacije ne vidi zašto bi vrijednost $d_i\ rel = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}$ mogla odgovarati vrijednost $\frac{f'\ (t_i)}{f\ (t_i)}$. Da to uvidimo, zamijenimo najprije graničnu vrijednost kvocijenta diferencija

$$f'\ (t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\ (t + \Delta\ t) - f\ (t)}{\Delta\ t}$$

običnim kvocijentom diferencija $\frac{f\ (t + \Delta\ t) - f\ (t)}{\Delta t}$ a ovaj specijaliziramo uz $\Delta\ t = 1$ (prelazimo od kontinuiranih na diskretne vrijednosti i time činimo neizbježne usputne greške). Označimo li relativni prirast kvocijenta za $f\ (t)$ sa $\Delta_f\ (t)$, možemo za i-ti podatak pisati [prema lijevoj strani u (19)]:

$$\Delta\ f\ (t_i) = \frac{\dfrac{f\ (t_i + \Delta\ t_i) - f\ (t_i)}{\Delta\ t_i}}{f\ (t_i)} \tag{22}$$

Ako u (22) za t_i uzimamo redom vrijednosti $t_i = 0,\ 1\ 2, \ldots, n - 1$, bit će apsolutna difrencija za vrijeme svaki put $\Delta t_i = 1$, pa (22) glasi

$$\Delta\ f\ (t_i) = \frac{f\ (t_i + 1) - (f\ t_i)}{f\ (t_i)} \tag{23}$$

a taj oblik posve odgovara obliku $\frac{y_i + 1 - y_i}{y_i} = d_i\ rel$ za empirijske podatke, pa lijevu stranu u (19) možemo zamijeniti sa $\Delta\ f\ (t_i)$ (pri čemu, kako je rečeno, činimo grešku). Umjesto (19) pišemo dakle

$$\Delta\ f\ (t_i) = c + qf\ (t_i) \tag{24}$$

Kasnije će se iznijeti kako se učinjene greške mogu smanjiti. Iz (23) dobivamo također

$$f\ (t_i + 1) = f\ (t_i) \cdot [\triangle\ f\ (t_i) + 1] \qquad (25)$$

Pomoću početnih podataka (u tablei 4) procijenimo vrijednost $f\ (t_i)$ za $t_i = 0$. U našem primjeru uzimamo prvi podataka $y = 4$. Supstitucijom u (24) dobivamo vrijednost za $\triangle\ f\ (0)$, zatim pomoću (25) dobivamo $f\ (1)$. Supstitucijom te vrijednosti u (24) dobivamo $\triangle\ f\ (1)$, zatim pomoću (25) dobivamo $f\ (2)$. Postupak iteriramo dok ne izračunamo sve vrijednosti do $f\ (n - 1)$. Na temelju ovih razmatranja popunjavaju se prva dva stupca tabele 5. Usporedimo li $\Sigma\ y_i = 1598$ iz tabele 4 sa $\Sigma\ f\ (t_i) = 1621{,}8$ iz tabele 5, vidimo da postoji razlika $\Sigma\ y_i - \Sigma\ f\ (t_i) = -23{,}8$. Greška koja je učinjena kada je $\frac{f'\ (t_i)}{f\ (t_i)}$ supstituirano sa $\triangle\ f\ (t_i)$ [prelaz od (19) na (25)!] može se sada smanjiti. Poboljšane vrijednosti $f\ (t_i)_{cor}$ dobivaju se tako da vrijednostima $f\ (t_i)$, koje se nalaze u prvom strpcu tabele 5, dodamo aritmetičku sredinu razlike $\Sigma\ y_i - \Sigma\ f\ (t_i)$.

