Sjemenarstvo 15(98)3-4

UDK: 373.68(045)=862
Stručni rad

VALNE FUNKCIJE U KODIRANJU SLIKE

Biserka KUDELIĆ

Agronomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Faculty of Agriculture, University of Zagreb

SAŽETAK

Rad iznosi pregled valnih funkcija te daje prikaz njihova korištenja pri kodiranju slike. Iznesena je konkretna metoda kodiranja slike - lokalna kosinusova tran-sformacija (LCT) s naglaskom na ilustraciji valnih funkcija koje čine bazu funkcija.

1. UVOD

Sredstvo pomoću kojega se izražavaju informacije raznih oblika obično je neki formalizirani jezik. U tom je jeziku potrebno odabrati abecedu - elementarne simbole u kojima je svaka informacija prikaziva. Sam proces mijenjanja oblika informacije zove se *kodiranje*, a pravilo po kojem svakom elementarnom simbolu informacije pridajemo kombinaciju simbola odabrane abecede naziva se *kod*. Kod treba odabrati optimalno: pod tim podrazumijeva se da će informacija ostati sačuvana (da je možemo dekodirati), dakle podrazumijevaju se *reverzibilnost* te *ekonomičnost*.

Primjerice, pri prenošenju tekstualne informacije najčešće se kodira binarno. Informacija se prevodi u oblik formalnog jezika čija je abeceda dvočlana (0,1).

Kako se u poruci svi znakovi ne pojavljuju sa jednakom vjerojatnošću (za tekst pisan hrvatskim jezikom vjerojatnost pojavljivanja slova a i ž , primjerice, nije jednaka), potrebno je odabrati optimalan kod. Kad bismo koristili ravnomjerno kodiranje, za prikaz svih 30 slova hrvatske abecede potrebni su slogovi duljine najmanje pet znakova. To naravno nije optimalan kod. Optimalan kod je neravnomjeran - znakovi sa najvećom vjerojatnošću pojavljivanja imaju kraće slogove, a najdulje slogove imaju oni čija je vjerojatnost pojavljivanja najmanja.

Pod informacijom podrazumijevaju se razni oblici poruka: tekst, slika, zvuk.

2. O VALNOJ FUNKCIJI I KODIRANJU SLIKE

2.1 Prijenos slike

Digitalne slike nisu ekonomične za izravno prenošenje. Na primjer, ako je riječ o kolor slici 1024 x 1024 pixela, a veličina informacije za prijenos je 24 bita po pixelu, tada za izravan prijenos treba 3.15 Mbyta memorije. Efikasno rukovanje slikom je moguće jedino uvođenjem neke od metoda *kompresije* slike. Sliku je, prije prijenosa komunikacijskim sutavom, potrebno pretvoriti u odgovarajući signal kodiranjem. I ovo kodiranje mora biti ekonomično i reverzibilno.

Sliku možemo shvatiti kao distribuciju vjerojatnosti:

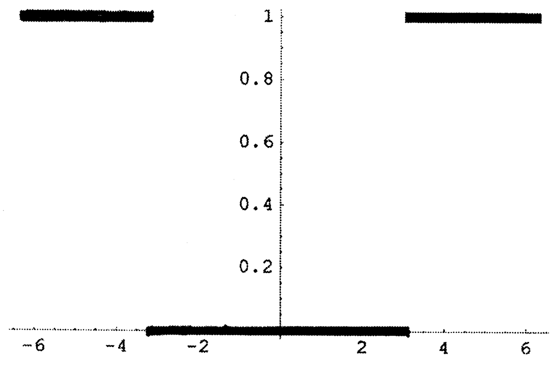
- događaji f_i su pojava fotona na bilo kojoj pixel lokaciji,
- broj fotona (grey-level) na svakom pixelu u danoj slici može se smatrati pokazateljem vjerojatnosti p_i da se fotoni pojave na tom istom mjestu u nekom budućem prikazu te iste scene.