Ttbela 5

t_i	$f\ (t_i)$	$\triangle\ f\ (t_i)$	$f\ (t_i)_{cor}$	$a - f\ (t_i)_{cor}$	$\frac{a - f\ (t_i)_{cor}}{f\ (t_i)_{cor}}$
0	4,00000	0,69015	2,51180	172,03790	68,49188
1	6,76060	0,67897	5,27240	169,27730	32,10631
2	11,35085	0,66038	9,86265	164,68705	16,60805
3	18,84672	0,63002	17,35852	157,19118	9,05556
4	30,72053	0,58192	29,23233	145,31737	4,97112
5	48,59742	0,50953	47,10922	127,44048	2,70521
6	73,35926	0,40924	71,87106	102,67864	2,42865
7	103,38080	0,28766	102,89260	73,65710	0,71586
8	133,11933	0,16722	131,63113	42,91857	0,32605
9	155,39282	0,07761	153,90462	20,64518	0,13414
10	167,45128	0,02817	165,97708	8,57262	0,05165
11	172,16840	0,00907	170,68020	3,86950	0,02267
12	173,72997	0,00274	172,24177	2,30793	0,01340
13	174,19904	0,00084	172,71084	1,83886	0,01065
14	174,34533	0,00015	172,85713	1,69257	0,00979
15	174,38889	x	172,90069	1,64901	0,00954
Σ	1621,81124	x	1599,01404	x	x

Kako je $\Sigma\ y_i - \Sigma\ f\ (t_i) = -23{,}81124$, to je pripadna aritmetička sredina $-23{,}81124 : 16 = -1{,}4882$. Za ovaj broj treba povećati svaki podatak u stupcu za $f\ (t_i)$ da bi se dobile odgovarajuće vrijednosti u stupcu $f\ (t_i)_{cor}$. Tako ćemo za prvi redak dobiti $4{,}0000 - 1{,}4882 = 2{,}5118$, za drugi redak $6{,}7606 - 1{,}4882 = 5{,}2724$. I ostali brojevi u stupcu za $f\ (t_i)_{cor}$ dobivaju se na navedeni način. Obzirom na izvršenu korekturu za $f\ (t_i)$ dobili smo $\Sigma\ f\ (t_i)_{cor} = 1599{,}01404$, koja suma odstupa od $\Sigma\ y_i = 1598$ za svega $- 1{,}01404$. To nas upućuje na upotrebu podataka iz stupca $f\ (t_i)_{cor}$; oni će nam u daljnjem računanju dati tačnije rezultate od podataka u stupcu $f\ (t_i)$.

Rješavanjem sustava normalnih jednadžbi (21) nađene su vrijednosti za parametre a i c koji dolaze u logističkoj funkciji (7). Da se nađe pripadna jednadžba logističke funkcije treba još odrediti vrijednost trećeg parametra b, dakako uz pomoć korigiranih vrijednosti $f\ (t_i)_{cor}$. Pođimo u tom cilju od jednadžbe (7) logističke funkcije i izrazimo b pomoću ostalih veličina koje ovdje dolaze. Jednostavnom transformacijom nalazimo

$$b = \frac{a - f\ (t)}{f\ (t)}\ e^{ct}$$

Za svaku vrijednost t dobivamo drugu vrijednost za b (a i c su već izračunate vrijednosti), pa je blizu pomisao da pođemo od formule

$$b_i = \frac{a - (t_i)_{cor}}{f\ (t_i)_{cor}}\ e^{ct_i} \qquad (26)$$

koja daje n vrijednosti za b_i (u razmatranom primjeru je $n = 16$). Aritmetička sredina ovih n vrijednosti za b_i očito je najbolja procjena za traženu vrijednost parametra b. Dakle

$$b \approx \frac{\Sigma\ b_i}{n} \qquad (27)$$

Da bi se izračunale vrijednost razlomaka danih u (26) na desnoj strani, treba prethodno izračunati vrijednost brojnika u (26), $a - f\ (t_i)_{cor}$ (predzadnji stupac u tabeli 5), a zatim pomoću vrijednosti iz trećeg stupca tabele 5 odrediti vrijednosti zadnjeg stupca te tabele. Iz jednadžbe (26), kojom se određuju pojedine vrijednosti b_i, čitamo da je potrebno naći i vrijednost Postupak kojim dolazimo do $\Sigma\ b_i$ iznesen je u prva četiri stupca tabele 6.