Označimo sa $p = \{p_i : i = 0,1,2,...\}$ (diskretnu) funkciju distribucije vjerojatnosti za događaje f_i. Naravno da je $0 \leq p_i \leq 1, \sum_i p_i = 1.$

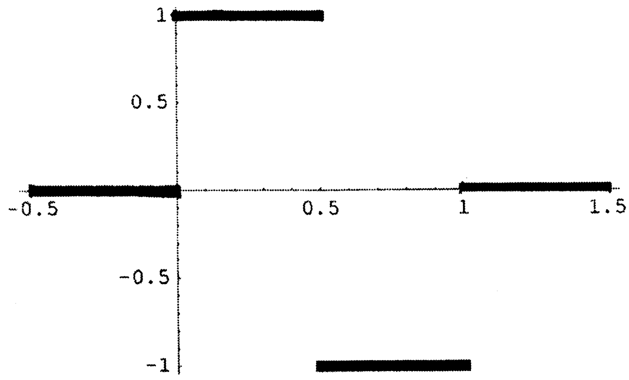
2.2 Kodiranje slike

Slika se može shvatiti kao funkcija lokacije (pozicije pixela) i broja fotona. Da bi se kodirala neka slika, moramo raspolagati *bazom funkcija* koja prekriva čitav realan pravac. Zatim se slika transformira tako da se za odabranu bazu funkcija računaju skalarni produkti slike shvaćene kao funkcije i odabrane baze. Tako se zapravo vrši promjena vrijednosti varijable za određeni pixel.Pritom se očekuje da će promjena originalnih koordinata malo utjecati na gubitak kvalitete slike. Kod mora biti reverzibilan, ali budući će neke informacije biti promijenjene zaokruživanjem i kvantiziranjem, reverzibilnost u praksi nije savršena.

Bazu funkcija čine *valne funkcije* - bilo stepenaste, bilo glatke. *Stepenaste valne funkcije* pogodne su za kodiranje (neglatkih) digitalnih signala. Navodimo dva primjera stepenastih valnih funkcija: *Shannonovu valnu funkciju* i *Haarov sustav valova*. Funkcije su prikazane na slikama 1 i 2.

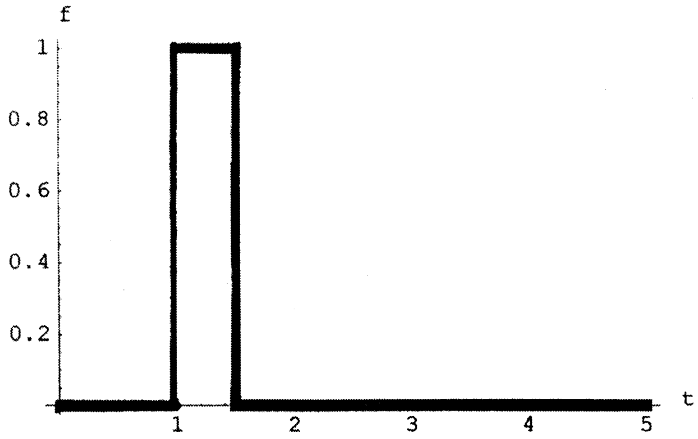


▪ **SLIKA 1:Shannonov val je graf karakteristične funkcije Shannonovog intervala I = [-2 π,- π) U (π,2 π]**



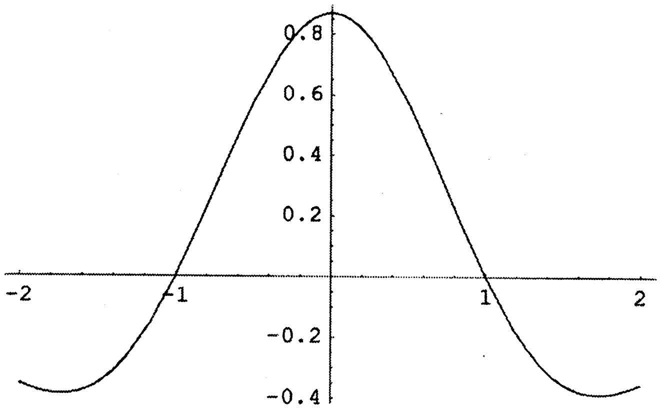
■ **SLIKA 2: Haarov sustav valova pogodan je za prikazivanje digitalnih signala**

Ove funkcije, na način na koji su zadane, ne prekrivaju realnu os **IR**, no prekri-vanje se može postići translacijom i dilatacijom funkcija. Za funkciju zadanu na argumentu x pravilom $f(x)$, dilatacija za faktor a je $f(ax)$, a translacija za faktor a je $f(x+a)$. Translacije i dilatacije pokazat ćemo na primjeru glatkih valnih funkcija. Neglatki digitalni signal se pomoću stepenastih valnih funkcija dobro opisuje - možemo ga lokalizirati u prostoru, vremenu trajanja i frekvenciji. Primjer jednostavnog digitalnog signala prikazan je slikom 3.