Tabela 6

t_i	ct_i	$lg\ e^{ct_i}$	e^{ct_i}	b_i	$1 + be^{-ct_i}$	Y_i
0	0,00000	0,00000	1,00000	68,49188	105,52478	1,65411
1	0,70635	0,30676	2,02675	65,06566	52,57718	3,31968
2	1,41270	0,61352	4,10700	68,57889	26,45040	6,59913
3	2,11905	0,92028	8,32300	75,36943	13,55855	12,87377
4	2,82540	1,22704	16,86700	83,84788	7,19700	24,25312
5	3,53175	1,53380	34,18230	92,47030	4,05786	43,01521
6	4,23810	1,84056	64,27200	91,82219	2,62629	66,46246
7	4,94475	2,14732	140,38100	100,49314	1,74459	100,05199
8	5,65080	2,45409	284,51000	92,76449	1,36739	127,65173
9	6,35715	2,76085	576,57100	77,34123	1,18129	147,76194
10	7,06350	3,06761	1168,46000	60,35096	1,08945	160,21818
11	7,76985	3,37437	2367,94000	53,68120	1,04414	167,17078
12	8,47620	3,68113	4798,78000	64,30365	1,02178	170,82904
13	9,18255	3,98789	9726,00000	103,58190	1,01075	172,69325
14	9,88890	4,29485	19717,30000	193,03237	1,00530	173,62946
15	10,59525	4,60161	39958,20000	381,20123	1,00262	174,09357
Σ	x	x	x	1672,39640	x	x

Primjenom (27) izlazi $b \approx \dfrac{1672{,}3964}{16} = 104{,}524775$

JEDNADŽBA TRAŽENE KRIVULJE I ZAKLJUČCI

Prema (7) možemo napisati relaciju

$$Y_i = \frac{a}{1 + be^{-ct_i}} \tag{28}$$

Vidljivo je da se nazivnici u (28) dobivaju ako broju 1 dodamo kvocijent između b — koji je izračunat pomoću (27) — i pojedinih vrijednosti za e^{ct_i} u tabeli 6 (3. stupac). Tako dolazimo do predzadnjeg stupca tabele 6. Konačno, pomoću (28) dobivamo pojedine vrijednosti Y_i koje su unesene u zadnji stupac tabele 6.

Logistička funkcija koja najbolje aproksimira podatke dane tabelom 3 imat ćemo, prema (7), jednadžbu

$$f(t) = \frac{174{,}5497}{1 + 104{,}5248e^{-0{,}70635t}} \tag{29}$$

Apscisa t_o tačke infleksije nalazi se pomoću $f''(t) = 0$. Lako se provjeri da vrijedi

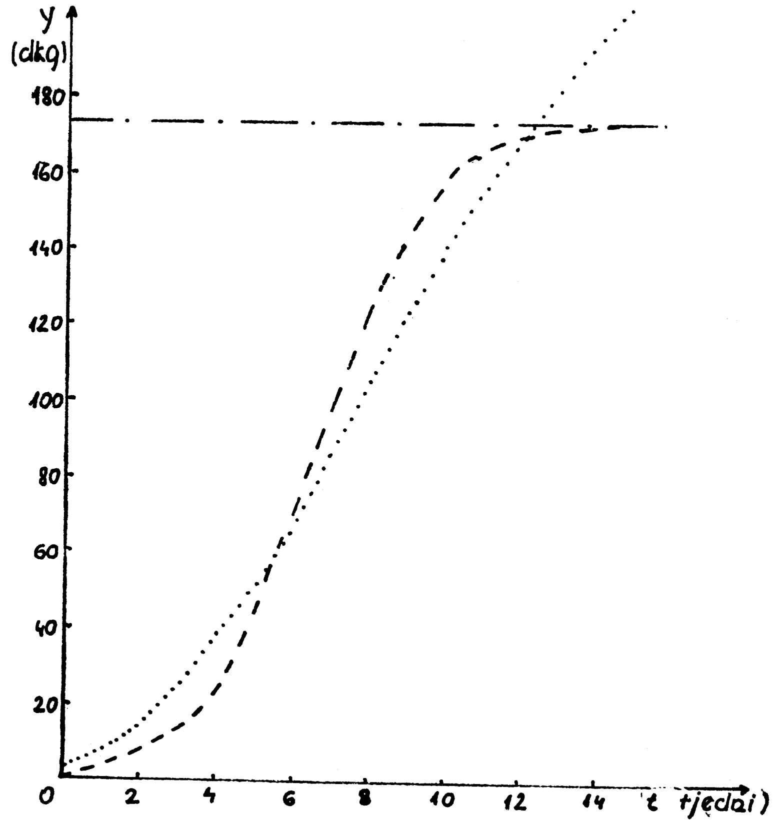
$$t_o = \frac{\ln b}{c} \tag{30}$$

U primjeru koji se ovdje razmatra bit će prema tome apscisa tačke infleksije

$$t_o = \frac{\ln 104{,}525}{0{,}70635} = \frac{2{,}30258 \cdot \lg 104{,}525}{0{,}70635} = 6{,}5823,$$