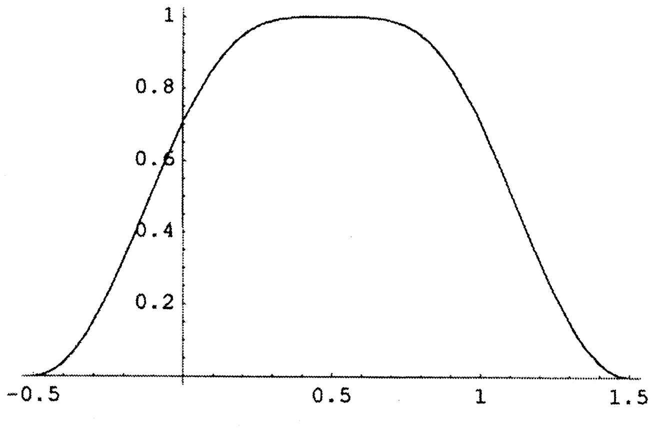
■ **SLIKA 3: Primjer jednostavnog digitalnog signala**

Glatke valne funkcije koriste se kod prenošenja glatkih signala - zvuka ili slike na primjer. Na slici 4 primjer je jedne glatke valne funkcije.



■ **SLIKA 4 : Glatka valna funkcija $H(x) = \frac{2(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3\sqrt{\pi}}}$ (iz očitih razloga) zvana "meksički šešir"**

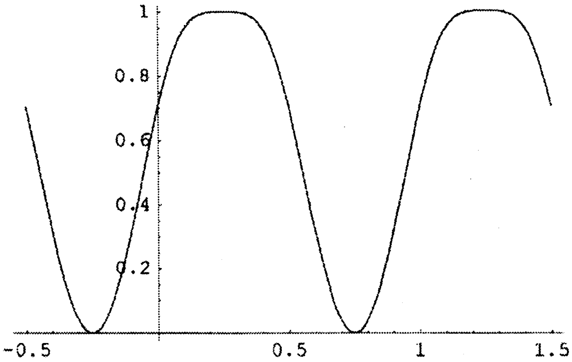
Ilustrirat ćemo jednu metodu kodiranja slike - lokalnu kosinusovu transformaciju.Bazne valne funkcije kod te transformacije jesu funkcije kosinusa množene glatkim valnim funkcijama $b(x)$ koje zovemo funkcijama skoka. Graf funkcije $b(x)$ jest slika 5.



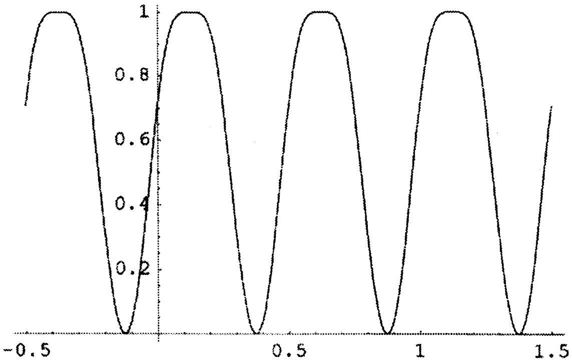
■ **SLIKA 5 : Funkcija $b(x) = \sin(\frac{1}{4}\pi(\sin(\pi x) + 1))$ koristi se kao funkcija skoka kojom se množe kosinusove funkcije**

Na funkciji $b(x)$ ilustriramo dilataciju funkcije: na slici 6 je prikazana dilatacija sa faktorima $a = 2,4,8$.

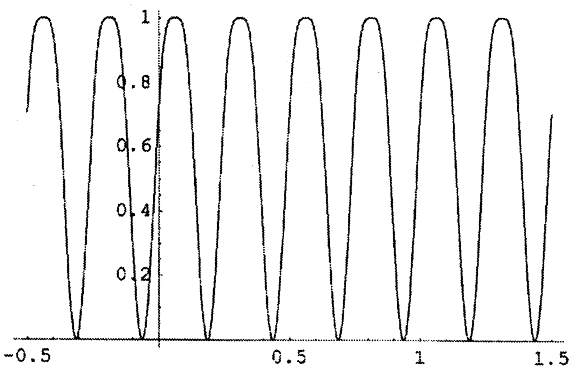
I. $b'(x) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi(\sin(2\pi x)+1)\right)$, $a = 2$



II. $b''(x) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi(\sin(4\pi x)+1)\right)$, $a = 4$



III. $b'''(x) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi(\sin(8\pi x)+1)\right)$, $a = 8$



▪ **SLIKA 6: Primjeri dilatacije funkcije b(x)**

3. METODOLOGIJA KODIRANJA SLIKE

3.1 Lokalna kosinusova transformacija

Neka je $\{I_k, k \in Z\}$ familija disjunktnih kompaktnih intervala na **IR** koja ga prekriva, $I_k = [a_k, b_k\rangle$. Bit svake transformacije je u tome da se pronađe ortonormirana baza u L^2(**IR**) za particiju **IR** = $\bigcup_k I_k$.