što znači da sredina sedmog tjedna predočuje momenat poslije kojeg, prema podacima danim u tabeli 1, opada relativni prirast težine pilića. Interpolacijom nalazimo iz ove tabele da se radi o pilićima težine oko 1 kg za koje je utrošeno oko 1,80 kg hrane. Iz navedenih podataka i tržišnih cijena može se elementarnim postupkom izračunati pripadna dobit.

Za direktno određivanje maksimalne dobiti trebalo bi, primjenom prilagođenog analognog postupka, najprije izraziti težinu pilića kao Mitscherlichovu funkciju težine utrošene hrane. Anuliranjem prve derivacije koja izražava dobit nalazi se težina utrošene hrane (dakle i pripadna dob pilića) kojoj odgovara maksimalna dobit. Odnos cijene hrane i pilića može izazvati izvjesne razlike u odnosu na dobit koja se izračunava na osnovu logističke funkcije.



Sl. 2.

U slici 2 ucrtani su, prema tabeli 3, empirijski podaci, a prema izračunatim podacima, koji se nalaze u zadnjem stupcu tabele 6, nacrtana je logistička funkciju koja treba da empirijske podatke što bolje aproksimira. Zapaža se vidno odstupanje teorijske od empirijske krivulje, iako i empirijski podaci imaju tok logističke krivulje. Dovoljno je usporediti dobivenu jednadžbu horizontalne asimptote, $y = 174{,}5497$, s empirijskim podacima za težinu pilića u tabeli 3 (odnosno u slici 2): linija koja spaja empirijske podatke siječe i nadvisuje ovu asimptotu početkom 13. tjedna. Da su bili na raspolaganju podaci za cjelokupni porast težine (npr. za 5 mjeseci), horizontalna asimptota imala bi ordinatu veću od 200 te bi teorijska krivulja jako dobro aproksimirala podatke; iščezle bi »petlje« koje se pojavljuju u slici 2. Ako bi se npr. samo aproksimirali podaci za prvih 11 tjedana, »petlje« bi bile još šire a horizontalna asimptota imala bi jednadžbu $y = 120{,}6$, što je besmislica u odnosu na razmatrani priozvodni zadatak, ali matematičko-statistički pravilan rezultat na osnovu podataka koji su uzeti u račun.

ZAKLJUČAK

Tok nekih funkcija ekspoenecijalnog tipa, posebno Mitscherlichove i logističke, imanentno odgovara mnogim procesima u prirodi i ekonomici. Struktura ovih funkcija ne dopušta da se izvrši njihovo apromiksiranje empirijskim podacima izravnom primjenom metode najmanjih kvadrata. Kako su ove funkcije matematički izraz objektivnih procesa, očito je potrebno i korisno da se ustanovi matematičko-statistički postupak za izračunavanje parametra koji određuju ove funkcije.

Ovaj rad, koji se odnosi na prilagođavanje logističke funkcije (7) empirijskim podacima, oslanja se na ideju H. T. Davisa koju je primijenio O. Macháček u »Statistika II«, Praha 1969. (str. 18 do 24).

Teorijski, pristup problemu sastoji se u ovom:

1. Uspoređuju se, uz pripadno obrazloženje, relativni empirijski prirasti $\frac{y_i + 1 - y-}{y_i}$ s graničnim relativnim prirastima logističke funkcije (7), $\frac{f'(t_i)}{f(t_i)}$, i tako dolazi do relacije (19) i (20).

2. Iz (20) nalazi se metodom najmanjih kvadrata sustav normalnih jednadžbi (21) koji određuje parametre a i c.

3. Obrazloženi prijelaz od graničnih relativnih prirasta (19) na relativne priraste funkcije (24) omogućuje, prema (25), da se odrede numeričke vrijednosti $f(t_i)$ koje se odnose na funkciju.

4. Ako je $\Sigma y_i = \Sigma f(t_i)$, prilazi se izračunavanju korigiranih podataka putem relacije $f(t_i)_{cor} = f(t_i) + \frac{1}{n} [\Sigma y_i - \Sigma f(t_i)]$.