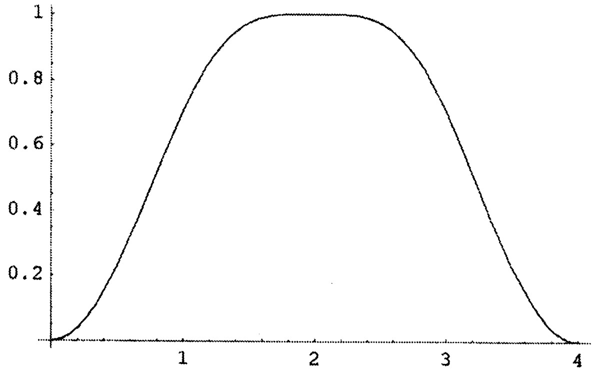
R. Coifman i Y. Meyer napravili su sljedeću konstrukciju u kojoj su vektori baze funkcije kosinusa množene simetričnim funkcijama skoka $b(x)$. Ta je valna funkcija zadana sa :

$$b(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{4}(1+\sin_{\pi} x), -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ 0, \textit{inače} \end{cases}$$

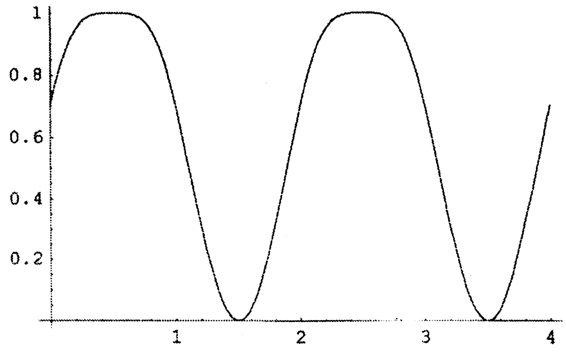
Funkcija $b(x)$ je, kako se vidi na slici 5, simetrična oko $x = \frac{1}{2}$, glatka na $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$, derivacije joj iščezavaju na rubovima, na **IR** ima neprekidnu derivaciju. Ovime je dobivena valna funkcija s jednim valom, želimo li da ih bude više (odnosno da ima više derivacija koje iščezavaju - vidi sliku 6) te da slika funkcije upadne u interval I_k, to se postiže translacijom i dilatacijom. Namjesto funkcije b promatramo

$$b_k(x) = b\left(\frac{x - a_k}{|I_k|}\right),$$

gdje je $|I_k|$ duljina intervala, a a_k lijevi rub intervala I_k. Primjer translacije i dilatacije funkcije b jest na slici 7.



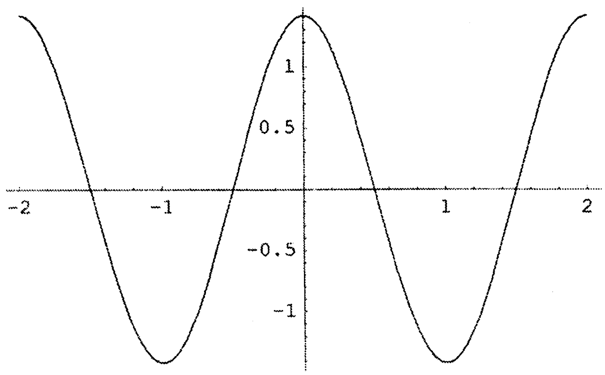
SLIKA 7A: Za I=[1,3] crtamo funkciju $b1(x) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi\left(\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x-1)\right)+1\right)\right)$



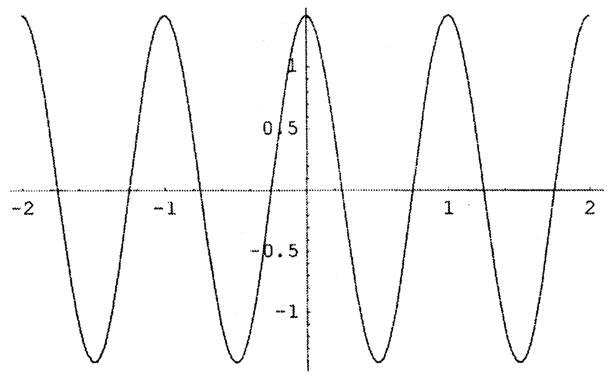
SLIKA7B: Za I=[2,3] crtamo funkciju $b2(x) = \sin(\frac{1}{4}\pi(\sin(\pi(x-2))+1))$

Sad zadamo funkcije $c(n,x) = \sqrt{2}\cos(nx\pi)$ (slika 8).

$c(1, x) = \sqrt{2}\cos(\pi x)$



$c(2, x) = \sqrt{2}\cos(2\pi x)$



■ **SLIKA 8:Grafovi valnih funkcija c(n,x) za n=1 i 2**

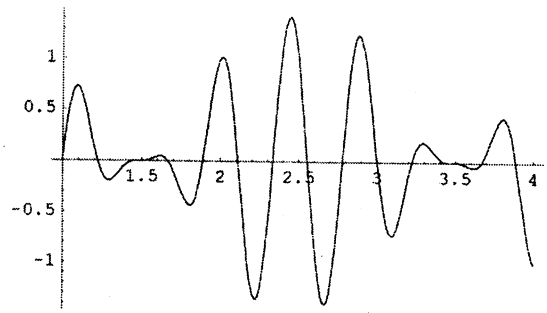
Za $n \geq 0, x \in [0,1]$, funkcije $c(n+\frac{1}{2},x)$ čine ortonormiranu bazu za L^2 ($[0,1]$). I ove funkcije mogu se translacijom i dilatacijom pomaknuti na I_k ako su zadane:

$$c_k(n,x) = \frac{1}{\sqrt{|I_k|}} c\left(n, \frac{x-a_k}{|I_k|}\right).$$

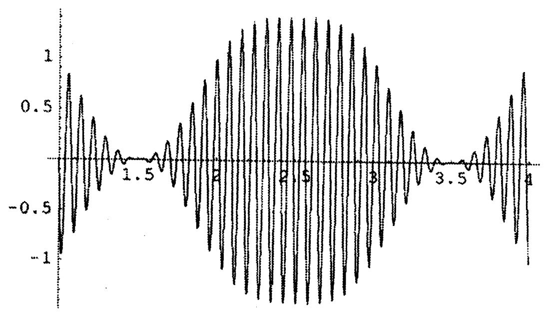
Konačno, funkcije $a_{n,k}$ definirane: $a_{n,k}(x) = b_k(x) c_k(n+\frac{1}{2},x)$

za prirodan broj n i cijeli broj k čine ortonormiranu bazu za $L^2(\mathbf{IR})$. Na slici 9 za $I_1 = (1,2)$ nacrtane su funkcije $a_{n,1}$ za $n = 4,25$, a na slici 10 za $I_2 = (2,3)$ grafovi funkcija $a_{n,2}$ za $n = 4,25$. Naravno da se particija realne osi odabire po volji te može biti i drugačija od ovdje uzete.

$$a_{4,2} = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{1}{4}\pi(\sin(\pi(x-2))+1)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(9\pi)(x-2)\right)$$

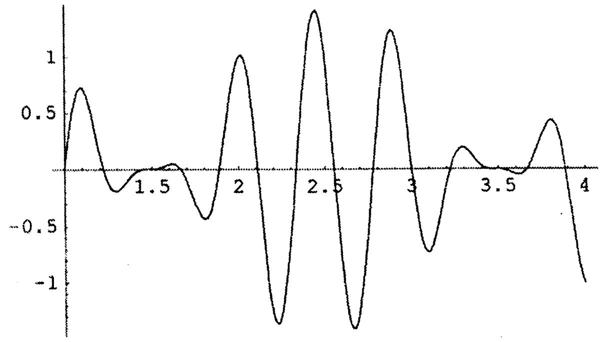


$$a_{25,2} = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{1}{4}\pi(\sin(\pi(x-2))+1)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(51\pi)(x-2)\right)$$