5. Za izračunavanje još nepoznatog parametra b polazi se, na osnovu (7) od jednadžbi (26). Parametar b procjenjuje se kao aritmetička sredina vrijednosti b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

6. Pomoću izračunatih korigiranih vrijednosti $f(t_i)_{cor}$ i b dolazi se do tražene jednadžbe (28) logističke funkcije.

7. Tačka infleksije t_o, u kojoj logistička funkcija iz konkavnosti prelazi u konveksnost (brzina rasta se počinje smanjivati), određuje se iz uvjeta $f''(t) = 0$, što daje (30), odnosno $t_o = \frac{ln\ b}{c}$.

Numerička obrada primjera o hranidbi pilića (tabela 3), koja služi za ilustraciju, slijedi tok rada koji je gore naveden (tabele 4, 5, 6). Teorijska krivulja ovdje vidno odstupa od empirijiskih podataka jer se podaci odnose na premali vremenski razmak.

DIE LOGISTICHE FUNKTION UND IHRE ANPISSUNG ZUR LÖSUNG GEWISSER PRODUKTIONSPROBLEME

Zusammenfassung

Der Fluss gewisser Funktionen der exponenziellen Art, speziell der Mitscherlich- und logistichen Funktionen, entspricht immanent vielen Prozessen in der Natur und in der Ökonomik. Die Struktur dieser Funktionen gestattet

nicht, dass sie die empirischen Daten durch direkte Anwendung der Methode der kleinstern Quadrate approximiren. Da diese funktionen eine matematische Aussage der objektiven Prozesse sind, ist es offenbar notwending und nützlich das matematisch-statistische Algorithmus zur Berechnung der Parameter, welche die Funktionen bestimmen, festzustellen.

Diese Arbeit, welche sich auf die Approximierung der logistichen Funktion (7) den empirischen Daten bezieht, stüzt sich auf die Idée von H. T. Davis, welche O. Macháček in »Statistika II«, Praha 1969, angewendet hat. Theoretisch, der Zugang dem Problem besteht im folgenden:

1. Man vergleicht, mit adequater Argumentierung, die relativen empirischen Zuwäsche $\frac{y_i + 1 - y_i}{y_i}$ mit den relativen Grenzzuwächse der logisitischen funktion (7), $_iy \frac{f'(t_i)}{f(t_i)}$, und so erreicht man die Relationen (19) und (20).

2. Aus (20) findet man, mittels der Methode der kleinsten Quadrate, ein System der Normalgleichungen (21), welches die Parameter a und c bestimmt.

3. Der argumentirte Übergang von den relativen Grenzzwächse (19) zu den relativen Funktionszuwäche (24) ermöglicht, nach (25), dass man die nummerischen Werte $f(t_i)$, welche sich auf die Funktion beziehen, feststellt.

4. Wenn $\Sigma y_i \neq \Sigma f(t_i)$ ist, findet man die korrigierten Werte durch die relation $f(t_i)_{cor} = f(t_i) + \frac{1}{n} [\Sigma y_i - \Sigma f(t_i)]$.

5. Um den Wert des noch unbekannten Parameters b zu berechnen, benützt man, beziehend auf (7), die Gleichung (26). Den Parameter b schatzt man als aritmetisches Mittel der Werte b_i, $i = 1, 2 \ldots, n$.

6. Mittels der ausgerechneten korrigierten Werte $f(t_i)_{cor}$ und b bekommt man die gesuchte Gleichung (28) der logistischen Funktion.

7. Der Inflexionspunkt t_o, in welchem die logistische Funktion aus der konkavität in die Konoexität übergeht (die Wuchtsgeschwindigkeit wird kleiner) wird durch $f''(t) = 0$ bestimmt, wass (30), bzw. $t_o = \frac{\ln b}{c}$ ergibt.

Die nummerische Behandlung das Beispieles über die Nährung der Hühnchen (Tabele 3), welche zur Illustration dient, folg die Behandlung welche oben angegeben ist (Tabellen 4, 5 u. 6). Die theoretische Curve lenkt hier merkbar von den empirischen Daten ab, weil sich die Daten auf ein zu kleines Zeitintervall beziehen.