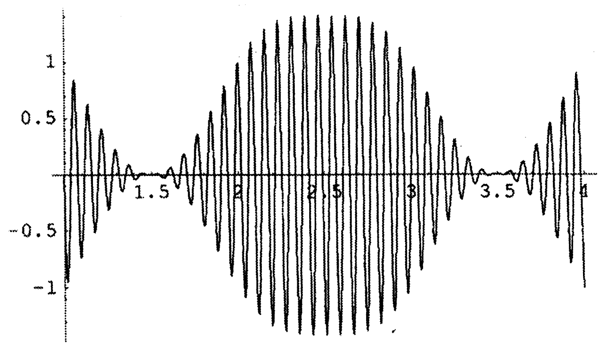


▪ **SLIKA 9 : Izgled baznih funkcija za k=2, I=(2,3) i n=4,25**

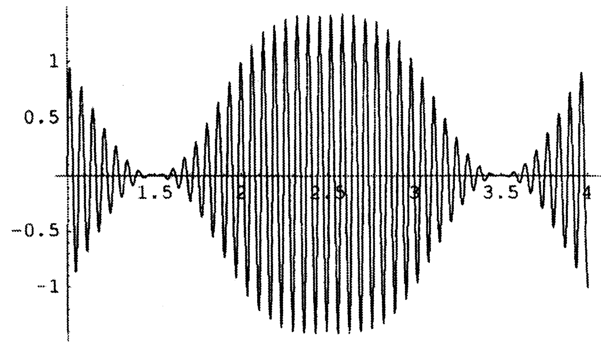
$$a_{4,2} = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{1}{4}\,\pi\,(\sin(\pi\,(x-2)) + 1)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,(9\,\pi)\,(x-2)\right)$$



$$a_{25,2} = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{1}{4}\,\pi\,(\sin(\pi\,(x-2)) + 1)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,(51\,\pi)\,(x-2)\right)$$



$$a_{30,2} = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{1}{4}\,\pi\,(\sin(\pi\,(x-2)) + 1)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,(61\,\pi)\,(x-2)\right)$$



▪ **SLIKA 10: Izgled baznih funkcija za k=2, I=(2,3) i n=4,25,30**

4. DISKUSIJA

Kad raspolažemo bazom funkcija poput ove koja se dobiva lokalnom kosinusovom transformacijom, imamo paket za kodiranje slike. Standardni algoritmi paketa za kodiranje slika rade tako da sliku, koja je funkcija, ne pamte, pohranjuju i prenose u izravnom obliku već računaju, pohranjuju i prenose vrijednosti skalarnih produkata te funkcije sa odabranom bazom funkcija. Slika, tako predstavljena koeficijentima prikaza u bazi, može biti rekonstruirana u prvobitni oblik. Metode kodiranja slike neizbježno za sobom povlače greške i poremećaje, no za različite metode kodiranja (za različite pakete za kodiranje slike koji se razlikuju po bazama valnih funkcija), različite su greške. Procjena kvalitete slike kodirane raznim metodama rade se subjektivnim procjenama većeg broja promatrača. Moguće je analizu kvalitete raditi i objektivno - računalom koje metodu kodiranja procjenjuje prema veličini narušenosti međurezultata.

5. ZAKLJUČAK

Valne funkcije imaju značajnu primjenu u postupku kodiranja slike u svrhu ekonomičnog prenošenja komunikacijskim kanalom. Kvaliteta kodiranja (odnosno slike dobivene dekodiranjem poslije prijenosa) ovisi o odabranom paketu za kodiranje, a ovaj opet o odabranoj bazi valnih funkcija.

THE WAVELETS IN PICTURE CODING

ABSTRACT

The wavelets have their application in picture coding. There is a discusion on wavelets in general followed by description of a local cosine transform (LCT) algorithm of Coifman and Meyer. We lay emphasis on graphic layout of wavelets used.

6. LITERATURA - REFERENCES

1. A Brink: Maximum Entropy Segmentation Based on the Autocorrelation Function on the Image Histogram, CIT, Zagreb, vol 2, no 2, str 77-85.
2. V. Matković, V Sinković: Teorija informacija, ŠK, Zagreb, 1984.
3. Ž. Pauše: Uvod u teoriju informacija, ŠK, Zagreb, 1985.
4. G. Weiss: On wavelets, Lecture notes, Conference on Functional Analisys, Dubrovnik, September 1997.

5. M. V. Wickerhauser: Comparation of Picture Compression Methods: Wavelet, Wavelet Packet and Local Cosine Transform Coding, Wavelets and Aplications, Proceedings of Taromina, October 1993, preprint.

Adresa autora – Author's address:
Mr. sc. Biserka Kudelić
Agronomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Zavod za matematiku i informatiku
Svetošimunska 25
HR - 10000 Zagreb

Primljeno – Received:
14. 07. 1998.